UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ
V ÚSTÍ NAD LABEM

FAKULTA SOCIÁLNĚ EKONOMICKÁ

MATEMATIKA PRO EKONOMY

ONDŘEJ MOC
JANA ŠIMSOVÁ
MARTA ŽAMBOCHOVÁ

Ústí nad Labem 2013

Vydání učebnice bylo finančně podpořeno v projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0031 s názvem *Rozvoj matematických dovedností studentů UJEP* v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MATEMATIKA PRO EKONOMY

Recenze: Prof. RNDr. Jiří Cihlář, CSc., Ing. Tomáš Siviček, Ph.D.
Vydání: první
ISBN: 978-80-7414-599-5

Obsah

Předmluva

V září roku 2010 byla MŠMT schválena podpora projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0031 s názvem *Rozvoj matematických dovedností studentů UJEP* v rámci Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost. V listopadu 2010 se tento projekt rozběhl a od ledna 2011 kolektiv autorů pracoval na klíčových aktivitách projektu. Jeden z výstupů tohoto projektu nyní máte před sebou.

Učebnice je určena především studentům prezenční a kombinované formy studia v studijních programech Ekonomika a management a také Hospodářská politika a správa na Fakultě sociálně ekonomické UJEP. Věříme však, že bude vítaným průvodcem matematikou i pro ostatní studenty UJEP, resp. že po ní rádi sáhnou i ostatní zájemci o matematiku.

V poslední době jsme svědky klesající úrovně matematických znalostí a dovedností. Knihu jsme proto psali s vědomím, že studentům chybí některé základní znalosti potřebné ke studiu tzv. vyšší matematiky. Z tohoto důvodu jsou v učebnici zařazeny i kapitoly s učivem, které by studentům mělo být známo ze střední školy. Naší snahou bylo vytvořit kompaktní text, který umožní zacelit mezery v matematice vzniklé při studiu na nižších typech škol.

Mnoho učebnic matematiky je psáno strohým odborným jazykem, který v nezasvěcených osobách vytváří pocit neschopnosti porozumět danému textu. Způsob, kterým je psána tato učebnice, odráží naše úsilí vytvořit knihu, která bude čtivá a srozumitelná studentům ekonomie. Autoři jsou si vědomi, že text je určen čtenářům, pro které není matematika cílem, ale pouze prostředkem k pochopení látky ze svého odborného zaměření. V knize jsme se proto záměrně nedrželi formálního stylu výkladu ve tvaru definice - věta - důkaz. Ve většině případů předchází vyslovení definice daného pojmu úvodní pasáž, která čtenáře postupně uvede do příslušné problematiky. Po zavedení pojmu je tento v dalším textu zkoumán a zjištěná pozorování jsou zformulována do vět. Věty jsou většinou vysloveny bez potřebných důkazů, pouze na několika místech jsou uvedeny některé důležité důkazy vět, aby studenti získali hrubou představu o korektním přístupu k matematickému textu. Vyslovené věty jsou potom procvičeny ve vzorově vyřešených úlohách, ze kterých by měl čtenář získat cit pro použití probírané látky v úlohách ze svého odborného zaměření.

Inspiraci k příkladům uvedeným v této učebnici jsme čerpali ze svých osobních zkušeností s dlouholetou výukou matematiky na ekonomické fakultě a také z mnohých učebnic uvedených v seznamu literatury. Přestože učebnice obsahuje řadu řešených příkladů, jejich množství by patrně nedostačovalo ke kvalitní přípravě na zkoušku z matematických předmětů. K procvičení techniky výpočtu je proto vhodné používat další sbírky řešených úloh, např. [17], [18], [22].

První kapitola je věnována opakování elementárních pojmů teorie množin a výrokové logice. Tento úvod obsahuje nezbytný aparát, který v další části učebnice neustále používáme. Následující dvě kapitoly se věnují kombinatorice a na ni navazující teorii pravděpodobnosti. Následující rozsáhlá kapitola se zabývá lineární algebrou. Látka z této části učebnice představuje významnou část učiva požadovaného u zkoušky z matematických předmětů. Pátá kapitola opět přináší opakování látky, která by studentům měla být známa ze střední školy. Představuje však odrazový můstek k následujícím kapitolám, proto je její rozsah poněkud obsáhlejší. Šestá až osmá kapitola jsou věnovány tzv. diferenciálnímu počtu funkcí jedné proměnné. Hlavní úlohou těchto kapitol je zavedení pojmu derivace funkce a aplikace tohoto pojmu při řešením nejrůznějších úloh. Následující dvě kapitoly představují úvod do integrálního počtu funkcí jedné proměnné. Tyto kapitoly popisují matematickou operaci, která je do jisté míry opačná k derivaci. I zde se čtenář seznámí s řadou aplikačních úloh využívající ke svému řešení integrální počet. Jedenáctá kapitola představuje rozšíření teorie funkcí jedné proměnné na funkce více proměnných. Zbývající tři kapitoly představují úvod do aplikované matematiky s velkým dopadem v ekonomii. Za teorie probírané v těchto třech kapitolách byly uděleny Nobelovy ceny za ekonomii.

Vydání knihy by bylo nemyslitelné bez finanční podpory z Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost. Stejně tak se na vydání knihy podílela řada dalších osob. Na tomto místě bychom rádi poděkovali oběma recenzentům za pečlivé pročtení textu, za poskytnutí odborných rad a upozornění na případné nedostatky v textu. Jejich připomínky vedly k významnému zlepšení učebnice. Velký dík patří také korektorkám Anně Skalské a Janě Ivanové, které trpělivě kontrolovaly jazykovou úroveň učebnice. Všechny nedostatky, které přes veškerou snahu v učebnici zůstaly, však jdou na vrub autorům jednotlivých kapitol učebnice. V neposlední řadě je nutno poděkovat (bývalým i současným) studentkám FSE UJEP Adéle Holasové, Veronice Kalinové a Adéle Lustykové za pečlivé zkoumání srozumitelnosti textu z pohledu studentů a také za poskytnutí námětů, které pomohly zlešit úroveň učebnice. Technickou podporu při vydání knihy poskytoval Petr Rys, který je také autorem většiny obrázků v učebnici. Projektu se v omezené míře jako spoluautoři zúčastnili i Jana Gabčanová, Tomáš Nepovolný a Jiří Uhman. Organizační stránku tvorby učebnice zajišťovaly Lenka Hřebejková a Iva Jiránková. Všem uvedeným osobám patří velké poděkování za pomoc při tvorbě učebnice.

Ústí nad Labem 2013
Ondřej Moc
Jana Šimsová
Marta Žambochová

Kapitola 1

Logika a teorie množin

Tato kapitola bude pojednávat o dvou základních disciplínách matematiky.

Jednou z nich je logika, což je věda, která se zabývá usuzováním, pravdivostí, dokazatelností a vyvratitelností. Přitom všem jde v logice pouze o formu sdělení, nezajímá nás, co konkrétně je sdělováno, stejně jako nás nezajímají různé psychologické interpretace a podobné věci.

Počátky logiky jsou spojené s antickým Řeckem, především řeckým filosofem ARISTOTELEM (384-322 před n. let.). Vývoj probíhal i v průběhu středověku, kde můžeme připomenout například WILLIAMA OCCAMA (1288-1348), který na počátku 14. století formuloval mimo jiné princip Occamovy břitvy, který je hojně využíván dodnes. Z novější doby můžeme například zmínit jméno GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716), GEORGE BOOLE (1815-1864) (především známý díky tzv. Booleově algebře), či GOTTLOB FREGE (1848-1925) (zavedl symbolické zápisy logických vývodů), ale i mnoho dalších.

Výroková logika je součástí logiky, což je formální věda zkoumající objektivní, formální způsob vyvozování závěrů. To znamená, že nám ukazuje, jak máme formálně správně postupovat při odvozování složitějších tvrzení z tvrzení jednodušších. Na výrokovou logiku úzce navazuje predikátová logika. Obojí je spojeno v matematickou logiku jako matematickou disciplínu, která je společně s teorií množin základem ostatních matematických oblastí. Logika je ovšem úzce spjata i s jinými vědními obory, především filosofií a společně s ní proniká například do práva, což je ob last na první pohled nesouvisející s matematikou.

Druhou částí je oblast zabývající se množinami. Její základy se datují do poloviny 19. století. Její počátky jsou spojeny s českým matematikem a filosofem BERNARDEM BOLZANEM (1781-1848). V druhé polovině 19. století ovlivnil vývoj teorie množin německý matematik a logik GEORG CANTOR (1845-1918). Na přelomu 19. a 20. století nastal bouřlivý rozvoj této disciplíny, spojený například se jmény BERTRAND ARTHUR WILIAM RUSSELL (1872-1970), ERNST ZERMELO (1871-1953). Vývoj v oblasti teorie množin je stále aktivní, především v podobě tzv. axiomatických teorií.

1.1 Logika

V následující části kapitoly stručně shrneme přehled základních informací převážně z výrokové logiky, ale zmíníme se i o základech logiky predikátové. Hlavní důraz budeme klást na získání znalostí potřebných v jiných kapitolách této učebnice.

Nejprve si vysvětleme dva základní úhly pohledu na správnost, či chybnost různých posloupností znaků. Oba tyto úhly pohledu využíváme nejen v logice, ale i v jiných oblastech, jako je například jazykověda, či informatika.

Definice 1.1.1. Syntaxe
Syntaxe (jazyk, skladba) určuje pravidla pro zápis formálního jazyka. Popisuje význam znaků a jejich seskupení. Zabývá se správným tvořením posloupností jednotlivých znaků a popisuje skladební vztahy.

Definice 1.1.2. Sémantika
Sémantika (obsah) se zabývá významem jednotlivých znaků a jejich seskupení.

Pro bližší přiblížení a pochopení obou pojmů je dobré si vše vysvětlit na učení se jazyku (ať už mateřskému, či cizímu). Při používání jazyka si vždy musíme dát pozor na správnost jednak z hlediska gramatiky a správné větné skladby (tj. syntaxe), ale i z hlediska obsahového (tj. sémantiky).

Tak například věta „Stole na vázy dvě ležely“ je zcela jistě chybná z hlediska větné skladby. Ve větě „Na Stole lešeli dvje vazi“ se vyskytuje velké množství gramatických chyb. Obě tyto věty jsou chybné z hlediska syntaxe.

Na rozdíl od těchto dvou vět je věta „Na stole ležely dvě vázy“ syntakticky správně. V syntaxi nemá chybu ani věta „Vzhůru ze stolu padal sypký olej“. Ovšem asi každý se zarazí nad obsahem druhé věty. Tato věta je sice správná ze syntaktického hlediska, ale z pohledu sémantiky je chybná.

Syntaktický i sémantický pohled musíme užívat nejen při užívání jazyka, ale i ve výrokové logice, jakož i v jiných oblastech matematiky.

Vraťme se ale k základům výrokové logiky a vysvětleme si několik pojmů, bez jejichž znalosti se neobejdeme. Základním pojmem výrokové logiky je pochopitelně výrok.

Definice 1.1.3. Výrok
Výrok je každá oznamovací věta (sdělení), u níž má smysl tvrdit, jestli je pravdivá, nebo nepravdivá.

Příkladem výroků jsou následující věty.

- „Peří je lehčí než olovo.“
- „Tráva může mít růžovou barvu.“
- „Dva krát tři je šest.“
- „Osm plus čtyři je deset.“

Na rozdíl od toho následující věty výroky nejsou.

- „Uleť!“
- „Máš mě rád?“
- „Člověk váží méně než 100 kg.“
- „Číslo x je sudé.“

První dvě věty nejsou oznamovací a u druhých dvou vět nejsme schopni rozhodnout, zda je tvrzení pravdivé, či nikoliv. Jistě existuje člověk, který váží méně než 100 kg, ale existují i lidé s vyšší hmotností. Stejně tak existují jak čísla sudá, tak lichá, a my nevíme, které konkrétní číslo měl autor věty na mysli.

Příklad 1.1

1.1. Které z následujících vět jsou výroky?

a) „Proč jsi nepřišel?“
b) „Hlavním městem ČR je Praha.“
c) „Hlavním městem USA je New York.“
d) „Zvíře má čtyři nohy.“
e) „Zvíře může mít čtyři nohy.“
f) „$5 + 8 = 12$“

Řešení:

a) Jedná se o větu tázací. Není splněna podmínka o oznamovací větě. Proto se nejedná o výrok.

b) Jedná se o oznamovací větu, která vyjadřuje pravdivou skutečnost. Jedná se tedy o výrok.

c) Jedná se o oznamovací větu, která vyjadřuje nepravdivou skutečnost (můžeme tedy rozhodnout o pravdivosti, což je podmínkou v definici výroku). Jedná se o výrok.

d) Jedná se o oznamovací větu, o které nemůžeme rozhodnout, zda vyjadřuje pravdivou, či nepravdivou skutečnost. Známe totiž zvířata, která čtyři nohy mají i zvířata, která čtyři nohy nemají. Není splněna druhá podmínka z definice výroku. Nejedná se o výrok.

e) Jedná se o oznamovací větu, která vyjadřuje pravdivou skutečnost (známe zvíře se čtyřmi nohami). Jedná se o výrok.

f) Jedná se o matematický výraz, který můžeme vyjádřit oznamovací větou, jež vyjadřuje nepravdivou skutečnost (můžeme tedy rozhodnout o pravdivosti, což je podmínkou v definici výroku). Jedná se o výrok.

Definice 1.1.4. *Atomický výrok* je výrok, který už dále nemůžeme dělit, jedná se v jistém smyslu o to nejjednodušší konstatování.

Předchozí příklady výroků byly všechny atomické výroky. Atomické výroky budeme dále značit malými písmeny abecedy, klasicky $p, q, r, \ldots$

Obdobně, jako v českém jazyce spojujeme pomocí větných spojek holé věty do souvětí, můžeme pomocí atomických výroků a logických spojek složit složitější výrok, kterému budeme říkat složený výrok.

Definice 1.1.5. *Složený výrok* je výrok, který vznikne složením jednotlivých výroků pomocí logických spojek.

V následující tabulce jsou uvedeny některé logické spojky.

název	symbol	význam
negace	$\neg$	není pravda, že ...
konjunkce	$\wedge$	... a současně ...
disjunkce	$\vee$	... nebo ...
implikace	$\Longrightarrow$	jestliže ..., potom ...
ekvivalence	$\Longleftrightarrow$	... právě tehdy, když ...

„Nebo“ u významu disjunkce je nutno chápat jako slučovací *nebo*, nikoliv jako vylučovací *nebo*. Při psaní v českém jazyce před slučovacím *nebo* nepíšeme čárku, kdežto před vylučovacím *nebo* čárku píšeme. Slučovací *nebo* znamená, že nastane první skutečnost, nebo druhá skutečnost, nebo obě skutečnosti.

V níže uvedeném seznamu se nacházejí příklady složených výroků.

- „Pavel tam nepůjde.“
- „Pavel tam půjde a Petr tam půjde.“
- „Pavel tam půjde nebo tam půjde Petr.“
- „Jestli tam Pavel půjde, půjde tam i Petr.“
- „Pavel tam půjde právě tehdy, když tam půjde Petr.“

Co uvedené výroky znamenají?

- Výrok „Pavel tam nepůjde“ je negací výroku „Pavel tam půjde“ a znamená informaci, že není pravda, že Pavel na určené místo půjde.

- Výrok „Pavel tam půjde a Petr tam půjde“ je konjunkcí výroků „Pavel tam půjde“ a „Petr tam půjde“ a znamená, že Pavel na určené místo půjde a zároveň Petr na určené místo půjde také, čili na určené místo půjdou oba.
- Ve výroku „Pavel tam půjde nebo tam půjde Petr“, který je diskunkcí výroků „Pavel tam půjde“ a „Petr tam půjde“, si musíme dát pozor na význam slučovacího nebo. Výrok nám dává informaci, že nastala jedna ze tří situací. Buď Pavel půjde na určené místo a zároveň tam půjde Petr, tj. půjdou tam oba. Nebo na určené místo půjde jen Pavel sám a Petr tam nepůjde. Poslední možnou situací je, že tam půjde jen Petr sám a Pavel tam nepůjde.
- V případě výroku „Jestli tam Pavel nepůjde, Petr zůstane doma“ značící imlikaci obou výroků, je asi všem jasná situace, co nastane, pokud tam Pavel půjde. V tomto případě tam musí jít i Petr, a to znamená, že půjdou oba. Ale co nastane v situaci, že tam Pavel nepůjde? O tom výrok nemluví, pro tento stav žádná podmínka nebyla stanovena. Proto se může stát cokoliv, to znamená, že je možná situace, kdy tam Petr půjde, stejně jako situace, kdy tam Petr nepůjde.
- Výrok „Pavel tam půjde právě tehdy, když tam půjde Petr“ znamená ekvivalenci výroků „Pavel tam půjde“ a „Petr tam půjde“ a znamená situaci, kdy na určené místo buď půjdou oba, Pavel i Petr, nebo tam nepůjde ani jeden z nich.

Ač to na první pohled možná nevypadá, asi nejsložitější je správně vytvořit negaci některých výroků. Proto se procvičení tvorby negací věnujeme více.

Příklad 1.2

1.2. Vytvořte negaci následujících výroků.

a) „Venku je hezky.“

b) „Na věž vede alespoň 100 schodů.“

c) „Všichni lidé umřou.“

d) „Nikdo tam nepůjde.“

e) „Udělal maximálně tři chyby.“

f) „Půjde tam Petr a Pavel.“

g) „Dám si maso nebo zeleninu.“

h) „Jestli včas udělám úkoly, půjdu do kina.“

i) „Přestanu kouřit, přestaneš-li ty.“

j) „Udělám dobře zkoušku právě tehdy, pokud se budu pilně učit.“

Řešení:

a) Negace nám říká „Není pravda, že je venku hezky“. Jinými slovy „Venku není hezky“. Třetí možností je formulace „Venku je ošklivo“.

b) Negace druhého výroku ve tvaru „Není pravda, že na věž vede alespoň 100 schodů“ také není obtížná. Bohužel tato formulace není ideální, protože ne každý tomuto vyjádření rozumí dobře. Jak toto tvrzení můžeme formulovat jinak, lépe a výstižněji? Připomeňme si, co to znamená „alespoň 100 schodů“. Může to být 100 schodů, nebo 101, 102, atd. Dále si uvědomme, v jaké situaci můžeme o někom říci, že lže, pokud nám tvrdí „Na věž vede alespoň 100 schodů.“ Toto můžeme říci, pokud na věž vede jiný počet schodů než 100, 101, 102, 103 atd. Tedy například 99, 98, 97 atd. Nyní už můžeme formulovat výslednou negaci následovně „Na věž vede méně než 100 schodů“ či „Na věž vede maximálně 99 schodů“. Všimněme si, že se v negaci nevyskytuje zápor slova vede, ale sloveso zde stojí ve svém základním tvaru. Tento fakt nás nesmí zaskočit. Při řádném zamyšlení bychom si měli uvědomit, že je to jediný možný přípustný slovesný tvar.

c) S negací následujícího výroku má mnoho lidí velký problém. Asi nejčastější formulací této negace bývá „Nikdo neumře“. Ovšem opět si uvědomme, co to znamená „Není pravda, že všichni lidé umřou“. Neboli, opět se zeptejme, kdy můžeme někoho, kdo říká „Všichni lidé umřou“, osočit, že lže? K tomu stačí, aby existoval i jediný člověk, který neumře.
Správná negace tedy bude znít „Existuje (alespoň jeden) člověk, který neumře“.

d) Obdobný problém, jako v předchozím příkladu, bývá i s negací výroku typu „Nikdo tam nepůjde“. Přirozenou odpovědí bývá „Všichni tam půjdou“. Ale opět si uvědomme, kdy můžeme o někom říci, že lže, pokud nám tvrdí „Nikdo tam nepůjde“? K tomu přeci stačí i situace, že se najde i jediný člověk, který tam půjde.
Proto správná negace bude znít „Alespoň někdo tam půjde“.

e) Co je opakem situace, že někdo udělal maximálně tři chyby?
Nejprve si musíme uvědomit, co znamá „maximálně tři chyby“. To můžeme říci v okamžiku, kdy daná osoba udělala tři chyby, nebo dvě, nebo jednu, ale i žádnou chybu. A kdy toto neplatí? Pokud tato osoba udělala jiný počet chyb, tedy čtyři, pět, šest atd.
Správná formulace negace tedy bude následující „Udělal alespoň čtyři chyby“ či „Udělal více než tři chyby“.

f) I s negací výroku „Půjde tam Petr a Pavel“ bývají problémy. Častou odpovědí bývá tvrzení „Nepůjde tam Petr a Pavel“ či „Nepůjde tam Petr ani Pavel“. Opět je to s negací ale poněkud složitější. Kdy v tomto případě můžeme někoho osočit ze lži? Přeci stačí, aby tam nešel kterýkoliv z obou jmenovaných, nemusí tedy nastat situace, kdy tam nepůjde ani jeden. Když se zamyslíme, co jsme nyní řekli, můžeme si uvědomit, že vyjmenované situace odpovídají logické spojce *nebo*. Výsledná negace tedy bude znít „Nepůjde tam Petr nebo Pavel“.

g) Výrok „Dám si maso nebo zeleninu“ nám říká, že nastane jedna ze tří možností (uvědomme si, že se jedná o slučovací nebo). Buď si dám jenom maso, nebo si dám jenom zeleninu, nebo si dám maso i zeleninu. A kdy toto není pravda? Pouze v případě, že si nedám ani jednu ze zmíněných potravin. Výsledná negace tedy bude znít „Nedám si maso ani zeleninu“.

h) Snad největší problém bývá s negacemi výroků, v nichž je obsažena logická spojka *implikace*. Nejčastější odpovědí bývá tvrzení „Jestli neudělám včas úkoly, nepůjdu do kina“. Bohužel ani v tomto případě není nejčastější odpověď správná. I při tvorbě negace výroku „Jestli včas udělám úkoly, půjdu do kina“ si nejdříve musíme uvědomit, co zmíněný výrok znamená. Tvrzení nám říká, co se stane, pokud udělám včas úkoly. Ovšem neříká nic o tom, co bude, pokud úkoly včas neudělám. A kdy zmíněné tvrzení není pravda? Kdy mě někdo může osočit, že lžu? Pouze v případě, že udělám úkoly včas, a přesto do kina nepůjdu. Výsledná negace bude tedy znít „Udělám úkoly včas a nepůjdu do kina“.

i) Pokud se pozorně podíváme na výrok „Přestanu kouřit, přestaneš-li ty“, objevíme, že se opět jedná o implikaci. Pokud nemáme s tvorbou negací dostatečnou zkušenost, je dobré si větu upravit do klasického pořadí implikace, a to následovně „Jestli přestaneš kouřit, potom přestanu i já“. A nyní použijeme podobný postup jako v předchozím příkladu. Kdy mne někdo může osočit ze lži? Pouze v případě, že tys přestal kouřit a já ne. Výsledná negace bude znít „ Přestaneš kouřit a já nepřestanu“.

j) Výrok „Udělám dobře zkoušku právě tehdy, pokud se budu pilně učit“ je ekvivalencí výroků „Udělám dobře zkoušku“ a „Budu se pilně učit“. To znamená, že buď se budu pilně učit a udělám dobře zkoušku, nebo se nebudu pilně učit a zkoušku neudělám. A kdy toto není pravda? Pouze tehdy, pokud jsem se dobře učil, a přesto zkoušku neudělal, nebo v případě, že jsem se neučil, a přesto jsem zkoušku udělal. Výsledná negace bude znít „Buď se budu učit a zkoušku neudělám nebo se učit nebudu a zkoušku udělám".

Definice 1.1.6. Pravdivostní hodnota
Pravdivému výroku přiřazujeme *pravdivostní hodnotu* 1. Nepravdivému výroku přiřazujeme p*ravdivostní hodnotu* 0.

Výrok „Peří je lehčí než olovo" je zcela jistě pravdivý, proto mu přiřadíme pravdivostní hodnotu 1.
Výrok „Tráva může mít růžovou barvu" pravdivý není, proto bude mít pravdivostní hodnotu 0.
Výrok „Dva krát tři je šest" pravdivý je, přiřadíme mu pravdivostní hodnotu 1.
Výrok „Osm plus čtyři je deset" není pravdivý, bude mít pravdivostní hodnotu 0.

Příklad 1.3

1.3. Určete pravdivostní hodnotu následujících výroků.

a) „Karel IV. se narodil ve 14. století."

b) „Největší společný násobek čísel 4 a 6 je číslo 12."

c) „Největší společný dělitel čísel 4 a 6 je číslo 2."

d) „Pětka je nejmenší prvočíslo."

e) „Kakadu je papoušek."

f) „$15 + 28 = 43$"

Řešení:

a) Karel IV. se narodil v roce 1316, což je 14. století, jedná se o pravdivý výrok, přiřadíme mu pravdivostní hodnotu 1.

b) Číslo 12 je nejmenším společným násobkem čísel 4 a 6, nikoliv největším. Jedná se o nepravdivý výrok, jemuž přiřadíme pravdivostní hodnotu 0.

c) Rozklad obou čísel na prvočinitele je $4 = 2 \cdot 2$ a $6 = 2 \cdot 3$. Z těchto rozkladů určíme největšího společného dělitele. V obou rozkadech společně se vyskytuje pouze dvojka, největším společným dělitelem obou čísel je tedy číslo 2. Jedná se proto o pravdivý výrok, kterému přiřadíme pravdivostní hodnotu 1.

d) Číslo 5 je sice prvočíslo, ale nikoliv nejmenší. Jedná se tedy o nepravdivý výrok s pravdivostní hodnotou 0.

e) Kakadu opravdu patří mezi papoušky. Tomuto pravdivému výroku přiřadíme pravdivostní hodnotu 1.

f) Uvedený součet je správný, pravdivostní hodnota tohoto výroku bude 1.

Pravdivostní hodnoty složených výroků

Pravdivostní hodnoty složených výroků (tedy výroků, které vznikly z jiných výroků za použití logických spojek) můžeme zjistit na základě Tabulky 1.1. V prvních dvou sloupcích tabulky jsou vypsány všechny možné kombinace pravdivostních hodnot dvou výroků p a q. V dalších sloupcích jsou pak vypsány pravdivostní hodnoty složených výroků vzniklých z výroků p a q použitím jednotlivých logických spojek pro jednotlivé kombinace pravdivostních hodnot.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

V logice se můžeme setkat s pojmem výroková proměnná. Pod tímto pojmem rozumíme proměnnou zastupující libovolný výrok. Budeme ji značit velkým písmenem, např. A, B.

Definice 1.1.7. Výroková proměnná
Výroková proměnná je taková proměnná, která může nabývat hodnot *pravda*, anebo *nepravda*. Výrokové proměnné jsou takové proměnné, za něž je možno dosazovat výroky.

Dalším pojmem vyskytujícím se v logice je pojem formule. Zjednodušeně lze říci, že atomickým a složeným výrokům dohromady říkáme *formule*. Formálně můžeme zapsat následovně:

Definice 1.1.8. Formule

1. Každá výroková proměnná je formule.
2. Pokud jsou A i B formule, pak i $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Longrightarrow B$ a $A \Longleftrightarrow B$ jsou formule.

Definice dává smysl, neboť v prvním bodě říkáme, že každý atomický výrok je zároveň formule. Takže máme-li dva atomické výroky, například „Na ulici jsou kaluže“ a „Prší“, pak máme zároveň i dvě formule. V tuto chvíli můžeme aplikovat druhý bod a sestavit složitější formuli třeba takto:

- „Neprší.“ ... $\neg A$
- „Na ulici jsou kaluže a zároveň prší.“ ... $A \wedge B$
- „Na ulici jsou kaluže nebo prší.“ ... $A \vee B$
- „Jestliže jsou na ulici kaluže, pak prší.“ ... $A \Longrightarrow B$
- „Na ulici jsou kaluže právě tehdy, když prší.“ ... $A \Longleftrightarrow B$

Při zápisu tvorby složitějších formulí musíme někdy využít závorek. Ty by nám měly pomoci v jednoznačném pochopení zápisu. Není ovšem příliš vhodné závorkami „plýtvat“. Například zápis výrokové formule $A \wedge (\neg B)$ můžeme zjednodušeně psát bez závorek $A \wedge \neg B$, neboť zasvěcené osobě je jasné, že nejdříve je nutno znegovat B a až poté jej může spojit spojkou $\wedge$ s A.

1.4. Předpokládejme, že A, B, C a D jsou výrokové formule. Které z následujících výrazů představují syntakticky správný zápis formulí? **Příklad 1.4**

a) $A \wedge (B \Longrightarrow C)$

b) $A \vee (B \wedge \neg C)$

c) $A \Longrightarrow \wedge B$

d) $(A \wedge (B \Longrightarrow (C \vee D))) \Longrightarrow \neg C$

e) $(A \Longrightarrow (B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$

f) $A \Longrightarrow (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$

Řešení:

a) Závorky nám říkají, že nejdříve musíme vyhodnotit výraz $(B \Longrightarrow C)$. Jestliže B i C jsou formule, pak dle druhého bodu definice formule je výraz $(B \Longrightarrow C)$ také formulí. Nyní opět aplikací druhého bodu definice na formule A a $(B \Longrightarrow C)$ ověříme, že $A \wedge (B \Longrightarrow C)$ je výroková formule (syntakticky správně zapsaná).

b) Vidíme, že uvnitř závorky jsou pomocí spojky $\wedge$ spojeny části výrazu B a $\neg C$. Víme, že *B* i *C* jsou formule, proto i $\neg C$ je formule (viz druhý bod definice) a můžeme aplikovat druhý bod definice formule. Proto i $(B \wedge \neg C)$ je formule. Tato formule je pomocí spojky $\vee$ připojena k A, což dle předpokladu je také formule. Proto celý kontrolovaný výraz $A \vee (B \wedge \neg C)$ je syntakticky správně zapsanou výrokovou formulí.

c) Ve výrazu $A \Longrightarrow \wedge B$ jsou formule *A* a *B* spojeny pomocí $\Longrightarrow \wedge$, což neodpovídá definici formule. Proto výraz $A \Longrightarrow \wedge B$ není syntakticky správně zapsanou výrokovou formulí.

d) Výraz $(A \wedge (B \Longrightarrow (C \vee D))) \Longrightarrow \neg C$ je již poněkud složitější, proto musíme být opatrní a pozorní při určování pořadí, ve kterém máme jednotlivé části výrazu vyhodnocovat. Musíme se striktně držet závorek. V nejvnitřnějších závorkách jsou dvě formule *C* a *D* spojeny spojkou $\vee$, což odpovídá druhému bodu definice, proto je výraz $(C \vee D)$ formulí. Tato formule je pomocí spojky $\Longrightarrow$ připojena k formuli *B* (a výsledek je opět uzavřen v závorkách). To znamená, že i výraz $(B \Longrightarrow (C \vee D)))$ je formule. Tato je pomocí spojky $\wedge$ připojena k formuli *A*, což opět odpovídá druhému bodu definice. Tím jsme ověřili, že celý výraz $(A \wedge (B \Longrightarrow (C \vee D)))$ je formulí. Tato formule je pomocí spojky $\Longrightarrow$ spojena s výrazem $\neg C$, což je také formule (což jsme ověřili již v bodu b)). Proto celý výraz $(A \wedge (B \Longrightarrow (C \vee D))) \Longrightarrow \neg C$ je syntakticky správně zapsanou výrokovou formulí.

e) Výraz $(A \Longrightarrow (B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$ je opět poněkud složitější, opět si musíme dát pozor na závorky. Nejdříve vyhodnotíme výraz $(B \vee C)$, který je spojením formulí *B* a *C* pomocí spojky $\vee$, čili se jedná o formuli. Tato formule je pomocí spojky $\Longrightarrow$ připojena k formuli *A*, a proto i výraz $(A \Longrightarrow (B \vee C))$ je formulí. Nyní vyhodnotíme pravou část výrazu, a to $(A \wedge \neg B)$. Vidíme zde spojení formule *A* s formulí vzniklou jako negace formule *B*. Jedná se tedy opět o formuli. Výsledný výraz $(A \Longrightarrow (B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$ je spojením dvou formulí $(A \Longrightarrow (B \vee C))$ a $(A \wedge \neg B)$ pomocí logické spojky $\Longleftrightarrow$. Jedná se tedy o výrokovou formuli.

f) Výraz $A \Longrightarrow (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$ je na první pohled velmi podobný výrazu $(A \Longrightarrow (B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$ z předchozího příkladu. Liší se „jen“ jednou dvojicí závorek. Nepřítomnost těchto závorek je ovšem dost zásadní. Ve výrazu $A \Longrightarrow (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$ bohužel nelze rozhodnout, jestli nejdříve máme provést část $A \Longrightarrow (B \vee C)$ a poté celý výraz, nebo máme nejprve vyhodnotit část $(B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$ a pak celý výraz $A \Longrightarrow (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$.

Jaká bude pravdivostní hodnota jednotlivých výsledných formulí? To záleží na situaci, na konkrétním okamžitém stavu počasí a ulice, čili na pravdivostních hodnotách obou jednotlivých dílčích formulí. Například může nastat situace, kdy venku prší, ale na ulici nejsou kaluže. To znamená, že pravdivostní hodnota formule *A* „Na ulici jsou kaluže“ je 0 a pravdivostní hodnota formule *B* „Prší“ je 1. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot složených výroků pak můžeme zjistit, že:

- „Neprší“ tj. $\neg B$, má pravdivostní hodnotu 0.
- „Na ulici jsou kaluže a zároveň prší“ tj. $A \wedge B$, má pravdivostní hodnotu 0.
- „Na ulici jsou kaluže nebo prší“ tj. $A \vee B$, má pravdivostní hodnotu 1.

- „Jestliže jsou na ulici kaluže, pak prší“ tj. $A \implies B$, má pravdivostní hodnotu 1.
- „Na ulici jsou kaluže právě tehdy, když prší“ tj. $A \iff B$, má pravdivostní hodnotu 0.

Asi největší problém mají lidé s vyhodnocením pravdivostní hodnoty implikace, tedy v našem příkladu případ „Jestliže jsou na ulici kaluže, pak prší“. V tomto případě si musíme dobře promyslet, co ve skutečnosti nastává a jak je to s pravdivostí dané situace.

Většina lidí má spojeny mokré ulice s deštěm, a proto mají pocit, že tvrzení „Jestliže jsou na ulici kaluže, pak prší“ je **vždy** pravdivé. Ale neuvědomují si, že mohl před chvílí ulicí projet kropicí vůz. Tedy skutečnost, že jsou mokré ulice nutně nemusí být následkem deště.

Ještě větší problém bývá s vytvořením negace formule „Jestliže jsou na ulici kaluže, pak prší“. Nejčastější odpovědí bývá tvrzení „Jestliže nejsou na ulici kaluže, pak neprší“ či „Jestliže neprší, pak nejsou na ulici kaluže“.

Musíme si ale uvědomit, co vlastně negace je. Negace znamená, že původní tvrzení neplatí, že není pravdivé. Kdy tedy můžeme říci, že tvrzení „Jestliže jsou na ulici kaluže, pak prší“ není pravda? Jedině v případě, že na ulici jsou kaluže a přitom neprší. Tedy nastala například situace výše popsaná, že ulicí projel kropicí vůz. Hledanou negací tedy bude tvrzení „Na ulici jsou kaluže a (současně) neprší“ tj. $A \wedge \neg B$.

1.5. Zjistěte pravdivostní ohodnocení výrokových formulí. **Příklad 1.5**

a) $A \wedge (B \implies \neg A)$

b) $A \wedge (B \implies C)$

c) $(A \vee \neg B) \iff (\neg A \wedge B)$

Řešení:

a) Ke zjištění pravdivostní hodnoty výsledné formule vytvoříme tzv. tabulku pravdivostních hodnot. Tato tabulka bude mít tolik řádků, kolik je různých kombinací pravdivostních hodnot všech dílčích formulí. V našem případě máme dvě dílčí formule - *A* a *B*, a proto budeme mít čtyři řádky (počet řádků vypočítáme jako počet kombinací s opakováním druhé třídy ze dvou $2^2 = 4$ - viz kapitola o kombinatorice).

A	B	$\neg A$	$B \implies \neg A$	$A \wedge (B \implies \neg A)$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Z tabulky můžeme vyčíst výsledné pravdivostní hodnoty výrokové formule v závislosti na pravdivostních hodnotách obou dílčích formulí. Vidíme, že pouze v jediném případě je výsledná formule pravdivá, a to v případě, že výroková formule *A* je pravdivá a výroková formule *B* není. V ostatních případech výsledná formule pravdivá není.

b) I ve druhém případě vytvoříme pravdivostní tabulku. Sledovaná výroková formule obsahuje tři dílčí formule, a to *A*, *B* a *C*. Počet řádků tedy vypočítáme jako $2^3 = 8$.

A	B	C	$B \Longrightarrow C$	$A \wedge (B \Longrightarrow C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

Z tabulky můžeme vyčíst výsledné pravdivostní hodnoty výrokové formule v závislosti na pravdivostních hodnotách všech tří dílčích formulí. Vidíme, že výsledná formule je pravdivá v případě, že výroková formule A je pravdivá a dále platí, že buď jsou formule B i C obě pravdivé, nebo formule B pravdivá není a na pravdivosti formule C nezáleží - tj. může a nemusí být pravdivá. V ostatních případech výsledná formule pravdivá není.

c) V tomto případě máme opět pouze dvě dílčí formule. Proto bude mít pravdivostní tabulka čtyři řádky.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \vee \neg B) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge B)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0

Z tabulky můžeme opět vyčíst výsledné pravdivostní hodnoty výrokové formule v závislosti na pravdivostních hodnotách obou dílčích formulí. Vidíme, že výsledná formule není pravdivá v žádném případě.

Ve výrokové logice se ještě můžeme setkat s pojmem výroková forma, který může být nesprávně zaměňován s pojmem výroková formule.

Definice 1.1.9. *Výroková forma* je tvrzení obsahující proměnné, toto tvrzení se po dosazení přípustných konstant za proměnné stává výrokem.

Příkladem výrokové formy může být tvrzení „Číslo x je sudé“. Pokud za x dosadíme konkrétní hodnotu, můžeme rozhodnout, zda je tvrzení pravdivé, či nikoliv. Například zvolíme-li za x číslo 3, pak tvrzení pravdivé nebude, naopak zvolíme-li za x hodnotu 28, tvrzení pravdivé bude. Tedy dosazením konkrétních hodnot (tj. konstant) za proměnnou x obdržíme oznamovací větu, u níž jsme schopni rozhodnout o její pravdivosti, neboli obdržíme výrok. Tvrzení „Číslo x je sudé“ tedy splňuje definici výrokové formy.

Další důležitou skupinou výroků jsou tzv. kvantifikované výroky. *Kvantifikované výroky* jsou výroky, ve kterých jsou proměnné kvantifikovány. Tj. nějakým způsobem je udáno kvantum (množství, počet) objektů, pro které se z výrokové formy stane výrok. Toto kvantum určujeme pomocí tzv. kvantifikátorů. Pokud je ve výroku pro nějakou proměnnou určeno kvantum pomocí nějakého kvantifikátoru, říkáme, že tato *proměnná je kvantifikátorem vázána*. Používáme dva typy kvantifikátorů.

Definice 1.1.10. *Obecný (velký) kvantifikátor* - značíme symbolem $\forall$ - pro každý objekt platí, že ...
Existenční (malý) kvantifikátor - značíme symbolem $\exists$ - existuje takový objekt, pro který platí, že ...

Zápis výroků s kvantifikátory provádíme následujícím způsobem (za příslušným zápisem vždy přinášíme slovní překlad).

$$\forall (x \in \mathbb{N}) : x > 0$$

Slovy znamená „Pro všechna přirozená čísla x platí, že jsou větší než 0.“

$$\exists (x \in \mathbb{N}) : x > 0$$

Slovy znamená „Existuje přirozené číslo x, které je větší než 0.“

$$\forall (x \in \mathbb{N}, x > 1)\ \exists (y \in \mathbb{N}) : y < x$$

Slovy znamená „Pro všechna přirozená čísla x větší než 1 existuje přirozené číslo y, které je menší než x.“

Výrok obsahující proměnnou vázanou obecným kvantifikátorem je pravdivý pouze tehdy, pokud vždy, dosadíme-li za danou proměnnou libovolnou hodnotu, jíž může proměnná nabývat, obdržíme pravdivý výrok.

Výrok obsahující proměnnou vázanou existenčním kvantifikátorem je pravdivý, pouze pokud existuje alespoň jedna přípustná hodnota, jejímž dosazením za danou proměnnou obdržíme pravdivý výrok.

1.6. Výroky v matematickém zápisu převeďte do slovního vyjádření. Určete pravdivostní hodnotu výroku. **Příklad 1.6**

a) $\forall (x \in \mathbb{R}) : x + 0 = x$

b) $\forall (x \in \mathbb{R}) : x + 1 = x$

c) $\exists (x \in \mathbb{R}) : x + 0 = x$

d) $\forall (x \in \mathbb{R})\, \forall (y \in \mathbb{R}) : x + y = y + x$

e) $\forall (x \in \mathbb{R})\, \exists (y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$

f) $\exists (x \in \mathbb{R})\, \forall (y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$

Řešení:

a) Výraz $\forall (x \in \mathbb{R}) : x + 0 = x$ lze slovy vyjádřit například následovně „Pro všechna reálná čísla x platí, že přičteme-li k danému číslu nulu, číslo se nezmění“. Jedná se zjevně o pravdivý výrok.

b) Výraz $\forall (x \in \mathbb{R}) : x + 1 = x$ lze slovy vyjádřit „Pro každé reálné číslo x platí, že přičteme-li k danému číslu jedničku, číslo se nezmění“. V tomto případě nás nesmí zarazit, že tato věta není pravdivá. Jedná se totiž o výrok, který je nepravdivý. To nemění nic na faktu, že se jedná o správně zapsaný výrok.

c) Výraz $\exists (x \in \mathbb{R}) : x + 0 = x$ můžeme slovy vyjádřit takto „Existuje reálné číslo x takové, že přičteme-li k němu nulu, jeho hodmota se nezmění“. Jestliže jsme si v příkladu a) uvědomili, že pro všechna reálná čísla platí zmíněná vlastnost, pak jistě existuje alespoň jedno takové reálné číslo. Jedná se tedy o pravdivý výrok.

d) Výraz $\forall (x \in \mathbb{R}) \forall (y \in \mathbb{R}) : x + y = y + x$ můžeme slovy vyjádřit následovně „Pro všechna reálná čísla x a y platí, že součet čísel x a y má stejnou hodnotu, jako součet čísel y a x“. Tento výrok popisuje známou vlastnost sčítání, a to komutativitu (tj. na pořadí sčítanců nezáleží). Jedná se tedy opět o pravdivý výrok.

e) Výraz $\forall (x \in \mathbb{R}) \exists (y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$ slovy znamená „Pro všechna reálná čísla x existuje alespoň jedno reálné číslo y takové, že součet čísel x a y má hodnotu 10“. Pro libovolné číslo x můžeme vypočítat číslo y dle vzorce $y = 10 - x$. Tento rozdíl jistě existuje pro libovolné číslo x. Jedná se tedy o pravdivý výrok.

f) Výraz $\exists(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$ slovy znamená „Existuje reálné číslo x takové, že pro všechna reálná čísla platí, že součet čísel x a y má hodnotu 10“. Tento výrok vypadá velmi podobně, jako výrok v předchozím případě. Ale jak je to s jeho pravdivostní hodnotou? Co přesně uvedený výrok znamená? Hledáme v něm alespoň jedno takové číslo x, že přičteme-li jej k jakémukoliv reálnému číslu y, pak dostaneme číslo 10. A takovéto číslo zjevně neexistuje. Proto se jedná o výrok, který je nepravdivý.

Negace kvantifikovaných výroků

Co to je negace, jsme si již řekli dříve. Při tvorbě negace si vždy nejdříve musíme uvědomit, za jakých podmínek výrok platí a kdy naopak neplatí. Tímto způsobem samozřejmě postupujeme i v případě kvantifikovaných výroků. Přesto je tvorba negací kvantifikovaných výroků obtížnější než u jiných výroků.

Příkladem může být například negace výroků „Všichni studenti složí úspěšně zkoušku“ (výrok s obecným kvantifikátorem), či „Existuje student, který se narodil v Praze“ (výrok s existenčním kvantifikátorem).

Nejprve se budeme zabývat obecným kvantifikátorem. Obecný kvantifikátor nám říká, že nějaká vlastnost platí pro všechny objekty (např. všechny hodnoty proměnné). A jak vytvoříme negaci? Uvědomme si, kdy toto neplatí. K tomu stačí, abychom nalezli i jediný objekt (jedinou hodnotu proměnné), pro který daná vlastnost neplatí.

Při tvoření negace konkrétního výroku můžeme například využít následující pomůcku, můžeme si pomoci následující otázkou. Kdy můžeme říci, že někdo lže, když řekne „Všichni studenti složí úspěšně zkoušku“? Odpověď není těžká, zní „Aspoň jeden student zkoušku úspěšně nesložil“.

Pro formální zápis označme zmíněnou vlastnost týkající se objektů x jako $V(x)$. Pak kvantifikovaný výrok s obecným kvantifikátorem můžeme zapsat jako $\forall x : V(x)$ a kvantifikovaný výrok obsahující existenční kvantifikátor jako $\exists x : V(x)$.

Negaci výroku s obecným kvantifikátorem vytvoříme následovně:

$$\neg[\forall x : V(x)] \quad \text{lze vyjádřit jako} \quad \exists x : \neg V(x).$$

Nyní se budeme zabývat existenčním kvantifikátorem. Existenční kvantifikátor nám říká, že nějaká vlastnost platí pro alespoň jeden objekt (např. alespoň jednu hodnotu proměnné). A jak vytvoříme negaci? Uvědomme si, kdy toto neplatí. K tomu musí nastat situace, kdy sledovaná vlastnost neplatí pro žádný objekt (žádnou hodnotu proměnné).

Při tvoření negace konkrétního výroku můžeme například využít následující pomůcku, můžeme si opět pomoci následující otázkou. Kdy můžeme říci, že někdo lže, když řekne „Existuje student, který se narodil v Praze“? Odpověď není těžká, zní „Žádný student se nenarodil v Praze“, neboli „Všichni studenti se narodili mimo Prahu“.

Pro formální zápis označme opět zmíněnou vlastnost týkající se objektů x jako $V(x)$. Pak výrok s obecným kvantifikátorem můžeme zapsat jako $\forall x : V(x)$ a kvantifikovaný výrok obsahující existenční kvantifikátor jako $\exists x : V(x)$.

Negaci výroku s existenčním kvantifikátorem vytvoříme následovně:

$$\neg[\exists x : V(x)] \quad \text{lze vyjádřit jako} \quad \forall x : \neg V(x).$$

Příklad 1.7

1.7. Vyjádřete negace následujících kvantifikovaných výroků.

a) $\forall(x \in \mathbb{R}) : x + 0 = x$

b) $\exists(x \in \mathbb{R}) : x + 1 = x$

c) $\forall(x \in \mathbb{R})\ \forall(y \in \mathbb{R}) : x + y = y + x$

d) $\forall(x \in \mathbb{R})\ \exists(y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$

e) $\exists(x \in \mathbb{R})\ \forall(y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$

f) „Pro každé přirozené číslo *x* platí, že je násobkem čtyř.“

g) „Existuje přirozené číslo *x* takové, že je dělitelné čtyřmi.“

Řešení:

a) Při tvorbě negace výroku $\forall(x \in \mathbb{R}) : x + 0 = x$ se budeme řídit předloženým návodem. Kde sledovanou vlastností $V(x)$ je $x + 0 = x$. Nejprve vytvoříme negaci výroku (tj. naší sledované vlastnosti).

$$\neg(x + 0 = x) \quad \text{můžeme zapsat jako} \quad x + 0 \neq x$$

Pak už můžeme psát výslednou negaci jako $\exists(x \in \mathbb{R}) : x + 0 \neq x$.

b) Při tvorbě negace výroku $\exists(x \in R) : x+1 = x$ nejprve vytvoříme negaci výroku (tj. naší sledované vlastnosti).

$$\neg(x + 1 = x) \quad \text{můžeme zapsat jako} \quad x + 1 \neq x$$

Pak už můžeme psát výslednou negaci jako $\forall(x \in \mathbb{R}) : x + 1 \neq x$.

c) Při negování výroků, kde se vyskytuje více kvantifikátorů, musíme postupovat opatrně a postupně. Při tvorbě negace výroku $\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R}) : x+y = y+x$ nejprve vytvoříme negaci výroku (tj. naší sledované vlastnosti)

$$\neg\forall(y \in \mathbb{R}) : x + y = y + x$$
$$\text{můžeme zapsat jako}$$
$$\exists(y \in \mathbb{R}) : \neg(x + y = y + x),$$

a tu můžeme zapsat jako $\exists(y \in \mathbb{R}) : x + y \neq y + x$. Pak už můžeme psát výslednou negaci jako $\exists(x \in \mathbb{R})\ \exists(y \in \mathbb{R}) : x + y \neq y + x$.

d) Při tvorbě negace výroku $\forall(x \in \mathbb{R})\exists(y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$ nejprve vytvoříme negaci výroku (tj. naší sledované vlastnosti)

$$\neg\exists(y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$$
$$\text{můžeme zapsat jako}$$
$$\forall(y \in \mathbb{R}) : \neg(x + y = 10),$$

a tu můžeme zapsat jako $\forall(y \in \mathbb{R}) : x + y \neq 10$. Pak už můžeme psát výslednou negaci jako $\exists(x \in \mathbb{R})\ \forall(y \in \mathbb{R}) : x + y \neq 10$.

e) Při tvorbě negace výroku $\exists(x \in \mathbb{R})\ \forall(y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$ nejprve vytvoříme negaci výroku (tj. naší sledované vlastnosti)

$$\neg\forall(y \in \mathbb{R}) : x + y = 10$$
$$\text{můžeme zapsat jako}$$
$$\forall(y \in \mathbb{R}) : \neg(x + y = 10),$$

a tu můžeme zapsat jako $\exists(y \in \mathbb{R}) : x + y \neq 10$. Pak už můžeme psát výslednou negaci jako $\forall(x \in \mathbb{R})\ \exists(y \in \mathbb{R}) : x + y \neq 10$.

f) Následující výrok je vyjádřen slovy. Postup ale bude velmi podobný. Při tvorbě negace výroku: „Pro každé přirozené číslo *x* platí, že je násobkem čtyř.“ nejprve vytvoříme negaci výroku (tj. naší sledované vlastnosti): „Číslo *x* je násobkem čtyř.“ Tato negace zní: „Číslo *x* není násobkem čtyř.“ Pak už můžeme psát výslednou negaci jako: „Existuje přirozené číslo *x*, které není násobkem čtyř.“

g) Při negování výroku: „Existuje přirozené číslo x takové, že je dělitelné čtyřmi.“ nejprve vytvoříme negaci výroku (tj. naší sledované vlastnosti): „Číslo x je dělitelné čtyřmi.“ Tato negace zní: „Číslo x není dělitelné čtyřmi.“ Pak už můžeme psát výslednou negaci jako: „Pro všechna přirozená čísla x platí, že nejsou dělitelná čtyřmi.“ V češtině však máme i lepší vyjádření této skutečnosti, a to: „Žádné přirozené číslo x není dělitelné čtyřmi.“

Definice 1.1.11. Tautologie
Tautologie je formule, která je pro libovolné ohodnocení svých výrokových proměnných pravdivá.

Příklad 1.8

1.8. Zjistěte, které z následujících formulí jsou tautologie.

a) $A \vee \neg A$

b) $A \vee (B \Longrightarrow A)$

c) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$

d) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

e) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

f) $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

g) $\neg(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$

h) $\neg(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \Longrightarrow \neg B)$

Řešení:

a) Pro zjištění, jestli je daná formule tautologií, je nejlépe vytvořit pravdivostní tabulku. Sledovaná formule bude tautologií, pokud budou ve výsledném sloupci pravdivostní tabulky samé jedničky, neboli pro každou kombinaci pravdivostních hodnot jednotlivých dílčích formulí bude výsledná formule pravdivá.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
1	0	1
0	1	1

V posledním sloupci jsou samé jedničky, proto je formule $A \vee \neg A$ tautologií.

b) Opět vytvoříme pravdivostní tabulku.

A	B	$B \Longrightarrow A$	$A \vee (B \Longrightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

Vidíme, že v posledním sloupci se v jednom řádku vyskytuje 0. Proto existuje kombinace pravdivostních hodnot dílčích formulí, pro kterou není výsledná formule pravdivá. Formule $A \vee (B \Longrightarrow A)$ není tautologií.

c) Nejprve vytvoříme pravdivostní tabulku.

A	B	$B \Longrightarrow A$	$A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

V posledním sloupci jsou samé jedničky, proto je formule $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$ tautologií.

d) Označme $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$ jako formuli C. Pravdivostní tabulka má následující tvar.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	C
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

V posledním sloupci jsou samé jedničky. Formule $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$ je tautologií.

e) Označme $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ jako formuli C. Pravdivostní tabulka má následující tvar.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \vee \neg B$	C
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1

V posledním sloupci nejsou samé jedničky. Formule $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ není tautologií.

f) Označme $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ jako formuli C. Pravdivostní tabulka má následující tvar.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	C
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

V posledním sloupci jsou samé jedničky. Formule $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ je tautologií.

g) Označme $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B)$ jako formuli C. Pravdivostní tabulka má následující tvar.

A	B	$\neg B$	$A \implies B$	$\neg(A \implies B)$	$A \wedge \neg B$	C
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

V posledním sloupci jsou samé jedničky. Formule $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B)$ je tautologií.

h) Označme $\neg(A \implies B) \iff (\neg A \implies \neg B)$ jako formuli C. Pravdivostní tabulka má následující tvar.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \implies B$	$\neg(A \implies B)$	$\neg A \implies \neg B$	C
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0

Formule $\neg(A \implies B) \iff (\neg A \implies \neg B)$ není pravdivá při některých kombinacích pravdivostních hodnot dílčích formulí, proto není tautologií.

Všimněme si příkladů g) a h). V prvním případě se jedná o důkaz správnosti negace implikace tak, jak jsme si ji uvedli dříve. V druhém případě se jedná o důkaz chybnosti mezi lidmi často používané negace implikace.

Některé z tautologií jsou všeobecně známé a mají svá pojmenování. V předchozím příkladu se jedná například o následující formule.

- $A \vee \neg A$ ...*zákon vyloučení třetího*,
- $A \implies (B \implies A)$ ...*zákon simplifikace*,
- $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$,
  $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$ ...*De Morganovy zákony*.

Například De Morganovy zákony nám vypovídají o negaci konjunkce a disjunkce. Z dalších známých tautologií můžeme uvést například následující formule.

- $A \wedge \neg A$ ...*zákon sporu*
- $A \implies A$ ...*zákon totožnosti*
- $A \iff \neg(\neg A))$ ...*zákon dvojí negace*
- $(A \wedge \neg A) \implies B$ ...*zákon Dunse Scota*

Můžeme ještě uvést několik tautologií predikátové logiky. Zjednodušeně řečeno, tautologií obsahující kvantifikátory.

De Morganovy zákony pro kvantifikátory

- $\neg(\forall x : V(x)) \iff \exists x : \neg V(x)$
- $\forall x : \neg V(x) \iff \neg(\exists x : V(x))$
- $\forall x : V(x) \iff \neg(\exists x : \neg V(x))$
- $\neg(\forall x : \neg V(x)) \iff \exists x : V(x)$

Dalšímy tautologiemi predikátové logiky jsou zákony distributivity kvantifikátorů, které nám říkají, jak můžeme správně „rozepsat“ oba kvantifikátory.

Zákony distributivity kvantifikátorů

- $\forall x : (V(x) \wedge W(x)) \iff (\forall x : V(x) \wedge \forall x : W(x))$
- $\exists x : (V(x) \vee W(x)) \iff (\exists x : V(x) \vee \exists x : W(x))$
- $(\forall x : V(x) \vee \forall x : W(x)) \implies \forall x : (V(x) \vee W(x))$ ... *ale ne naopak!*
- $(\exists x : V(x) \wedge \exists x : W(x)) \implies \exists x : (V(x) \wedge W(x))$ ... *ale ne naopak!*

V posledním přehledovém seznamu si můžeme uvést ještě několik dalších tautologií predikátové logiky.

Zákony komutace kvantifikátorů

- $\forall x\,\forall y : V(x,y) \iff \forall y\,\forall x : V(x,y)$
- $\exists x\,\exists y : V(x,y) \iff \exists y\,\exists x : V(x,y)$
- $\exists x\,\forall y : V(x,y) \implies \forall y\,\exists x : V(x,y) \ldots$ *ale ne naopak!*

Definice 1.1.12. Kontradikce
Kontradikce je formule, která není pro žádné ohodnocení svých výrokových proměnných pravdivá.

1.9. Zjistěte, které z následujících formulí jsou kontradikce. **Příklad 1.9**

a) $A \wedge \neg A$

b) $A \wedge (B \wedge \neg A)$

c) $A \vee (B \implies A)$

Řešení:

a) Pro zjištění, jestli je daná formule kontradikcí, je opět nejlépe vytvořit pravdivostní tabulku. Sledovaná formule bude kontradikcí, pokud budou ve výsledném sloupci pravdivostní tabulky samé nuly, neboli pro každou kombinaci pravdivostních hodnot jednotlivých dílčích formulí bude výsledná formule nepravdivá.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

V posledním sloupci tabulky jsou samé nuly, proto je formule $A \wedge \neg A$ kontradikcí.

b) Opět vytvoříme pravdivostní tabulku.

A	B	$\neg A$	$B \wedge \neg A$	$A \wedge (B \wedge \neg A)$
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

V posledním sloupci jsou samé nuly, proto je formule $A \wedge (B \wedge \neg A)$ kontradikcí.

c) Nejprve vytvoříme pravdivostní tabulku.

A	B	$B \implies A$	$A \vee (B \implies A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

Vidíme, že v posledním sloupci tabulky se vyskytují nuly i jedničky. Proto existuje kombinace pravdivostních hodnot dílčích formulí, pro kterou je výsledná formule pravdivá. Formule $A \vee (B \implies A)$ není kontradikcí.

Samozřejmě existují i formule, které nejsou ani tautologiemi ani kontradikcemi. Těm se říká *splnitelné formule*.

Definice 1.1.13. *Modelem formule* nazveme takové ohodnocení formule, v němž je daná formule pravdivá.

Pro lepší pochopení tohoto pojmu můžeme uvést následující příklad. Budeme uvažovat formuli $A \wedge (B \wedge \neg A)$ z předchozího příkladu a ukážeme, jak může vypadat její model.

Nejdříve potřebujeme sestavit pravdivostní tabulku. Tu již máme vytvořenou z předchozího příkladu, a proto můžeme rovnou určit možné modely dané formule. K tomu účelu si budeme všímat výsledného sloupce, přesněji řečeno jedniček v tomto sloupci (tj. případů, kdy je zadaná formule pravdivá). Vidíme, že v posledním sloupci jsou tři jedničky, proto bude mít naše formule tři různé modely.

1. Prvním modelem je případ, kdy je *A* i *B* pravdivé (je ohodnoceno jedničkou).

2. Druhým modelem je případ, kdy je *A* pravdivá a *B* pravdivá není.

3. Třetím modelem je případ, kdy ani *A* ani *B* nejsou pravdivé.

Pokud jsme zavedli pojem model, pak můžeme přeformulovat tři výše uvedené definice následujícím způsobem.

1. Formule je *splnitelná*, pokud má alespoň jeden model.
2. Formule je *tautologie*, pokud každé její ohodnocení je jejím modelem.
3. Formule je *kontradikce*, pokud nemá žádný model.

Dále můžeme ještě zavést pojem týkající se množiny formulí.

Definice 1.1.14. Množina formulí je *splnitelná*, pokud existuje ohodnocení, které je modelem všech těchto formulí.

Definice 1.1.15. Formule *A* výrokově *logicky vyplývá* z množiny formulí $A_1, A_2, \ldots, A_n$, značíme $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A$, jestliže *A* je pravdivá v každém modelu množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Jinak řečeno, závěr *A* logicky vyplývá z předpokladů $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pokud za všech okolností takových, že jsou pravdivé všechny předpoklady $A_1, A_2, \ldots, A_n$, je pravdivý i závěr *A*.

Příklad 1.10

1.10. Ověřte, zda tvrzení „Jestliže neskládá zkoušku, pak ještě spí“ logicky vyplývá z dvojice tvrzení „Je ve škole, nebo ještě spí“ a „Je-li ve škole, pak skládá zkoušku“.

Řešení: Nejprve převedeme všechna tři tvrzení do formálního zápisu výrokových formulí a vytvoříme pravdivostní tabulku obsahující všechny tři vzniklé formule. Označíme „Ještě spí“ symbolem *S*, „Skládá zkoušku“ symbolem *Z* a „Je ve škole“ symbolem *J*. Pak zmíněná tři tvrzení můžeme formálně zapsat následovně:

„Jestliže neskládá zkoušku, pak ještě spí“ $\ldots \neg Z \Longrightarrow S$

„Je ve škole, nebo ještě spí“ $\ldots J \vee S$

„Je-li ve škole, pak skládá zkoušku“ $\ldots J \Longrightarrow Z$

a vytvoříme pravdivostní tabulku

J	S	Z	$J \vee S$	$J \implies Z$	$\neg Z \implies S$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	1	0	1
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	0	0
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Vidíme, že závěr je pravdivý ve všech čtyřech modelech předpokladů (viz řádky vyznačené tučně). To znamená, že náš závěr opravdu logicky vyplývá z našich předpokladů.

Připomeňme ovšem, že správnost úsudku ověřujeme bez empirického zkoumání „stavu světa“, tedy pouze tzv. analytickými metodami, neboť správnost úsudku je dána pouze logickou strukturou předpokladů a závěru. Mimo jiné to znamená, že (bohužel) na základě chybných předpokladů můžeme vyvodit i chybný závěr. Ověříme-li takto správnost úsudku, nedokážeme tím (empirickou) pravdivost závěru! Stačí, aby byl jeden z předpokladů chybný a můžeme pomocí platného úsudku obdržet nepravdivý závěr.

Pomocí logického vyplývání můžeme postupně vytvářet různé vědecké teorie. K tomu ovšem potřebujeme určité „stavební kameny“ teorie, tedy sadu pravdivých tvrzení, o kterých předpokládáme, že jsou pro danou oblast pravdivá.

Definice 1.1.16. Axiomy
Axiomy jsou základní vybraná pravdivá tvrzení daného sytému.

Jinými slovy axiom je tvrzení, které je za jakýchkoliv podmínek pravdivé. Tedy se předem může pokládat za platné, a proto se nedokazuje. Soustavy axiomů bývají stavebními kameny různých teorií (např. matematiky).

Jako příklad si můžeme uvést soustavu pěti geometrických axiomů, které formuloval řecký matematik EUKLEIDES (přibližně 325-265 př. n. let.) ve svém díle Základy. Pomocí těchto axiomů bylo možno logicky odvodit všechna v té době známá geometrická pravdivá tvrzení. Tyto axiomy vstoupily do historie jako *Euklidovy postuláty* a znějí následovně:

1. Máme-li dány dva body, existuje jedna přímka, která jimi prochází.
2. Konečnou přímou čáru (úsečku) můžeme prodloužit tak, že vznikne opět úsečka.
3. Je možné nakreslit kružnici s libovolným středem a poloměrem.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. K dané přímce a bodu, který na ní neleží, lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem.

Jiným příkladem mohou být tzv. *axiomy výrokové logiky*.

1. $A \implies (B \implies A)$
2. $(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
3. $(\neg A \implies \neg B) \implies (B \implies A)$

1.2 Základní pojmy teorie množin

V následující kapitole stručně shrneme přehled základních informací z teorie množin. Hlavní důraz budeme klást na znalosti potřebné v jiných kapitolách této učebnice.

Definice 1.2.1. *Množina* je přesně určený souhrn určitých objektů (prvků množiny).

Množina tedy obsahuje určité množství prvků, které může být konečné nebo nekonečné. Každý prvek se může do dané množiny započítat pouze jednou (tj. není možná duplicita prvků). Na pořadí prvků v množinách nezáleží. Množiny zapisujeme do složených závorek $\{\}$ a označujeme velkými písmeny, prvky množin označujeme malými písmeny. Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme *prázdnou množinou* a označujeme $\emptyset$.

Známými příklady množin jsou například číselné obory, tj. množina přirozených čísel ($\mathbb{N}$), množina celých čísel ($\mathbb{Z}$), množina racionálních čísel ($\mathbb{Q}$) či množina reálných čísel ($\mathbb{R}$).

Množiny můžeme zadávat dvěma způsoby, a to výčtem prvků množiny nebo charakteristikou vlastností množiny. Často můžeme danou množinu popsat oběma způsoby, někdy jeden ze způsobů není možný nebo je velmi nepřehledný či nepřesný. Například výčtem přesně nepopíšeme žádnou nekonečnou množinu, naopak náhodně vybraných pět přirozených čísel těžko popíšeme nějakými společnými jednoznačnými vlastnostmi.

Ukázka jednotlivých možností zápisu množin

- Množinu všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ nelze vypsat výčtem prvků. Použijeme popis vlastností:
  $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}$, kde m je celé číslo, n je přirozené číslo$\}$
- Množina $\{1, 9, 104\}$ nelze jednoduše popsat charakteristikou vlastností.
- Množina $\{1, 2, 3\} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 3\}$

Příklad 1.11

1.11. Množiny dané výčtem popište charakteristikou vlastností.

a) $A = \{2, 3, 4, 5\}$

b) $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $C = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

Řešení:

a) Vidíme, že množina *A* obsahuje pouze přirozená čísla, dále vidíme, že čísla nabývají hodnot od 2 do 5. Charakteristikou vlastností popíšeme množinu *A* následovně

$A = \{n \in \mathbb{N} : 2 \leq n \leq 5\}$

nebo i tímto způsobem

$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 6\}$,

samozřejmě můžeme nahradit příslušnost k přirozeným číslům příslušností k číslům celým

$A = \{n \in \mathbb{Z} : 2 \leq n \leq 5\} = \{n \in \mathbb{Z} : 1 < n < 6\}$.

Všechny čtyři uvedené popisy množiny *A* jsou stejně dobré, tj. je jedno, který z nich použijeme.

b) Vidíme, že množina *B* obsahuje pouze celá čísla, dále vidíme, že čísla nabývají hodnot od -4 do 4. Charakteristikou vlastností popíšeme množinu *B* následovně

$B = \{n \in \mathbb{Z} : -4 \leq n \leq 4\}$

nebo i tímto způsobem

$B = \{n \in \mathbb{Z} : -5 < n < 5\}$,

pokud si všimneme, že dolní a horní mez jsou hodnotou stejné až na znaménko, můžeme vytvořit zápis

$B = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 4\} = \{n \in \mathbb{Z} : |n| < 5\}$.

c) Vidíme, že množina *C* obsahuje pouze přirozená čísla, dále vidíme, že čísla jsou v rozsahu od 5 do 13 a také si musíme uvědomit, že všechna čísla v uvedeném výčtu jsou lichá. Každé sudé číslo s je dělitelné dvěma, můžeme jej zapsat ve tvaru $s = 2k$, kde *k* je nějaké přirozené číslo. Liché číslo l je o jedničku větší (nebo menší), než nějaké sudé číslo, proto jej můžeme napsat ve tvaru $l = 2k+1$, popřípadě $l = 2k-1$, kde *k* je nějaké přirozené číslo. Charakteristikou vlastností popíšeme množinu *C* následovně

$$C = \{n \in \mathbb{N} : 5 \leq n \leq 13 \wedge n = 2k+1, \text{ kde } k \text{ je nějaké přirozené číslo}\},$$

obdobně možno zapsat

$$C = \{n \in \mathbb{N} : 5 \leq n \leq 13 \wedge \exists k \in N : n = 2k+1\}$$

nebo i tímto způsobem

$$C = \{n \in \mathbb{N} : 4 < n < 14 \wedge n = 2k+1, \text{ kde } k \text{ je nějaké přirozené číslo}\},$$

případně

$$\begin{aligned} C &= \{n \in \mathbb{N} : 5 \leq n \leq 13 \wedge n = 2k-1, \text{ kde } k \text{ je nějaké přirozené číslo}\} = \\ &= \{n \in \mathbb{N} : 4 < n < 14 \wedge n = 2k-1, \text{ kde } k \text{ je nějaké přirozené číslo}\}, \end{aligned}$$

samozřejmě můžeme nahradit příslušnost k přirozeným číslům příslušností k číslům celým

$$\begin{aligned} C &= \{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq n \leq 13 \wedge n = 2k+1, \text{ kde } k \text{ je nějaké celé číslo}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : 4 < n < 14 \wedge n = 2k+1, \text{ kde } k \text{ je nějaké celé číslo}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq n \leq 13 \wedge n = 2k-1, \text{ kde } k \text{ je nějaké celé číslo}\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : 4 < n < 14 \wedge n = 2k-1, \text{ kde } k \text{ je nějaké celé číslo}\}. \end{aligned}$$

V předchozích příkladech jsme si mohli všimnout, že mnohdy (ne však vždy) můžeme danou množinu popsat pomocí vlastností několika způsoby.

Příklad 1.12

1.12. Množiny dané charakteristikou vlastností popište výčtem prvků.

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} : -2 < n \leq 3\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k \wedge 2 < k \leq 5\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} : |2n| < 3\}$

Řešení:

a) Vidíme, že množina *A* obsahuje pouze celá čísla, dále vidíme, že čísla jsou v rozmezí od -1 (jsou větší než -2) do 3. Výčet prvků množiny *A* bude následující $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) Množina *B* obsahuje pouze přirozená čísla, která jsou trojnásobkem čísla menšího než 6. Výčet prvků množiny *B* bude $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

c) Prvky množiny *C* jsou pouze přirozená čísla, jejichž dvojnásobek je v absolutní hodnotě menší než 3. Tomuto popisu odpovídá pouze jedno číslo, a to jednička, proto výčet prvků množiny *C* bude $C = \{1\}$.

Definice 1.2.2. Říkáme, že množina *B* je *podmnožinou* množiny *A* právě tehdy, když každý prvek množiny *B* je i prvkem množiny *A*, značíme $B \subseteq A$. Symbolicky píšeme:

$$B \subseteq A \iff \forall x : (x \in B \Longrightarrow x \in A).$$

Řekneme, že množina *B* není podmnožinou množiny *A* právě tehdy, když existuje prvek množiny *B*, který není prvkem množiny *A*, značíme $B \nsubseteq A$. Symbolicky píšeme:

$$B \nsubseteq A \iff \exists x : (x \in B \wedge x \notin A).$$

Pro libovolnou množinu *A* platí, že $\emptyset \subseteq A$ a $A \subseteq A$. To znamená, že prázdná množina je podmnožinou libovolné množiny a že každá množina je svou podmnožinou.

Příklad 1.13

1.13. Která z následujících množin je podmnožinou množiny $M = \{2, 3, 4\}$?

a) $A = \{3\}$

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 2 \wedge n \geq 4\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{Z} : 2 \leq n < 5\}$

Řešení:

a) Vidíme, že množina *A* obsahuje jedinný prvek, a to číslo 3. To je také prvkem množiny *M*. Platí $A \subseteq M$.

b) Vidíme, že $1 \in B \wedge 1 \notin M$, číslo jedna je prvkem množiny *B* a není prvkem množiny *M*. Neplatí $B \subseteq M$.

c) Prvky množiny *C* jsou přirozená čísla, která nabývají hodnot maximálně 2 a minimálně 4. Takové číslo ale neexistuje. Množina *C* je prázdná množina a ta je podmnožinou libovolné množiny. Platí $C \subseteq M$.

d) Prvky množiny *D* jsou celá čísla, která jsou minimálně 2 a maximálně 4. Výčtem můžeme množinu *D* popsat jako $D = \{2, 3, 4\}$, čili $D = M$. Platí, že každá množina je svou podmnožinou. Platí $D \subseteq M$.

Definice 1.2.3. Říkáme, že množiny *A* a *B* *se rovnají* právě tehdy, když každý prvek množiny *B* je i prvkem množiny *A* a zároveň každý prvek množiny *A* je i prvkem množiny *B*, značíme $A = B$. Symbolicky píšeme:

$$B = A \Longleftrightarrow \forall x : (x \in B \Longleftrightarrow x \in A).$$

Řekneme, že množiny *A* a *B* se nerovnají právě tehdy, když existuje prvek množiny *B*, který není prvkem množiny *A* nebo existuje prvek množiny *A*, který není prvkem množiny *B*, značíme $A \neq B$. Symbolicky píšeme:

$$B \neq A \Longleftrightarrow ((\exists x : (x \in B \wedge x \notin A)) \vee (\exists x : (x \in A \wedge x \notin B))).$$

Příklad 1.14

1.14. Která z následujících množin je rovna množině $M = \{2, 3, 4\}$?

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} : 1 < n \leq 4\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{R} : 2 \leq n \leq 4\}$

c) $C = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

Řešení:

a) Vidíme, že množina *A* obsahuje celá čísla, která jsou v rozmezí od 2 (jsou větší než 1) do 4. Výčet prvků množiny *A* je následující $A = \{2, 3, 4\}$. Platí $A = M$.

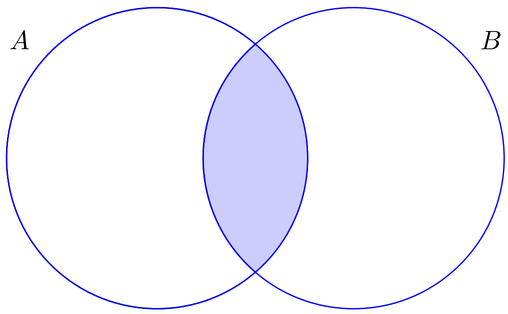
b) Množina *B* obsahuje pouze reálná čísla, která nabývají hodnot od 2 do 4. Tomuto popisu odpovídá nekonečně mnoho reálných čísel. Nekonečná a konečná množina se nemohou rovnat. Platí $B \neq M$.

c) Prvky množiny *C* jsou jednoprvkové množiny, nikoliv čísla. Množiny obsahující jiný typ prvků se nemohou rovnat. Platí $C \neq M$.

1.3 Množinové operace

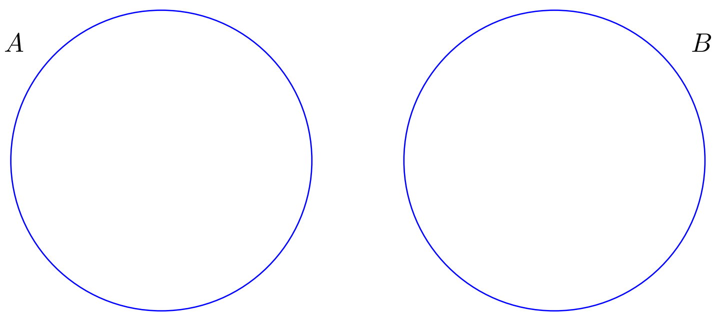
Pro představu je dobré si operace znázornit graficky pomocí tzv. Vennových diagramů.

Definice 1.3.1. *Průnik množin* A a B je množina všech prvků, které patří do množiny A a zároveň do množiny B. Značíme $A \cap B$, graficky znázorněno na Obrázku 1.1. Symbolicky píšeme: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



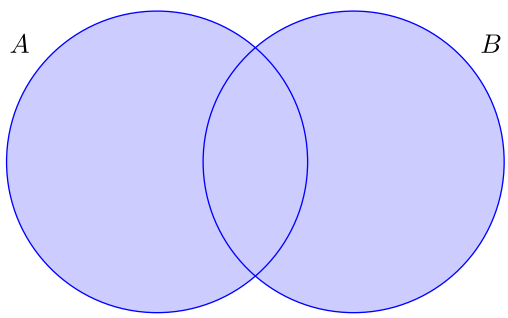
Obrázek 1.1: Průnik množin A a B

Definice 1.3.2. Pokud je průnik množin A a B prázdná množina (tj. $A \cap B = \emptyset$), říkáme, že A a B jsou *disjunktní množiny*. Graficky znázorněno na Obrázku 1.2.



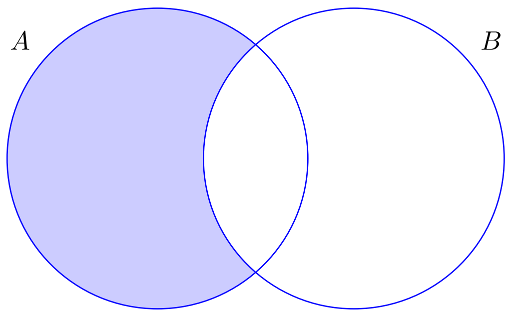
Obrázek 1.2: Disjunktní množiny

Definice 1.3.3. *Sjednocení množin* A a B je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B. Značíme $A \cup B$, graficky znázorněno na Obrázku 1.3. Symbolicky píšeme: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.



Obrázek 1.3: Sjednocení množin A a B

Definice 1.3.4. *Rozdíl množin A* a *B* je množina všech prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B. Značíme $A \backslash B$, graficky znázorněno na Obrázku 1.4. Symbolicky píšeme: $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.



Obrázek 1.4: Rozdíl množin A a B

Příklad 1.15

1.15. Pro každou z následujících dvojic množin určete $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ a $B \backslash A$.

a) $A = \{3, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 2 \wedge n \leq 4\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} : 2 \leq n < 5\}$

Řešení:

a) $A \cap B = \{3\}$, protože číslo 3 se jediné vyskytuje v obou množinách.
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, toto je výčet všech čísel, která se vyskytují buď v množině *A* nebo v *B*.
$A \backslash B = \{6\}$, protože jedině číslo šest je v množině *A*, ale není v množině *B*.
$B \backslash A = \{1, 2, 4, 5\}$, protože tato čísla jsou v množině *B*, ale nejsou v množině *A*.

b) Nejprve převedeme množinu *A* ze zápisu pomocí charakteristické vlastnosti na zápis výčtem. Platí $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Nyní již můžeme zjistit požadované výsledné množiny:
$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \setminus B = \{6, 7, 8\}$, $B \setminus A = \emptyset$.

c) V tomto příkladu si musíme dát pozor u vyhodnocení množiny *A*. Nepozorný čtenář by si mohl vsugerovat, že množiny *A* a *B* jsou stejné množiny, čili jejich zápis výčtem je $A = B = \{2, 3, 4\}$. Ovšem v množině *A* je první vlastnost $n \leq 2$, čili existují jen dvě přirozená čísla splňující tuto vlastnost, a to 1 a 2. Množina *A* má tedy zápis výčtem $A = \{2, 3\}$. Množinu *B* již výčtem zapíšeme snadno, a to $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Potom již lehce získáme požadovaný výsledek:
$A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{3, 4\}$.

1.4 Cvičení

1.4.1. Množiny dané výčtem popište charakteristickou vlastností.

a) $A = \{100, 101, 102, 103, 104\}$

b) $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

c) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

d) $D = \{3, 6, 9, 12\}$

e) $E = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right\}$

f) $F = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

1.4.2. Množiny dané charakteristickou vlastností zapište výčtem.

a) $A = \{n \in \mathbb{N} : 10 \leq n < 16\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} : |n| < 3\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} : |n| \leq 5\}$

d) $D = \left\{n : n = \frac{1}{k}, \text{kde } k \in \{1, 2, 3\}\right\}$

e) $E = \left\{n \in \mathbb{N} : n = 3^k, \text{kde } k \in \{1, 2, 3, 4\}\right\}$

f) $F = \left\{n \in \mathbb{Z} : \frac{1}{4} \leq 2^n \leq 4\right\}$

1.4.3. Která z množin je podmnožinou množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

a) $A = \{2, 3\}$

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 6\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 6\}$

e) $E = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1, \text{kde } k \in \{1, 2\}\}$

f) $F = \{2, 3, \{4\}\}$

1.4.4. Která z množin je podmnožinou množiny $M = \{n \in \mathbb{Z} : |3n| < 15\}$?

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} : |2n| < 15\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} : |2n| < 10\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} : |n| < 5\}$

d) $D = \{1, 2, 3\}$

e) $E = \{5\}$

f) $F = \emptyset$

1.4.5. Pro každou z dvojic množin určete $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ a $B \backslash A$.

a) $A = \{8, 9, 10, 11\}, B = \{10, 11, 12, 13\}$

b) $A = \{8, 9, 10, 11\}, B = \{n \in \mathbb{N} : n < 9\}$

c) $A = \{n \in \mathbb{Z} : |4n| < 16\}, B = \{n \in \mathbb{N} : n < 9\}$

d) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$

Výsledky cvičení

1.4.1 a) $A = \{n \in \mathbb{N} : 100 \leq n \leq 104\}$ **b)** $B = \{n \in \mathbb{Z} : -4 \leq n \leq 1\}$ **c)** $C = \{n \in \mathbb{Z} : -2 \leq n \leq 2\} = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 2\}$ **d)** $D = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 12 \wedge n = 3k$, kde $k \in \mathbb{N}\}$ **e)** $E = \{n : n = \frac{k}{l}$, kde $k \in \{1, 2\}, l \in \{4, 5\}\}$ **f)** $F = \{n : n = 2^k$, kde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$ **1.4.2 a)** $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ **b)** $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ **c)** $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **d)** $D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ **e)** $E = \{3, 9, 27, 81\}$ **f)** $F = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ **1.4.3 a)** $A \subseteq M$ **b)** $B \subseteq M$ **c)** $C \subseteq M$ **d)** $D \not\subseteq M$ **e)** $E \subseteq M$ **f)** $F \not\subseteq M$ **1.4.4 a)** $A \not\subseteq M$ **b)** $B \subseteq M$ **c)** $C \not\subseteq M$ **d)** $D \subseteq M$ **e)** $E \not\subseteq M$ **f)** $F \subseteq M$ **1.4.5 a)** $A \cap B = \{10, 11\}, A \cup B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}, A \setminus B = \{8, 9\}, B \setminus A = \{12, 13\}$ **b)** $A \cap B = \{8\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}, A \setminus B = \{9, 10, 11\}, B \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **c)** $A \cap B = \{1, 2, 3\}, A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \setminus B = \{-3, -2, -1, 0\}, B \setminus A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. **d)** $A \cap B = \mathbb{N}, A \cup B = \mathbb{Z}, A \setminus B = \emptyset$, množina $B \setminus A$ obsahuje všechna celá záporná čísla a nulu, tj. $B \setminus A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}$

Kapitola 2

Kombinatorika

Kombinatorika je součástí finitní matematiky, která pojednává o vlastnostech konečných množin. Jak i z názvu kombinatoriky vyplývá, zabývá se kombinováním tak, jak jej chápeme v běžném smyslu slova, lépe řečeno uspořádáváním dané množiny prvků podle daných pravidel do jistých skupin a výpočtem počtu těchto skupin.

S kombinatorickými úlohami se můžeme setkávat již několik tisíc let. Jako příklad můžeme uvézt slavnou čínskou Knihu proměn, která pochází z roku 2200 př. n. l. Její autoři se zde například zabývali otázkou, kolik trigramů a hexagramů (tj. trojic, respektive šestic znaků Jin a Jang) je možné sestavit. Jiným příkladem [wil] je Londýnský, neboli Rhindův papyrus z Britského muzea v Londýně, který pochází asi z roku 1650 př.n.l. Tento staroegyptský papyrus obsahuje 87 úloh, mimo jiné je zde řešena následující úloha:

„Máme sedm domů, v každém domě je sedm koček.
Každá kočka zabije sedm myší,
každá myš by sežrala sedm klasů pšenice,
z každého klasu by se vypěstovalo sedm měřic zrna.
Kolik měřic zrna jsme mohli vypěstovat?“

Obdoba této úlohy se objevuje v historii ještě mnohokrát v různých obměnách, například Leonardo Fibonacci na počátku 13. století píše:

„Sedm starých žen jde do Říma,
každá vede sedm mezků,
každý mezek nese sedm pytlů,
v každém pytli je sedm bochníků,
v každém bochníku je sedm nožů,
každý nůž je v sedmi pochvách.
Jaký je celkový počet všech věcí?“

Ve staré Indii řešili v 6. st. n. l. například otázku o počtu různých kombinací, které můžeme získat ze šesti základních chutí, či počet možností v případě, že chceme smíchat čtyři různé vůně ze 16 nabízených.

V modernější době se kombinatorikou zabýval například Blaise Pascal, Gottfried Wilhelm von Leibniz či Jakob Bernoulli v 17. století, Leonhard Euler či Abraham de Moivre v 18. století. Nejbouřlivější rozvoj zaznamenala kombinatorika ve 20. století, především v souvislosti s rozvojem výpočetní techniky.

2.1 Matematické operace využívané v kombinatorice

V kombinatorice se setkáváme se dvěma speciálními matematickými operacemi, a to faktoriálem a kombinačním číslem. Nejprve si tedy obě operace definujeme a shrneme jejich základní vlastnosti.

Definice 2.1.1. Faktoriál čísla
Faktoriál čísla je číslo, jenž je rovno součinu všech přirozených čísel, které jsou menší nebo rovny právě tomuto číslu. Faktoriál čísla n značíme $n!$. Matematicky tedy můžeme psát

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \tag{2.1}$$

Jak z definice vyplývá, faktoriál je možno počítat pro všechna přirozená čísla. Dále je explicitně definován faktoriál nuly roven jedné, tj.

$$0! = 1. \tag{2.2}$$

Jak tedy vypočteme faktoriál čísla? Ukažme si několik příkladů.

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\ 7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040 \\ 10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800 \\ 20! &= 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \end{aligned}$$

Jak vidíme, faktoriál velmi rychle roste. Na svých kalkulačkách si můžeme vyzkoušet, že již pro čísla mezi 10 a 20 budeme mít s přesným výpočtem faktoriálu problémy.

Příklad 2.1

2.1. Vypočtěte $\frac{50!}{48!}$.

Řešení: Jak z předchozího víme, výpočet $50!$ ani $48!$ není jednoduchý. Výsledné číslo je tak vysoké, že jej kalkulačky neumí zobrazit. Jak si tedy poradíme? Uvědomíme si, co vlastně čitatel a jmenovatel našeho zlomku obsahuje. V obou těchto případech se jedná o součin přirozených čísel, viz vzorec (2.1). A v takovémto případě, můžeme aplikovat krácení zlomku. Jak tedy bude vypadat řešení našeho příkladu?

$$\frac{50!}{48!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot (48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{50 \cdot 49}{1} = 2\,450$$

Jak vidíme, se základními znalostmi matematiky jsme byli lepší než naše kalkulačka a náš příklad vypočítali „z hlavy“.

Příklad 2.2

2.2. Vypočtěte $\frac{100!}{97! \cdot 6!}$.

Řešení: Nemusíme se lekat a příklad vypočítáme obdobně jako předchozí. Výpočet tedy bude následující

$$\frac{100!}{97! \cdot 6!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot (97 \cdot 96 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{97 \cdot 96 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 49}{2} = 1\,347,5,$$

nebo-li

$$\frac{100!}{97! \cdot 6!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97!}{97! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 49}{2} = 1\,347,5.$$

.

Tak v tomto případě už jsme asi museli použít k výpočtu i papír, ale opět jsme byli úspěšnější než naše kalkulačky.

Příklad 2.3

2.3. Vypočtěte $\frac{10!}{5!+5!}$.

Řešení: V podobných příkladech je častým postupem studentů následující výpočet

$$\frac{10!}{5! + 5!} = \frac{10!}{10!} = 1.$$

Bohužel, jak je známo, i cesty do pekel jsou dlážděny dobrými úmysly. I v našem případě nás náš „dobrý nápad“ dovedl do pekel. Kde jsme tedy udělali chybu? Nikdy nesmíme zapomenout na vzorec (2.1). Co nám tento vzorec říká? Musíme postupovat následujícím způsobem

$$\frac{10!}{5!+5!} = \frac{10!}{2\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2} = 15\,120,$$

nebo-li

$$\frac{10!}{5!+5!} = \frac{10!}{2\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{2\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2} = 15\,120.$$

Poněkud jiná situace nastává v případě, že se ve vypočítávaném výrazu vyskytují proměnné. Ukažme si výpočetní postup na následujících příkladech.

Příklad 2.4

2.4. Upravte výraz $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$.

Řešení: Musíme si uvědomit, že faktoriál není možno spočítat pro libovolné číslo, ale pouze pro přirozená čísla a nulu. Proto vždy, když jsou ve výrazu proměnné, musíme nejprve určit definiční podmínky. Pro každý faktoriál budeme skládat samostatnou podmínku a poté všechny vytvořené podmínky spojíme. Podmínka

$$n+2 \geq 0 \Rightarrow n \geq -2 \wedge (n+2) \in \mathbb{N}_0$$

platí pro první faktoriál (tj. faktoriál v čitateli zlomku),

$$n+1 \geq 0 \Rightarrow n \geq -1 \wedge (n+1) \in \mathbb{N}_0$$

je podmínka vytvořená pro druhý faktoriál (tj. faktoriál ve jmenovateli zlomku). Pozor, musíme si uvědomit, že $0! = 1$, tedy ve jmenovateli nevadí, pokud $n+1 = 0$. Nyní podmínky spojíme. Obě podmínky musí platit společně, proto je spojíme konjunkcí. Výsledná podmínka je tedy $n \geq -1 \wedge n \in \mathbb{Z}$. Teprve v tomto okamžiku můžeme přistoupit k vlastní úpravě výrazu.

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)\cdot n\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n+2}{1} = n+2.$$

Příklad 2.5

2.5. Upravte výraz $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$.

Řešení: Opět nejprve musíme určit definiční podmínky. Podmínka $n+1 \geq 0 \Rightarrow n \geq -1 \wedge (n+1) \in \mathbb{N}_0$ platí pro první faktoriál (tj. faktoriál v čitateli zlomku), $n-2 \geq 0 \Rightarrow n \geq +2 \wedge (n-2) \in \mathbb{N}_0$ je podmínka vytvořená pro druhý faktoriál (tj. faktoriál ve jmenovateli zlomku). Výsledná podmínka je tedy $n \geq 2 \wedge n \in Z$.

A jak bude vypadat vlastní úprava výrazu? V podobných příkladech opět studenti často uvažují chybně. Co je problémem? Správně napsat následující členy součinového rozvoje faktoriálu $(n-2)!$. Častou a pro studenty asi „přirozenou“ reakcí je následující úprava výrazu

$$(n-2)! = (n-2)\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot 1.$$

Bohužel je to zcela špatná úvaha. Musíme si uvědomit, že v rozvoji faktoriálu se čísla postupně vždy o jedničku zmenšují, kdežto v „našem“ rozvoji je $(n-2)$ o jednu menší než následující člen $(n-1)$. Rozklad výrazu $(n+1)!$ tedy obsahuje i členy rozkladu výrazu $(n-2)$. Správná úprava vypadá tedy následovně

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)!}{(n-2)!} &= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot[(n-2)\cdot(n-3)\ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1]}{(n-2)\cdot(n-3)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{1} \\ &= n^3 - n.\end{aligned}$$

Příklad 2.6

2.6. Řešte rovnice s neznámou n.

a) $(n+8)! = 2 \cdot (n+7)!$

b) $(n+6)! = 6 \cdot (n+4)!$

c) $(n+4)! = 16 \cdot \frac{(n+3)! \cdot (n-3)!}{(n-2)!}$

Řešení:

a) Nejprve musíme určit podmínky řešitelnosti, tj. pro která *n* mají výrazy obsažené v rovnicích smysl. Platí $((n+8) \geq 0 \wedge (n+7) \geq 0) \Longrightarrow n \geq -7$. Dále již můžeme přistoupit k vlastnímu řešení.

$$\begin{aligned} (n+8)! &= 2 \cdot (n+7)! \\ \frac{(n+8)!}{(n+7)!} &= 2 \\ n+8 &= 2 \\ n &= -6 \end{aligned}$$

Tato hodnota neznámé *n* splňuje podmínku řešitelnosti, proto bude výsledným řešením.

b) Opět musíme určit podmínky řešitelnosti. Je $((n+6) \geq 0 \wedge (n+4) \geq 0)$, tedy $n \geq -4$. Dále přistoupíme k vlastnímu řešení.

$$\begin{aligned} (n+6)! &= 6 \cdot (n+4)! \\ \frac{(n+6)!}{(n+4)!} &= 6 \\ (n+6) \cdot (n+5) &= 6 \\ n^2 + 11n + 30 &= 6 \\ n^2 + 11n + 24 &= 0 \\ (n+8) \cdot (n+3) &= 0 \\ n_1 &= -8 \\ n_2 &= -3 \end{aligned}$$

Z těchto hodnot neznámé *n* splňuje podmínku řešitelnosti pouze hodnota $n = -3$, což bude jediné výsledné řešení.

c) Podmínky řešitelnosti jsou $((n+4) \geq 0 \wedge (n+3) \geq 0 \wedge (n-3) \geq 0 \wedge (n-2) \geq 0)$, tedy $n \geq 3$. Vlastní řešení pak bude

$$\begin{aligned} (n+4)! &= 16 \cdot \frac{(n+3)! \cdot (n-3)!}{(n-2)!} \\ \frac{(n+4)! \cdot (n-2)!}{(n+3)! \cdot (n-3)!} &= 16 \\ (n+4) \cdot (n-2) &= 16 \\ n^2 + 2n - 8 &= 16 \\ n^2 + 2n - 24 &= 0 \\ (n+6) \cdot (n-4) &= 0 \\ n_1 &= -6 \\ n_2 &= 4. \end{aligned}$$

Z těchto hodnot neznámé *n* splňuje podmínku řešitelnosti pouze hodnota $n = 4$, což bude jediné výsledné řešení.

2.7. Řešte nerovnice s neznámou n. **Příklad 2.7**

a) $(n+4)! \geq 2 \cdot (n+3)!$

b) $\frac{(n-4)!}{(n-6)!} \leq 12$

c) $(n+1)! \cdot n! - (n+2)! \cdot (n-2)! + 6 \cdot (n-2)! \cdot n! \leq 0$

Řešení:

a) Nejprve musíme určit podmínky řešitelnosti, tj. pro která *n* mají výrazy obsažené v nerovnici smysl. Platí $((n+4) \geq 0 \wedge (n+3) \geq 0) \Longrightarrow n \geq -3$. Dále již můžeme přistoupit k vlastnímu řešení

$$\begin{aligned}(n+4)! &\geq 2 \cdot (n+3)! \\ \frac{(n+4)!}{(n+3)!} &\geq 2 \\ n+4 &\geq 2 \\ n &\geq -2.\end{aligned}$$

Nyní spojíme toto řešení s podmínkou řešitelnosti, a tím získáme množinu výsledných řešení. $n \geq -2 \wedge n \geq -3 \Longrightarrow n \geq -2$. Množinou všech řešení je tedy množina celých čísel, která jsou větší nebo rovna hodnotě -2.

b) Opět musíme nejprve určit podmínky řešitelnosti. Je $((n-4) \geq 0 \wedge (n-6) \geq 0) \Longrightarrow n \geq 6$. Dále přistoupíme k vlastnímu řešení

$$\begin{aligned}\frac{(n-4)!}{(n-6)!} &\leq 12 \\ (n-4) \cdot (n-5) &\leq 12 \\ n^2 - 9n + 20 &\leq 12 \\ n^2 - 9n + 8 &\leq 0 \\ (n-8) \cdot (n-1) &\leq 0\end{aligned}$$

Výraz na levé straně nabývá nulové hodnoty pro $n \in \{1, 8\}$, je tedy $1 \leq n \leq 8$.

Spojením tohoto výsledku s podmínkou řešitelnosti obdržíme množinu výsledných řešení. Platí $1 \leq n \leq 8 \wedge n \geq 6 \Longrightarrow n \in \{6, 7, 8\}$. Množina všech řešení je tedy pouze tříprvková a obsahuje čísla $6, 7$ a 8.

c) Podmínky řešitelnosti jsou: $((n+1) \geq 0 \wedge n \geq 0 \wedge (n+2) \geq 0 \wedge (n-2) \geq 0)$, tedy $n \geq 2$. Vlastní řešení pak bude

$$\begin{aligned}(n+1)! \cdot n! - (n+2)! \cdot (n-2)! + 6 \cdot (n-2)! \cdot n! &\leq 0 \\ (n+1) \cdot n \cdot (n-1) - (n+2) \cdot (n+1) + 6 &\leq 0 \\ n^3 - n^2 - 4n + 4 &\leq 0 \\ (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n+2) &\leq 0.\end{aligned}$$

Vidíme, že hodnoty 1, 2 a -2, které nulují výraz na levé straně poslední nerovnice, rozdělují všechna reálná čísla do čtyř intervalů, a to $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, \infty)$. Pouze hodnota 2 a hodnoty z posledního z těchto intervalů splňují podmínku řešitelnosti. Proto stačí vyšetřovat platnost zadané nerovnice (resp. poslední z upravovaných nerovnic) pro číslo dva a pro hodnoty z intervalu $(2, \infty)$. K tomu stačí dosadit libovolné číslo z tohoto intervalu do této nerovnice.

Do výrazu $(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n+2)$ dosadíme za *n* např. hodnotu 3 a obdržíme $(3-1) \cdot (3-2) \cdot (3+2) = 10 > 0$, nerovnice tedy není splněna. Proto tato nerovnice nebude splněna ani pro žádné jiné číslo ze zkoumaného intervalu $(2, \infty)$.

Ještě si však musíme uvědomit, že výraz na levé straně poslední nerovnice nabývá nulové hodnoty pro $n = 2$. Číslo 2 tedy bude jediným výsledným řešením, symbolicky zapsáno $n \in \{2\}$.

Definice 2.1.2. Kombinační čísla
Kombinační číslo $\binom{n}{k}$, čteme „n nad k“, je definováno vzorcem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \tag{2.3}$$

kde n, k jsou přirozená čísla nebo 0 a platí $0 \le k \le n$.

Pro výpočet můžeme použít poněkud upravený vzorec

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{2.4}$$

odvozený následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot [(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1]}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot [(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1]} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.\end{aligned}$$

Shrňme nyní důležité vlastnosti kombinačních čísel potřebné ve výpočtech.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{2.5}$$

neboť

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{n-k! \cdot [n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k};$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \tag{2.6}$$

neboť

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} \\ &= \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1;\end{aligned}$$

$$\binom{n}{1} = n, \tag{2.7}$$

neboť

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, n < k, \tag{2.8}$$

neboť

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot [n-(k+1)]!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot [n-(k+1)]!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k! \cdot [n-(k+1)]!} \cdot \frac{n+1}{(n-k) \cdot (k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Některé vlastnosti kombinačních čísel je možno názorně ukázat pomocí následujícího schématu, které se podle známého francouzského matematika, fyzika a filozofa BLAISE PASCALA (1623-1666) nazývá *Pascalův trojúhelník*.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Po vypočítání hodnot jednotlivých kombinačních čísel ve schématu obdržíme jiný tvar Pascalova trojúhelníku

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Všimněme si jedniček na stranách trojúhelníku (vypovídá o vlastnosti 2.6), symetričnosti schématu (vypovídá o vlastnosti 2.5) a zároveň jevu, kdy součet dvou sousedních čísel v trojúhelníků je roven číslu umístěnému o řádek níže „mezi“ oběma sčítanými čísly (vypovídá o vlastnosti 2.8).

Ze znázorněného schématu můžeme celkem rychle vypočítat další řádky. Za posledním uvedeným řádkem by následoval řádek týkající se kombinačních čísel

$$\binom{5}{0} = 1 \qquad \binom{5}{1} = 1 + 4 = 5$$
$$\binom{5}{2} = 4 + 6 = 10 \qquad \binom{5}{3} = 6 + 4 = 10$$
$$\binom{5}{4} = 4 + 1 = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1.$$

Nyní si ukažme několik příkladů na výpočet kombinačních čísel.

Příklad 2.8

2.8. Vypočtěte $\binom{6}{4}$.

Řešení: Nejdříve provedeme výpočet dle definičního vzorce (2.3).

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (4-2) \cdot (4-3)} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Můžeme ale využít některé vhodné vlastnosti kombinačních čísel, a tím se nám výpočet urychlí. V našem případě nejprve využijeme vlastnost (2.5) a poté aplikujeme vzorec (2.4).

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Je zřejmé, že oba způsoby jsou rovnocenné a nezáleží na našem výběru, který postup zvolíme.

Příklad 2.9

2.9. Vypočítejte $\binom{100}{98}$.

Řešení: V tomto příkladu je již výhodnější využít druhý z postupů ukázaných v předchozím příkladu. Způsob využívající definiční vzorec je sice také použitelný, ale výpočet bude nepřehledný, a proto hrozí výpočetní chybou.

$$\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$$

Příklad 2.10

2.10. Vyjádřete jediným kombinačním číslem součet $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$.

Řešení: Z vlastnosti 2.6 vyplývá, že $\binom{2}{2} = 1 = \binom{3}{3}$. Potom je

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}.$$

Nyní použijeme opakovaně vzorec (2.8) a sečteme vždy první dva členy součtu

$$\binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}.$$

Příklad 2.11

2.11. Upravte výraz $\binom{n+3}{n+1}$.

Řešení: Obdobně jako v případech práce s faktoriály si musíme uvědomit, že ani kombinační číslo není možno spočítat pro libovolná dvě čísla, ale pouze pro přirozená čísla a nulu, navíc číslo uvedené „nahoře“ v kombinačním čísle musí mít alespoň tak vysokou hodnotu, jako číslo „dole“. Proto vždy, pokud jsou ve výrazu proměnné, musíme nejprve určit definiční podmínku. Definiční podmínky jsou

$$n + 3 \geq 0 \land n + 1 \geq 0 \land n + 3 \geq n + 1 \land n \in N,$$

tedy $n \geq -1 \wedge n \in N$. Vlastní úprava výrazu za využití vzorců (2.5) a (2.4) bude

$$\binom{n+3}{n+1} = \binom{n+3}{2} = \frac{(n+3)\cdot(n+2)}{2}.$$

2.12. Upravte výraz $\binom{n+2}{4}$.

Příklad 2.12

Řešení: Nejprve vytvoříme definiční podmínku $n+2 \geq 0 \wedge n+2 \geq 4 \wedge n \in \mathbb{N}$, tedy $n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{N}$. Vlastní úprava výrazu za využití vzorce (2.4) bude

$$\binom{n+2}{4} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{24}.$$

Pokud se zamyslíme nad výpočty jednotlivých příkladů a zvláště nad vzorcem (2.4), uvědomíme si jedno pravidlo, a to, že počet činitelů v čitateli zlomku ve výpočtu kombinačního čísla je roven číslu „dole“ v kombinačním čísle.

2.13. Určete definiční podmínku $\binom{\frac{n+1}{2}}{3}$.

Příklad 2.13

Řešení: Zásadní odlišností od předchozího příkladu je, že „nahoře“ v kombinačním čísle je výraz obsahující zlomek. Víme, že tento výraz musí být hodnotou přirozené číslo nebo nula. Proto bude definiční podmínka vytvořena následovně $\frac{n+1}{2} \geq 0$ a také $\frac{n+1}{2} \geq 3$ spolu s podmínkou $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$, tedy $n \geq 5 \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m-1$, neboli n je liché přirozené číslo s hodnotou alespoň 5.

2.14. Řešte rovnice s neznámou n.

Příklad 2.14

a) $\binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-2} = \binom{n+1}{4}$

b) $\binom{n+3}{n+1} = 1$

c) $\binom{n+2}{n} = 2\cdot\binom{n}{n-2} + 4$

Řešení:

a) Nejprve vytvoříme podmínku řešitelnosti, tj. určíme n, pro která mají výrazy obsažené v rovnicích smysl. Následující podmínky musí platit současně.

$$\begin{aligned}
&(n \geq 0 \wedge n-3 \geq 0 \wedge n \geq n-3)\\
&(n \geq 0 \wedge n-2 \geq 0 \wedge n \geq n-2)\\
&(n+1 \geq 0 \wedge n+1 \geq 4)\\
&n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

Tedy $n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$. Vlastní úprava rovnice za využití vzorce (2.8) bude

$$\binom{n+1}{n-2} = \binom{n+1}{4}.$$

Jestliže se rovnají dvě kombinační čísla a zároveň se rovnají i výrazy „nahoře“ v kombinačních číslech, rovnají se i hodnoty výrazů „dole“ v kombinačním čísle. Proto platí rovnost $n-2=4$ a z toho plyne $n=6$.

Nesmíme ale zapomenout na vlastnost (2.5). To znamená, že platí

$$\binom{n+1}{n-2} = \binom{n+1}{(n+1)-(n-2)} = \binom{n+1}{3}.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme vztah

$$\binom{n+1}{3} = \binom{n+1}{4}.$$

Tato rovnost však zjevně není splněna pro žádné n. Proto máme pouze jediné řešení $n = 6$, které jsme vypočítali před chvílí. Posledním krokem musí být ověření, jestli naše řešení splňuje definiční podmínku, kterou jsme určili na počátku. Zřejmě platí $6 \geq 3 \wedge 6 \in \mathbb{N}$, a proto bude $n = 6$ naše hledané řešení.

b) Podmínka řešitelnosti bude $(n + 3 \geq 0 \wedge n + 1 \geq 0 \wedge n + 3 \geq n + 1)$, tedy $n \geq -1$ a n musí být celé číslo. Vlastní řešení bude následující

$$\begin{aligned}
\binom{n+3}{n+1} &= 1 \\
\binom{n+3}{(n+3)-(n+1)} &= 1 \\
\binom{n+3}{2} &= 1 \\
\frac{(n+3)\cdot(n+2)}{2} &= 1 \\
n^2 + 5n + 6 &= 2 \\
n^2 + 5n + 4 &= 0 \\
(n+4)\cdot(n+1) &= 0 \\
n_1 &= -4 \\
n_2 &= -1.
\end{aligned}$$

Vidíme, že podmínce řešitelnosti odpovídá pouze řešení $n = -1$, toto tedy bude jediné výsledné řešení.

c) Nejprve opět určíme definiční podmínky řešitelnosti. Současně musí platit následující podmínky: $n + 2 \geq 0, n \geq 0, n - 2 \geq 0, n + 2 \geq n, n \geq n - 2$. Je tedy $n \geq 2$ a n je celé číslo. Vlastní řešení můžeme provést například takto

$$\begin{aligned}
\binom{n+2}{n} &= 2\cdot\binom{n}{n-2} + 4 \\
\binom{n+2}{2} &= 2\cdot\binom{n}{2} + 4 \\
\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} &= 2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2} + 4 \\
n^2 + 3n + 2 &= 2n^2 - 2n + 8 \\
n^2 - 5n + 6 &= 0 \\
(n-2)\cdot(n-3) &= 0 \\
n_1 &= 2 \\
n_2 &= 3.
\end{aligned}$$

Vidíme, že obě tato řešení odpovídají definiční podmínce, proto bude množina všech řešení této rovnice dvouprvková a bude obsahovat hodnoty 2 a 3, tedy můžeme psát $n \in \{2, 3\}$.

Příklad 2.15

2.15. Řešte rovnice s neznámou n.

a) $\binom{n+1}{3} \geq \binom{5}{3}$

b) $\binom{n+5}{n+3} \geq 2\cdot\binom{n-3}{n-5}$

Řešení:

a) Podmínka řešitelnosti bude následující $(n+1 \geq 0 \wedge n+1 \geq 3) \Longrightarrow n \geq 2$ a n musí být celé číslo. Vlastní řešení můžeme provést například pomocí této úvahy. Řešením rovnice $\binom{n+1}{3} = \binom{5}{3}$ je zřejmě n odpovídající vztahu $n+1=5$, tedy $n=4$. Uvědomíme-li si, že změna hodnoty „nahoře" v kombinačním čísle se projeví pouze v čitateli výpočetního zlomku, a to tak, že se zvětšováním jedné z těchto hodnot narůstá i druhá a naopak. Z toho tedy vyplývá, že výsledkem zadané nerovnice jsou všechna přirozená čísla, která jsou větší nebo rovna 4.

Můžeme však postupovat i jinak, více formálně

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{3} &\geq \binom{5}{3} \\
\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3\cdot 2} &\geq \frac{5\cdot 4}{2} \\
n^3 - n - 60 &\geq 0 \\
(n-4)\cdot(n^2+4n+15) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že výraz ve druhém činiteli nabývá pouze kladných hodnot. Aby byla splněna nerovnost, musí výraz v prvním činiteli nabývat nezáporných hodnot $n-4 \geq 0$, tedy $n \geq 4$. Vidíme, že všechny tyto hodnoty odpovídají podmínce řešitelnosti a budou tedy tvořit množinu všech výsledných řešení.

b) Nejprve opět určíme definiční podmínky řešitelnosti. Následující podmínky musí být splněny současně. $n+5 \geq 0, n+3 \geq 0, n-3 \geq 0, n-5 \geq 0, n+5 \geq n+3$, $n-3 \geq n-5$, tedy $n \geq 5$ a n je celé číslo. Vlastní řešení bude následující

$$\begin{aligned}
\binom{n+5}{n+3} &\geq 2\cdot\binom{n-3}{n-5} \\
\binom{n+5}{2} &\geq 2\cdot\binom{n-3}{2} \\
\frac{(n+5)\cdot(n+4)}{2} &\geq 2\cdot\frac{(n-3)\cdot(n-4)}{2} \\
n^2+9n+20 &\geq 2(n^2-7n+12) \\
n^2-23n+4 &\leq 0 \\
(n-11,5)^2 - 11,5^2 + 4 &\leq 0 \\
(n-11,5)^2 - 132,25 + 4 &\leq 0 \\
(n-11,5)^2 - 128,25 &\leq 0 \\
(n-11,5)^2 - (\sqrt{128,25})^2 &\leq 0 \\
(n-11,5-\sqrt{128,25})\cdot(n-11,5+\sqrt{128,25}) &\leq 0.
\end{aligned}$$

I bez použití kalkulačky víme, že platí $11 \leq \sqrt{128,25} \leq 11,5$, tedy $0 \leq n_1 \leq 1$ a $22 \leq n_2 \leq 23$. Pokud tento fakt nevidíme, můžeme si obě n spočítat přesně na kalkulačce, ale pro další výpočet nejsou přesné hodnoty nutné.

Nerovnice je splněna pro všechny hodnoty mezi oběma n. Pokud spojíme tento výsledek s podmínkou řešitelnosti, vidíme, že výsledným řešením je každé přirozené číslo, které je větší nebo rovno pěti a menší nebo rovno 22, tedy můžeme psát $n \in \{5,6,7,\ldots,21,22\}$, neboli $n \in \{n; n \in \mathbb{N} \wedge 5 \leq n \leq 22\}$.

2.2 Binomická věta

V této kapitole si na základě dosavadních znalostí kombinatoriky odvodíme obecný vzorec pro n-tou mocninu dvojčlenu $a+b$, kde n je přirozené číslo. Nejprve si vypišme vzorce $(a+b)^n$, pro $n=0$, a několik prvních přirozených čísel n tak, jak jsme se je učili ve škole

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1\\ (a+b)^1 &= a+b\\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Nyní si vypíšeme koeficienty členů v rozepsaných vzorcích

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Můžeme si všimnout podobnosti s Pascalovým trojúhelníkem. V následujícím řádku Pascalova trojúhelníku následují čísla

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

A opravdu jsou to koeficienty vzorce pro výpočet čtvrté mocniny dvojčlenu $a+b$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Věta 2.2.1 (Binomická věta)**.** *Pro všechna reálná čísla a, b a přirozené číslo n platí*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Vyjádříme-li výraz $(a+b)^n$ pomocí binomické věty, říkáme, že jsme utvořili *binomický rozvoj* tohoto výrazu, neboli že jsme jej rozvinuli podle binomické věty.

Kombinační čísla v binomickém rozvoji nazýváme také *binomickými koeficienty*.

Příklad 2.16

2.16. Pomocí binomické věty vypočítejte $(x+1)^4$.

Řešení: Dosazením do vzorce (2.9) dostaneme

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= \binom{4}{0}\cdot x^4+\binom{4}{1}\cdot x^{4-1}\cdot 1+\binom{4}{2}\cdot x^{4-2}\cdot 1^2+\binom{4}{4-1}\cdot x\cdot 1^{4-1}+\\ &\quad+\binom{4}{4}\cdot 1^4\\ &= \binom{4}{0}\cdot x^4+\binom{4}{1}\cdot x^3\cdot 1+\binom{4}{2}\cdot x^2\cdot 1^2+\binom{4}{3}\cdot x\cdot 1^3+\binom{4}{4}\cdot 1^4\\ &= 1\cdot x^4+4\cdot x^3\cdot 1+6\cdot x^2\cdot 1+4\cdot x\cdot 1+1\cdot 1\\ &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1.\end{aligned}$$

2.17. Pomocí binomické věty vypočítejte $(x-\sqrt{2})^5$. **Příklad 2.17**

Řešení:

$$
\begin{aligned}
(x-\sqrt{2})^5 &= \binom{5}{0}\cdot x^5 + \binom{5}{1}\cdot x^4\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + \binom{5}{2}\cdot x^3\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \\
&\quad + \binom{5}{3}\cdot x^2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3 + \binom{5}{4}\cdot x\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^4 + \binom{5}{5}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^5 \\
&= 1\cdot x^5 + 5\cdot x^4\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 10\cdot x^3\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 10\cdot x^2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3 + \\
&\quad + 5\cdot x\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^4 + 1\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^5 \\
&= x^5 - 5\sqrt{2}x^4 + 20x^3 - 20\sqrt{2}x^2 + 20x - 4\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

2.18. Pomocí binomické věty vypočítejte $1,02^6$. **Příklad 2.18**

Řešení:

$$
\begin{aligned}
1,02^6 &= \left(1+\frac{2}{100}\right)^6 \\
&= \binom{6}{0}\cdot 1^6 + \binom{6}{1}\cdot 1^5\cdot\frac{2}{100} + \binom{6}{2}\cdot 1^4\cdot\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \binom{6}{3}\cdot 1^3\cdot\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \\
&\quad + \binom{6}{4}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{2}{100}\right)^4 + \binom{6}{5}\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{100}\right)^5 + \binom{6}{6}\cdot\left(\frac{2}{100}\right)^6 \\
&= 1\cdot 1^6 + 6\cdot 1^5\cdot\frac{2}{100} + 15\cdot 1^4\cdot\frac{4}{100^2} + 20\cdot 1^3\cdot\frac{8}{100^3} + \\
&\quad + 15\cdot 1^2\cdot\frac{16}{100^4} + 6\cdot 1\cdot\frac{32}{100^5} + 1\cdot\frac{64}{100^6} \\
&= 1 + \frac{12}{100} + \frac{60}{100^2} + \frac{160}{100^3} + \frac{240}{100^4} + \frac{192}{100^5} + \frac{64}{100^6} = 1,126\,162\,419\,264
\end{aligned}
$$

Přímým výpočtem například na kalkulačce si můžeme ověřit, že výsledek je správný.

2.19. Určete binomický koeficient binomického rozvoje výrazu $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^8$, který obsahuje výraz x^4. **Příklad 2.19**

Řešení: Pro $i = 0,\dots,8$ má $(i{+}1)$-ní člen binomického rozvoje výrazu $(x^2+\frac{3}{x})^8$ tvar

$$\binom{8}{i}\cdot\left(x^2\right)^{8-i}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^i.$$

Úpravou tohoto výrazu dostáváme

$$\binom{8}{i}\cdot\left(x^2\right)^{8-i}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^i = \binom{8}{i}\cdot x^{16}\cdot x^{-2i}\cdot 3^i\cdot x^{-i} = \binom{8}{i}\cdot 3^i\cdot x^{16-3i}.$$

Požadujeme, aby hledaný člen obsahoval čtvrtou mocninu x, proto musí platit rovnost $x^{16-3i} = x^4$, tedy $16-3i = 4$. Z toho plyne $i = 4$. Příslušný člen má tvar

$$\binom{8}{4}\cdot\left(x^2\right)^{8-4}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^4 = 70\cdot x^8\cdot\frac{81}{x^4} = 70\cdot 81\cdot x^8\cdot x^{-4} = 5670x^4.$$

Hledaný binomický koeficient je 5 760.

2.20. Určete binomický koeficient binomického rozvoje výrazu $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^8$, který obsahuje výraz x^6. **Příklad 2.20**

Řešení: Vidíme, že zadání příkladu je téměř totožné s předchozím. Řešení tady bude totožné až do okamžiku, kde začneme používat výši požadované mocniny x. Nyní požadujeme, aby hledaný člen obsahoval šestou mocninu x, proto musí platit $x^{16-3i} = x^6$ a tedy $16-3i = 6$. Z toho plyne $i = \frac{10}{3}$. Výsledné i není přirozené číslo ani 0, což je v rozporu s faktem, že i určuje pořadí nějakého členu binomického rozvoje. Hledaný binomický koeficient proto neexistuje.

2.3 Kombinatorická pravidla

V kombinatorice jsou využívána dvě základní pravidla, a to kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu. Obě tato pravidla jistě všichni známe i bez znalosti kombinatoriky. Používáme je v běžném životě zcela automaticky, aniž si to uvědomujeme.

Věta 2.3.1. ***(Kombinatorické pravidlo součtu)*** *Jsou-li $A_1, A_2, ..., A_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, ..., n_k$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní (tj. nemají žádný společný prvek), pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ je roven $n_1 + n_2 + ... + n_k$.*

Možná někoho může zarazit a odradit výše uvedený matematický zápis tohoto pravidla, ukážeme si jej tedy na názorném příkladu a uvidíme, že je opravdu velmi triviální.

Příklad 2.21

2.21. Máme tři jablka, dvě hrušky, pět švestek a deset třešní. Kolik kusů ovoce máme?

Řešení: Už vidíte triviálnost celého problému? Jen pro pořádek, vidíme, že v našem zadání máme čtyři disjunktní množiny, tedy $k = 4$ a dále vidíme, že počty prvků jednotlivých množin jsou $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 5, n_4 = 10$. I dítě ze základní školy by vypočítalo, že celkový počet ovoce je součtem jednotlivých hodnot, čili $n = 3 + 2 + 5 + 10 = 20$. Celkem máme 20 kusů ovoce.

Věta 2.3.2. ***(Kombinatorické pravidlo součinu)*** *Počet všech uspořádaných* k*-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až* k*-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.*

Opět si pro názornost uvedeme příklad.

Příklad 2.22

2.22. Máme tři dívky a dva hochy. Kolika způsoby můžeme vybrat dvojici dívka + chlapec?

Řešení: Mějme například tři dívky se jmény Eva, Iva a Jana a dva chlapce se jmény Jiří a Jan. Eva může tvořit dvojici buď s Jiřím nebo s Janem, tedy může být členkou dvou dvojic. Iva opět může tvořit dvojici buď s Jiřím nebo s Janem, tedy může být členkou opět dvou dvojic. Stejně tak i Jana. Máme tedy pro každou ze tří dívek dvě možné dvojice, proto již umíme vypočtat celkový počet možných dvojic, a to $3 \cdot 2 = 6$.

Pro přesnost, v našem příkladu bylo $n_1 = 3$ a $n_2 = 2$ a tedy $n_1 \cdot n_2 = 6$. Celkem můžeme vybrat 6 dvojic.

Příklad 2.23

2.23. Házíme čtyřmi mincemi. Na každé z nich může padnout panna, nebo orel. Kolik existuje různých možností, jaký bude výsledek hodu čtveřicí mincí?

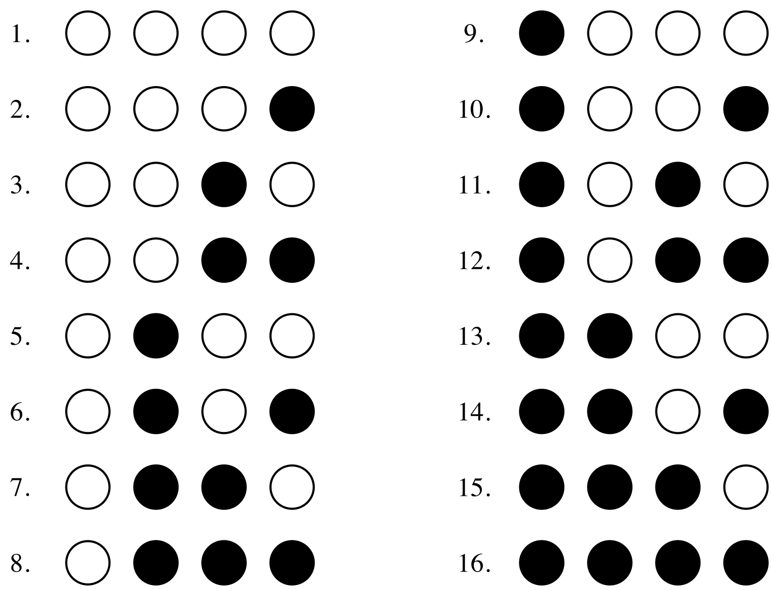
Řešení: Vidíme, že $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2$. Celkový počet trojic lze vypočítat jako $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Hod může dopadnout 16 různými způsoby.

Je tomu opravdu tak? Jak bychom problém mohli vyřešit bez znalosti vzorce pro pravidlo součinu? Jsou dvě možnosti, co padne na první minci, panna, nebo orel. Pokud na první minci padla panna, opět existují dvě možnosti, co padlo na druhé minci. Takto můžeme pokračovat ve výpisu všech možností. Asi přehledněji je to vidět na Obrázku 2.1. Z něj je jasně vidět, že opravdu může nastat 16 výsledků.

Příklad 2.24

2.24. Studenti si v 1. ročníku mohou vybrat jeden z nabídky pěti volitelných předmětů, v 2. ročníku je nabízeno šest jiných předmětů a ve 3. ročníku osm. Kolika způsoby si může student vybrat trojici předmětů - v každém roce jeden?

Řešení: Vidíme, že $n_1 = 5, n_2 = 6, n_3 = 8$. Celkový počet trojic lze vypočítat jako $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 5 \cdot 6 \cdot 8 = 240$. Student si může vybrat 240 různých kombinací trojic předmětů.



Obrázek 2.1: Grafické řešení příkladu 2.23, černě je vyznačen orel, bíle panna.

2.4 Variace, permutace, kombinace

V této části si rozebereme různé druhy úloh z oblasti kombinatoriky. Nejprve si ukážeme klasifikaci těchto úloh a poté se budeme zabývat každým z typů kombinatorických úloh zvlášť.

Jak již bylo v úvodu kapitoly uvedeno, kombinatorické úlohy se zabývají uspořádáváním dané množiny prvků podle daných pravidel do jistých skupin a výpočtem počtu těchto skupin. Jak tedy toto uspořádávání může vypadat? Pokud se máme rozhodnout, o jaký typ úlohy se v našem případě jedná, musíme si nejprve uvědomit, jestli se uspořádávané prvky ve vznikajících skupinách mohou vyskytnout vícekrát, či nikoliv. Pak mluvíme o úloze s opakováním, respektive bez opakování.

Dále také musíme sledovat, jestli záleží na pořadí prvků ve skupině, či nikoliv. V případě, že na pořadí záleží, tj. například ABC je něco jiného než CBA, pak mluvíme o tzv. variacích. V případě, že na pořadí nezáleží, tj. například 1+2+3 je to samé co 3+2+1, mluvíme o tzv. kombinacích.

Máme tedy čtyři základní typy kombinatorických úloh - variace bez opakování, variace s opakováním, kombinace bez opakování a kombinace s opakováním.

Dále si musíme ještě uvědomit počet prvků v původní množině (budeme značit n) a také počet prvků ve vznikajících skupinách (budeme značit k). Pak budeme říkat, že se jedná o úlohu k-té třídy z n prvků.

Poslední informace před závěrečným přehledným seznamem všech typů úloh je upozornění, že v případě variací n-té třídy z n prvků (tedy platí $n = k$), mluvíme o tzv. permutacích. Závěrečný přehled je tedy následující.

- variace k-té třídy z n prvků bez opakování
- variace k-té třídy z n prvků s opakováním
- permutace z n prvků bez opakování
- permutace z n prvků bez opakování
- kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním
- kombinace k-té třídy z n s opakováním

Určení, že se jedná o úlohu bez opakování, bude bráno implicitně, tj. pokud nebude upřesněno, zda se jedná o úlohu s opakováním, nebo bez něj, budeme vždy uvažovat úlohu bez opakování.

Definice 2.4.1. *Variace* k-té třídy (neboli k-členná variace) z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Počet všech takovýchto variací značíme $V_k(n)$ a vypočítáme jej dle vzorce

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2.10}$$

Z předpokladů Věty 2.4.1 je zřejmé, že musí platit nerovnost $k \leq n$.

Příklad 2.25

2.25. Kolik různých trojciferných číselných kódů lze sestavit z číslic $1, 2, 3, 4$? Žádná z číslic se nesmí v kódu opakovat.

Řešení: Ze zadání vidíme, že se žádný prvek nesmí ve vzniklé skupině opakovat, proto se bude jednat o úlohu bez opakování. Navíc vidíme, že zřejmě kód 123 je jiný kód než kód 321, tedy záleží na pořadí prvků, a proto se jedná o variace. Dále si uvědomíme, že můžeme vybírat ze čtyř prvků, tedy $n = 4$, a že vznikající skupina má mít tři prvky, čili $k = 3$. Budou nás tedy zajímat variace třetí třídy ze čtyř prvků bez opakování. Počet variací vypočítáme za využití vzorce (2.10) následovně.

$$V_3(4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24.$$

Je to opravdu správně? Jak si můžeme výpočet ověřit? Jak bychom mohli postupovat při zjišťování počtu možných kódů bez znalosti vzorce (2.10)?

Mohli bychom si například vypsat všechny možnosti. Abychom v žádném případě nějakou z možností nevynechali, musíme dodržet určitý systém. Jedním z možných systémů je následující postup

$$\begin{array}{llll}
(1,2,3) & (2,1,3) & (3,1,2) & (4,1,2) \\
(1,2,4) & (2,1,4) & (3,1,4) & (4,1,3) \\
(1,3,2) & (2,3,1) & (3,2,1) & (4,2,1) \\
(1,3,4) & (2,3,4) & (3,2,4) & (4,2,3) \\
(1,4,2) & (2,4,1) & (3,4,1) & (4,3,1) \\
(1,4,3) & (2,4,3) & (3,4,2) & (4,3,2).
\end{array}$$

Vidíme, že všech možných variací je opravdu 24.

Příklad 2.26

2.26. Sportovního turnaje se zúčastnilo 7 závodníků. Kolika způsoby mohou být v tomto turnaji obsazeny stupně vítězů?

Řešení: Ze zadání příkladu je zřejmé, že se žádný prvek (tj. závodník) nesmí ve vzniklé skupině opakovat (tj. nemůže stát při daném výsledku turnaje dvakrát na stupních vítězů), proto se bude jednat o úlohu bez opakování. Navíc vidíme, že zřejmě je jiné obsazení stupňů vítězů, pokud bude daný závodník na prvním místě, či na místě třetím, tedy záleží na pořadí prvků, a proto se jedná o variace.

Dále vidíme, že můžeme vybírat ze sedmi prvků, tedy $n = 7$, a že vznikající skupina má mít tři prvky, čili $k = 3$. Budeme tedy pracovat s variacemi třetí třídy ze sedmi prvků bez opakování. Počet variací vypočítáme za využití vzorce (2.10) následovně

$$V_3(7) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1} = 210,$$

nebo-li

$$V_3(7) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1} = 210.$$

Můžeme však použít i jinou úvahu, a tím i jiný postup řešení. Je zřejmé, že první místo na stupních vítězů může být teoreticky obsazeno libovolným ze sedmi závodníků, tj. existuje sedm možností výběru. Při obsazování druhého místa už musíme být opatrnější, protože ten závodník, který již obsadil první místo, nemůže být zároveň na místě druhém. Máme proto už jen šest možností výběru. Obdobnou úvahu použijeme při obsazování třetího místa a vidíme, že existuje pět možností výběru. Jednotlivé tři výběry můžeme kombinovat tak, jak jsme si popsali výše při vysvětlování kombinatorického pravidla součinu. Proto jednotlivé počty možností výběru mezi sebou vynásobíme $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Vidíme, že všech možností obsazení stupňů vítězů je opravdu 210.

2.27. Kolik různých vlajek skládajících se ze tří vodorovných různobarevných pruhů můžeme vytvořit, pokud máme k dispozici látku v barvách bílá, modrá, červená, žlutá, zelená a černá? **Příklad 2.27**

Řešení: Máme tvořit vlajky ze tří různobarevných pruhů, proto se žádný prvek (tj. barva) nesmí ve vzniklé skupině opakovat, jedná se tedy o úlohu bez opakování. Ze života víme, že i Francie i Rusko mají vlajky složené z bílého, červeného a modrého vodorovného pruhu, a přesto nemají stejné vlajky, záleží tedy na pořadí prvků, a proto se jedná o variace.

Máme k dispozici látky šesti barev, proto $n = 6$, a víme, že vznikající skupina má mít tři prvky, čili $k = 3$. Budeme se tedy zajímat o variace třetí třídy ze šesti prvků bez opakování. Počet variací vypočítáme za využití vzorce (2.10) následovně

$$V_3(6) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1} = 120.$$

Někomu se může zdát jednodušší postup pomocí kombinatorického pravidla součinu. Je zřejmé, že první pruh na vlajce může mít libovolnou ze šesti barev, tj. existuje šest možností výběru. Druhý pruh už můžeme ušít jen z látek pěti barev a třetí pruh jen z látek čtyř barev. Jednotlivé počty možností výběru mezi sebou vynásobíme, a tím obdržíme celkový počet vlajek $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Definice 2.4.2. *Variace k-té třídy* (neboli k-členná variace) z n prvků *s opakováním* je uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků. Počet všech takovýchto variací značíme $V'_k(n)$ a vypočítáme jej dle vzorce

$$V'_k(n) = n^k. \tag{2.11}$$

Na rozdíl od variací bez opakování nemusí nutně být $k \le n$, ale může být i $k > n$.

2.28. Kolik různých čtyřciferných číselných kódů lze sestavit z číslic 1 a 2? **Příklad 2.28**

Řešení: V zadání není žádné omezení týkající se násobnosti číslic ve výsledném kódu, proto můžeme uvažovat i například kód 1111. Bude se tedy jednat o úlohu s opakováním. Dále vidíme, že zřejmě kód 1122 je jiný kód než kód 2211, záleží tedy na pořadí prvků, a proto se jedná o variace.

Uvědomíme si, že můžeme vybírat ze dvou prvků, proto $n = 2$, a že vznikající skupina má mít čtyři prvky, čili $k = 4$. Budeme tedy pracovat s variacemi třetí třídy ze čtyř prvků s opakováním. Počet variací vypočítáme za využití vzorce (2.11) následovně

$$V'_4(2) = 2^4 = 16.$$

Jiný způsob výpočtu by mohl být s využitím kombinatorického pravidla součinu. Vidíme, že první člen kódu můžeme vybrat ze dvou možností. Stejně tak druhý, třetí i čtvrtý člen. Po vynásobení všech počtů možností dostáváme následující výpočet, který nám dává stejný výsledek jako předchozí postup

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Je to opravdu správně? Jak si můžeme výpočet ověřit? Jak bychom mohli postupovat při zjišťování počtu možných kódů bez znalosti vzorce (2.11)?

Tak jako v případě variací bez opakování si můžeme například vypsat všechny možnosti. Opět si musíme dát pozor, abychom nějakou z možností nevynechali, a proto musíme dodržet určitý systém.

$$\begin{array}{ll}
(1,1,1,1) & (2,1,1,1)\\
(1,1,1,2) & (2,1,1,2)\\
(1,1,2,1) & (2,1,2,1)\\
(1,1,2,2) & (2,1,2,2)\\
(1,2,1,1) & (2,2,1,1)\\
(1,2,1,2) & (2,2,1,2)\\
(1,2,2,1) & (2,2,2,1)\\
(1,2,2,2) & (2,2,2,2)
\end{array}$$

Vidíme, že všech možných variací je opravdu 16.

Příklad 2.29

2.29. Kolik různých pětipísmenných slov můžeme teoreticky sestavit (za předpokladu, že abeceda má 26 písmen a že slova nemusejí mít žádný smysl)?

Řešení: V zadání není žádné omezení týkající se násobnosti písmen ve slově a známe slova, kde se jedno písmeno vyskytuje vícekrát. Bude se tedy jednat o úlohu s opakováním. Například existuje slovo „klopa“, ale i slovo „polka“, záleží tedy na pořadí prvků, a proto se jedná o variace.

Dále vidíme, že můžeme vybírat z 26 prvků, proto $n = 26$, a že vznikající skupina má mít pět prvků, čili $k = 5$. Budeme si tedy všímat variací páté třídy z 26 prvků s opakováním. Počet těchto variací vypočítáme za využití vzorce (2.11) následovně

$$V_5'(26) = 26^5 = 11\,881\,376.$$

Opět tu existuje i jiný přístup k řešení, a to kombinatorické pravidlo součinu. V každém z pěti míst ve slově můžeme vybírat z 26 písmen. Pokud jednotlivé počty možností výběru mezi sebou vynásobíme, dostaneme následující výpočet

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 11\,881\,376.$$

Vidíme, že všech různých slov je 11 881 376.

Příklad 2.30

2.30. Ve hře „Člověče nezlob se“ jsme hodili čtyřikrát hrací kostkou. Kolik je různých možností, jaké hodnoty čísel následovaly v hodech za sebou?

Řešení: Je zřejmé, že ve více hodech může padnout stejné číslo. Bude se tedy jednat o úlohu s opakováním. Je rozdíl, jestli například v prvním hodu padla šestka a v druhém jednička (tj. nasadili jsme novou figurku a pak jsme ji posunuli na sousední políčko), či naopak (tj. nejdříve jsme nějakou figurkou posunuli o jedno pole a pak nasadili novou figurku), tedy záleží na pořadí prvků, a proto se jedná o variace. Dále vidíme, že můžeme vybírat ze šesti prvků (v každém hodu může padnout číslo jedna až šest), proto $n = 6$, a že vznikající skupina má čtyři prvky (čtyři hody), čili $k = 4$. Budeme tedy pracovat s variacemi čtvrté třídy ze šesti prvků s opakováním. Počet těchto variací vypočítáme za využití vzorce (2.11) následovně

$$V_4'(6) = 6^4 = 1\,296.$$

Postup s využitím kombinatorického pravidla součinu je následující. V každém ze čtyř hodů může padnout 6 možností. Pokud jednotlivé počty možností mezi sebou vynásobíme, dostaneme výpočet $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$. Vidíme, že všech různých možností, jaké hodnoty čísel následovaly v hodech za sebou, je 1 296.

2.31. Kolik můžeme vytvořit různých kódů Morseovy abecedy, které mají maximální délku čtyři?

Příklad 2.31

Řešení: Tento příklad je poněkud odlišný od předchozích. V čem se liší? Nemáme danou přesnou požadovanou délku vytvářeného řetězce, ale horní omezení této délky. Musíme tedy řešení příkladu rozdělit do několika částí. V první části vypočítáme počet kódů délky jedna, v druhé části délky dvě atd. Je zřejmé, že jednotlivé části jsou disjunktní (tj. nemůže současně nastat, že by kód měl dvě různé délky). Můžeme tedy využít kombinatorické pravidlo součtu a celkový počet spočítáme jako součet výsledků jednotlivých částí.

Je zřejmé, že výpočet počtu kódů v jednotlivých částech bude obdobný. Proto si můžeme postup vysvětlit pouze na jedné z nich, a to například na té nejsložitější - čtvrté části. Počítáme tedy počet různých kódů Morseovy abecedy, které mají délku čtyři.

Můžeme si připomenout, že Morseova abeceda se skládá ze dvou znaků, a to tečky a čárky. Víme, že existují kódy skládající se z více stejných znaků, bude se tedy jednat o úlohu s opakováním. Je zřejmé, že záleží na pořadí prvků, a proto se jedná o variace.

Jak jsme už uvedli, můžeme vybírat ze dvou prvků (tečka-čárka), proto $n = 2$, a že vznikající skupina má čtyři prvky, čili $k = 4$. Budeme tedy používat variace čtvrté třídy ze dvou prvků s opakováním. Počet variací vypočítáme za využití vzorce (2.11) následovně

$$V_4'(2) = 2^4 = 16.$$

Obdobně bychom odvodili postup pro výpočet počtu i v ostatních částech

$$V_3'(2) = 2^3 = 8 \qquad V_2'(2) = 2^2 = 4 \qquad V_1'(2) = 2^1 = 2.$$

A jak už jsme před chvílí zmínili, výsledný počet spočítáme jako součet výsledků všech čtyř částí, $2 + 4 + 8 + 16 = 30$, tedy celkový počet všech kódů Morseovy abecedy, které mají maximální délku čtyři, je 30.

Definice 2.4.3. *Permutace* z *n* prvků je uspořádaná *n*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou. Počet všech takovýchto permutací značíme $P(n)$ a vypočítáme jej dle vzorce

$$P(n) = n!. \tag{2.12}$$

Předchozí definici můžeme formulovat i jinak, a to na základě definice variací. *Permutace* z n prvků je každá variace n-té třídy z těchto n prvků.

2.32. Čtyři běžci se účastní závodu. Kolik existuje možností konečného pořadí?

Příklad 2.32

Řešení: Každému běžci bude přiřazeno jedno pořadí, zřejmě není možno, aby jeden závodník byl zároveň na dvou různých místech. Jedná se tedy o úlohu bez opakování. Zároveň je jasné, že záleží na pořadí prvků (tj. závodníků), a proto se jedná o variace.

Vybíráme ze čtyř prvků, tedy $n = 4$, vznikající skupina má mít čtyři prvky, čili $k = 4$. Je vidět, že $k = n$, budou nás zajímat permutace ze čtyř prvků bez opakování. Počet permutací vypočítáme za využití vzorce (2.12) následovně

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Jiný způsob výpočtu by mohl být s využitím kombinatorického pravidla součinu. Vidíme, že prvnímu závodníkovi můžeme přisoudit kterékoliv ze čtyř konečných umístění, druhému už jen tři, protože jedno z míst už je obsazeno prvním závodníkem. Obdobnými úvahami bychom došli k závěrům, že třetímu závodníkovi můžeme přisoudit už jen dvě umístění, až na posledního, čtvrtého závodníka už zbylo pouze jediné, vynucené pořadí bez možnosti volby. Po vynásobení všech počtů možností dostáváme následující výpočet, který nám dává stejný výsledek jako předchozí výpočet $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Opět si ukážeme, jak si můžeme výpočet ověřit bez znalosti vzorce (2.12). Tak jako v předchozích případech si můžeme například vypsat všechny možnosti.

$$
\begin{array}{ll}
(1-A, 2-B, 3-C, 4-D) & (1-C, 2-A, 3-B, 4-D)\\
(1-A, 2-B, 3-D, 4-C) & (1-C, 2-A, 3-D, 4-B)\\
(1-A, 2-C, 3-B, 4-D) & (1-C, 2-B, 3-A, 4-D)\\
(1-A, 2-C, 3-D, 4-B) & (1-C, 2-B, 3-D, 4-A)\\
(1-A, 2-D, 3-B, 4-C) & (1-C, 2-D, 3-A, 4-B)\\
(1-A, 2-D, 3-C, 4-B) & (1-C, 2-D, 3-B, 4-A)\\
(1-B, 2-A, 3-C, 4-D) & (1-D, 2-A, 3-B, 4-C)\\
(1-B, 2-A, 3-D, 4-C) & (1-D, 2-A, 3-C, 4-B)\\
(1-B, 2-C, 3-A, 4-D) & (1-D, 2-B, 3-A, 4-C)\\
(1-B, 2-C, 3-D, 4-A) & (1-D, 2-B, 3-C, 4-A)\\
(1-B, 2-D, 3-A, 4-C) & (1-D, 2-C, 3-A, 4-B)\\
(1-B, 2-D, 3-C, 4-A) & (1-D, 2-C, 3-B, 4-A)
\end{array}
$$

Vidíme, že všech možných permutací je opravdu 24.

Příklad 2.33

2.33. Kolika způsoby můžeme uspořádat v poličce sedm různých knih?

Řešení: Každé knize přidělíme jedno pořadí od začátku police, zřejmě není možno, aby jedna kniha byla zároveň na dvou různých místech. Jedná se tedy o úlohu bez opakování. Zároveň je jasné, že záleží na pořadí prvků (tj. knih), a proto se jedná o variace. Vybíráme ze sedmi prvků, tedy $n = 7$. Dále si uvědomme, že vznikající skupina má mít sedm prvků, čili $k = 7$. Je vidět, že $k = n$, budeme tedy pracovat s permutacemi ze sedmi prvků bez opakování. Počet permutací vypočítáme za využití vzorce (2.12) následovně

$$P(7) = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040.$$

Opět můžeme zvolit i druhý způsob s využitím kombinatorického pravidla součinu. Vidíme, že první knize můžeme přisoudit kterékoliv ze sedmi umístění, druhé už jen šest, protože jedno z míst už je obsazeno první knihou. Obdobnými úvahami bychom došli k závěrům, že třetí knize můžeme přisoudit už jen pět umístění, a tak dále, až na poslední, sedmou knihu už zbyde pouze jediné, vynucené pořadí bez možnosti volby. Po vynásobení všech počtů možností dostáváme následující výpočet, který nám dává stejný výsledek jako předchozí výpočet

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040.$$

Knihy můžeme uspořádat 5 040 způsoby.

Příklad 2.34

2.34. Ve třídě je 15 žáků, 9 dívek a 6 hochů. Ze třídy vycházejí v řadě po jednom, nejdříve všechny dívky a potom všichni chlapci. Kolika různými způsoby mohou vycházet?

Řešení: Nejdříve vycházejí všechny dívky. Obdobně jako v předchozích dvou příkladech bychom usoudili, že počet různých formací, ve kterých mohou ze třídy vycházet dívky, se bude počítat jako počet permutací z 9 prvků. Poté budou vycházet všichni chlapci a počet formací chlapců spočítáme jako počet permutací ze 6 prvků. Ke každé formaci dívek můžeme přiřadit každou z formací hochů, a proto můžeme využít kombinatorického pravidla o součinu a vynásobit vzájemně oba počty permutací. Výpočet tedy bude

$$P(9) \cdot P(6) = 9! \cdot 6! = 362\,880 \cdot 720 = 261\,273\,600.$$

Pokud bychom zvolili druhý způsob s využitím kombinatorického pravidla součinu, musíme si uvědomit, že na prvním místě může vyjít kterákoliv z devíti dívek, druhém už jen jedna ze zbývajících osmi dívek, protože jedna dívka už vyšla. Obdobnými úvahami bychom dospěli až k úvaze, že na devátém místě vyjde poslední z dívek (tedy bez volby). Obdobné úvahy uděláme i pro další místa. Na desátém místě může vycházet libovolný ze šesti chlapců, na jedenáctém už jen jeden z pěti zbývajících a na posledním patnáctém místě musí vyjít poslední ze šesti chlapců (opět bez možnosti volby). Po vynásobení všech počtů možností dostáváme následující výpočet, který nám dává stejný výsledek jako předchozí výpočet

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 261\,273\,600.$$

Žáci mohou vyjít ze třídy 261 273 600 způsoby.

Definice 2.4.4. *Permutace s opakováním* z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou. Počet všech takovýchto permutací značíme $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ značí počty výskytů každého z *n* prvků, a vypočítáme jej dle vzorce

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}. \tag{2.13}$$

2.35. Kolik různých „slov“ můžeme sestavit přemisťováním písmen slova ABBA? **Příklad 2.35**

Řešení: Vidíme, že chceme zjistit počet různých pořadí daných prvků, tj. počet permutací. Na rozdíl od předešlých příkladů, se v nabídce prvky vyskytují dvakrát. Nemáme čtyři znaky na výběr, ale pouze dva. Nebude se proto jednat o permutace ze 4 prvků (4 = počet znaků ve slově ABBA), ale permutace s opakováním pouze ze dvou prvků (2 = počet různých znaků ve slově ABBA), kde se oba prvky vyskytují dvakrát, zapisujeme $P'(2,2)$. Výpočet s využitím vzorce (2.13) bude

$$P'(2,2) = \frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{2 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6.$$

A co máme dělat, pokud neznáme vzorec (2.13)? To už není tak triviální jako počítání v dosavadních případech. Nejprve si musíme uvědomit, že počet všech různých prohazování písmen slova ABBA, s tím, že každé ze skupiny stejných písmen nějak odlišíme (např. oindexujeme, nebo obarvíme), spočítáme jako počet permutací ze 4 prvků. Přičemž 4 zmíněné prvky lze rozdělit do dvou disjunktních množin obsahujících stejná písmena. V každé z těchto množin jsou dvě písmena, kombinační pravidlo součtu, ale i prostý rozum nám říkají, že $4 = 2 + 2$, neboli že celkový počet písmen ve slově je roven součtu počtů v jednotlivých skupinách $P(4) = 4! = 24$. Uvědomme si, že prohozením obou písmen A se situace nezmění, to znamená, že před chvílí vypočítaný celkový počet možností musíme vydělit 2. Stejná úvaha platí i pro písmena B, opět počet možností musíme vydělit 2. Celkový počet možností tedy bude $\frac{24}{2 \cdot 2} = 6$, což koresponduje s výpočtem dle vzorce (2.13). Můžeme vytvořit 6 různých „slov“.

Ještě si ukážeme, jak si můžeme výpočet ověřit bez znalosti kombinatorických výpočtů. Vypíšeme si opět všechny možnosti. Samozřejmě zase musíme postupovat systematicky, abychom žádnou z možností nevynechali.

$$AABB \qquad ABAB \qquad ABBA \qquad BAAB \qquad BABA \qquad BBAA$$

Vidíme, že jsme opravdu vypsali šest možností.

2.36. Kolik různých „slov“ můžeme sestavit přemisťováním písmen slova MATEMATIKA? **Příklad 2.36**

Řešení: Obdobně jako v předchozích příkladech vidíme, že chceme zjistit počet různých pořadí daných prvků, tj. počet permutací. Je tu však jedna odchylka od předešlých příkladů, a to fakt, že se v nabídce některé prvky vyskytují několikrát. Nebude se tedy jednat o permutace z deseti prvků (10 = počet znaků ve slově MATEMATIKA), ale permutace s opakováním pouze ze šesti prvků (6 = počet různých znaků ve slově MATEMATIKA), přesněji řečeno, permutace s opakováním, kde se jeden z prvků vyskytuje dvakrát, druhý třikrát, třetí dvakrát, čtvrtý, pátý a šestý pouze jedenkrát. Po uspořádání jednotlivých počtů výskytu jednotlivých znaků můžeme psát $P'(3,2,2,1,1,1)$. Výpočet s využitím vzorce (2.13) tedy bude

$$P'(3,2,2,1,1,1) = \frac{(3+2+2+1+1+1)!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{10!}{6\cdot 2\cdot 2} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200.$$

A jak bychom mohli postupovat, pokud bychom neznali vzorec (2.13)? Nejprve si musíme uvědomit, že počet všech různých prohazování písmen slova MATEMATIKA s tím, že každé ze skupiny stejných písmen nějak odlišíme (např. oindexujeme, nebo obarvíme), spočítáme jako počet permutací z 10 prvků. Přičemž 10 zmíněných prvků lze rozdělit do šesti disjunktních množin obsahujících stejné znaky. Počet prvků těchto množin je popořadě $3, 2, 2, 1, 1, 1$, tedy $10 = 3+2+2+1+1+1$, jak mimo jiné vyplývá z kombinačního pravidla součtu.

Dále si uvědomme, že například prohozením obou písmen M se situace nezmění, to znamená, že před chvílí vypočítaný celkový počet možností musíme vydělit 2. Stejná úvaha platí i pro písmena T, opět počet možností musíme vydělit 2.

A podobná, i když poněkud složitější úvaha bude platit i pro písmena A. Ta se vyskytují tři. Jaký je tedy počet jejich prohození? První A si může vybrat libovolné ze tří pořadí, druhé A si už může vybrat jen jedno ze dvou pořadí a třetí A už má jen jedinou možnost. Aplikováním kombinatorického pravidla součinu dostáváme počet prohození vypočtený jako $3\cdot 2\cdot 1 = 3!$. Celkový počet možností tedy musíme ještě vydělit tímto počtem.

Pokud předchozí úvahy uspořádáme do uceleného výpočtu, dostáváme

$$\frac{10!}{2\cdot 2\cdot 3!} = 151\,200,$$

což koresponduje s výpočtem dle vzorce (2.13). Můžeme vytvořit 151 200 různých „slov“.

Příklad 2.37

2.37. Máme na hromadu poskládat deset ručníků, tři stejné červené, čtyři stejné modré, dva bílé a jeden zelený. Kolik různých barevných variací můžeme poskládat?

Řešení: I zde se jedná o zjišťování počtu různých pořadí daných prvků, tj. počet permutací. Opět máme v nabídce některé prvky několikrát. Bude se jednat o permutace s opakováním ze čtyř prvků (4 = počet různých barev ručníků). Po uspořádání všech počtů výskytu jednotlivých barev můžeme psát $P'(4,3,2,1)$. Výpočet s využitím vzorce (2.13) bude

$$P'(4,3,2,1) = \frac{(4+3+2+1)!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{10!}{24\cdot 6\cdot 2} = \frac{3\,628\,800}{288} = 12\,600.$$

Můžeme vytvořit 12 600 různých barevných variací.

Příklad 2.38

2.38. V knihovně mají v regálu třikrát Babičku B. Němcové, pětkrát Máj od K. H. Máchy, šestkrát R.U.R od K. Čapka. Knihy jsou uloženy náhodně, bez jakéhokoliv systematického urovnání. Kolik existuje různých možností, jak jsou knihy uspořádány? Předpokládejme, že knihy stejného titulu od sebe nerozeznáme.

Řešení: Opět se jedná o zjišťování počtu různých pořadí daných prvků, tj. počet permutací. V nabídce se některé prvky vyskytují několikrát. Jedná se o permutace s opakováním ze tří prvků (3 = počet různých knižních titulů). Po uspořádání počtů výskytu jednotlivých titulů můžeme psát $P'(6,5,3)$. Výpočet s využitím vzorce (2.13) bude

$$P'(6,5,3) = \frac{(6+5+3)!}{6!\cdot 5!\cdot 3!} = \frac{14!}{720\cdot 120\cdot 6} = \frac{87\,178\,291\,200}{518\,400} = 168\,168.$$

Existuje 168 168 různých možností uložení knih.

Definice 2.4.5. *Kombinace k-té třídy z n prvků* (*k*-členná kombinace z *n* prvků) je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto *n* prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Počet všech takovýchto kombinací značíme $C_k(n)$ a vypočítáme jej dle vzorce

$$C_k(n) = \binom{n}{k}. \tag{2.14}$$

Kombinace *k*-té třídy z *n* prvků je každá *k*-prvková podmnožina v množině těmito *n* prvky určené.

2.39. Kolika způsoby můžeme vybrat dvojici zástupců ze skupiny šesti studentů? **Příklad 2.39**

Řešení: Je jasné, že tentýž student nemůže být ve vybrané dvojici dvakrát. Proto se jedná o úlohu bez opakování. Dvojice Adam + Eva je zřejmě tatáž dvojice jako Eva + Adam. Na pořadí tedy nezáleží a jedná se o kombinace. Vybíráme z šesti studentů, čili $n = 6$ a vybíráme dvojici, proto $k = 2$. Budeme zjišťovat počet kombinací druhé třídy ze šesti prvků, zapisujeme $C_2(6)$. Výpočet s využitím vzorce (2.14) bude

$$C_2(6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Dvojici můžeme vybrat 15 způsoby. Jak bychom mohli uvažovat jinak? Prvního člena do dvojice můžeme vybrat šesti způsoby, druhého už jen pěti (jeden student ze šesti už do dvojice vybrán byl). Použitím kombinatorického pravidla součinu dostáváme

$$6 \cdot 5 = 30.$$

Jak již bylo výše zmíněno, dvojice Adam + Eva je tatáž dvojice jako Eva + Adam, což platí i pro všechny jiné výběry, proto před chvílí vypočítaný celkový počet možností musíme vydělit dvěma

$$\frac{30}{2} = 15.$$

Obdrželi jsme shodný výsledek jako v předchozím způsobu řešení. A co dělat v případě, když neznáme žádné kombinatorické výpočty? Pokusíme se všechny možnosti vypsat. Pro jednoduchost si studenty označíme písmeny A, B, C, D, E, F.

$$\begin{array}{lllll}
A, B & A, C & A, D & A, E & A, F \\
B, C & B, D & B, E & B, F & \\
C, D & C, E & C, F & & \\
D, E & D, F & & & \\
E, F & & & &
\end{array}$$

Vidíme, že možností je opravdu 15.

2.40. Na tácku je deset různých zákusků. Čtyři si chceme odnést. Kolik je různých možností, jaké zákusky si odnášíme? **Příklad 2.40**

Řešení: Nemůžeme si vzít tentýž zákusek dvakrát. Proto se jedná o úlohu bez opakování. Pokud si vezmeme sachr a rakvičku, je to totéž, jako bychom si vzali rakvičku a sachr. Na pořadí nezáleží a jedná se o kombinace. Vybíráme z deseti zákusků, proto $n = 10$, a vybíráme čtyři zákusky, proto $k = 4$. Budeme zjišťovat počet kombinací čtvrté třídy z deseti prvků, $C_4(10)$. Výpočet s využitím vzorce (2.14) bude

$$C_4(10) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Zákusky si můžeme vybrat 210 způsoby.

Příklad 2.41

2.41. Kolik přímek určuje 15 různých bodů v rovině, když žádné 3 body neleží v jedné přímce?

Řešení: Každá přímka je určena dvěma *různými* body. Proto se jedná o úlohu bez opakování. Dobře víme, že přímka AB je stejná přímka jako přímka BA. Na pořadí nezáleží a jedná se o kombinace. Jiná úvaha se stejným závěrem by byla, že přímku je možno chápat jako množinu dvou „koncových" bodů, proto kombinace.

Máme dáno 15 bodů, proto $n = 15$, a přímka je množina dvou bodů, proto platí $k = 2$. Budeme zjišťovat počet kombinací druhé třídy z patnácti prvků, $C_2(15)$. Výpočet s využitím vzorce (2.14) bude

$$C_2(15) = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105.$$

Patnáct různých bodů určuje 105 přímek.

Příklad 2.42

2.42. Kolik přímek určuje 15 různých bodů v rovině, když právě 3 body leží v jedné přímce?

Řešení: Případ, že žádné tři body neleží v jedné přímce, jsme vyřešili v předchozím příkladu. Nyní ale právě tři body leží v přímce. To znamená, že místo všech přímek, které by byly dány těmito třemi body, kdyby tyto neležely v jedné přímce, bude možno sestrojit pouze jedinou přímku. Spočítáme nejprve počet přímek, které by byly určeny třemi body neležícími v jedné přímce. Postupujeme stejnou úvahou, jakou jsme udělali v předchozím příkladu pro 15 bodů, budeme zjišťovat počet kombinací druhé třídy ze tří prvků, $C_2(3)$.

$$C_2(3) = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3}{1} = 3$$

Nyní z původního počtu 105 přímek odečteme 3 přímky, které odpadly z výše uvedeného důvodu, a připočteme jednu přímku, která je dána danými třemi body.

$$105 - 3 + 1 = 103$$

Pokud právě tři body z patnácti leží v jedné přímce, pak jsou těmito patnácti body určeny 103 přímky.

Definice 2.4.6. *Kombinace k-té třídy z n prvků* (*k*-členná kombinace z *n* prvků) *s opakováním* je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto *n* prvků. Počet všech takovýchto kombinací značíme $C'_k(n)$ a vypočítáme jej dle vzorce

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}. \qquad (2.15)$$

Ze zápisu

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = P'(k, n-1)$$

vyplývá, že platí

$$C'_k(n) = P'(k, n-1). \qquad (2.16)$$

Příklad 2.43

2.43. Kolika způsoby můžeme koupit 10 bonbónů, jestliže v cukrárně mají pět druhů? Předpokládejme, že od každého druhu mají dostatečný počet (tedy minimálně 10) bonbónů.

Řešení: Jistě si můžeme koupit více stejných bonbónů. Proto se jedná o úlohu s opakováním. Koupíme-li si jeden čokoládový a jeden mentolový, budeme mít stejný nákup, jako když si koupíme jeden mentolový a jeden čokoládový bonbón. Nezáleží na pořadí, a proto je jedná o kombinace.

Vybíráme z pěti druhů, tedy $n = 5$, a chceme koupit deset bonbónů, proto $k = 10$. Budeme zjišťovat počet kombinací desáté třídy z pěti prvků s opakováním, $C'_{10}(5)$. Výpočet s využitím vzorce (2.15) bude,

$$C'_{10}(5) = \binom{5+10-1}{10} = \frac{14!}{10! \cdot 4!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,001.$$

Bonbóny můžeme nakoupit 1 001 způsoby.

Opět můžeme použít i jiný způsob uvažování. Symbolem I (viz předchozí příklad) nyní označíme koupený bonbón, symbolem O rozhraní mezi jednotlivými druhy bonbónů. Takže například symbolický zápis IIIOIIOIOOIIII znamená, že jsme koupili tři bonbóny prvního druhu, dva bonbóny druhého druhu, jeden třetího, žádný bonbón čtvrtého druhu a čtyři bonbóny pátého druhu. Celkem jsme koupili $3+2+1+0+4 = 10$ bonbónů. Takže hledáme všechna rozložení deseti symbolů I a čtyř symbolů O. V tomto případě budeme hledat permutace s opakováním $P'(10, 4)$. Výpočet s využitím vzorce (2.13) bude

$$P'(10,4) = \frac{(10+4)!}{10! \cdot 4!} = \frac{14!}{3\,628\,800 \cdot 24} = \frac{87\,178\,291\,200}{87\,091\,200} = 1\,001.$$

Obdrželi jsme tedy stejný výsledek jako v předchozím postupu výpočtu.

Příklad 2.44

2.44. Určete, kolika způsoby je možné rozmístit čtyři stejné sirky do tří krabiček.

Řešení: Vybíráme vždy pro každou ze čtyř sirek jednu ze tří krabiček. Pro dvě různé sirky můžeme vybrat stejnou krabičku. Jedná se o úlohu s opakováním.

Je jedno, jestli nejprve uložíme do krabičky jednu nebo druhou sirku, na pořadí nezáleží, jedná se proto o kombinace. Vybíráme ze tří krabiček, tedy $n = 3$, a chceme uložit čtyři sirky, proto $k = 4$. Budeme zjišťovat počet kombinací čtvrté třídy ze tří prvků s opakováním, $C'_4(3)$. Výpočet s využitím vzorce (2.15) bude

$$C'_4(3) = \binom{3+4-1}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

Sirky můžeme uložit 15 způsoby. Jaký jiný způsob úvah bychom mohli použít? Nejprve se pokusíme najít všechny možnosti.

č. možnosti	1. krabička	2. krabička	3. krabička
1.	IIII		
2.		IIII	
3.			IIII
4.	III	I	
5.	III		I
6.	I	III	
7.		III	I
8.	I		III
9.		I	III
10.	II	II	
11.	II		II
12.		II	II
13.	II	I	I
14.	I	II	I
15.	I	I	II

Vidíme, že jsme vypsali všech 15 možností. Výpis můžeme provést i symbolicky. Symbolem I budeme značit sirku a symbolem O oddělení dvou sousedních krabiček.

Tento výpis vypadá následovně.

1. – $IIIIOO$	9. – $OIOIII$
2. – $OIIIIO$	10. – $IIOIIO$
3. – $OOIIII$	11. – $IIOOII$
4. – $IIIOIO$	12. – $OIIOII$
5. – $IIIOOI$	13. – $IIOIOI$
6. – $IOIIIO$	14. – $IOIIOI$
7. – $OIIIOI$	15. – $IOIOII$
8. – $IOOIII$	

V symbolickém zápisu vidíme, že vlastně vytváříme všechna možná rozmístění čtyř symbolů I a dvou symbolů O. To nás vede k použití permutací s opakováním, $P'(4,2)$. Výpočet s využitím vzorce (2.13) bude

$$P'(4,2) = \frac{(4+2)!}{4! \cdot 2!} = \frac{6!}{24 \cdot 2} = \frac{720}{48} = 15.$$

Opět jsme se dostali ke stejnému výsledku.

2.5 Cvičení

2.5.1. Vypočítejte

a) $6!$

b) $\dfrac{28!}{26!}$

c) $\dfrac{10! + 12!}{9!}$

d) $\dfrac{5! \cdot 6!}{8!}$

e) $\dfrac{7! + 8!}{3! \cdot 5!}$

f) $\dfrac{35! - 38!}{34! + 32!}$

2.5.2. Uveďte podmínky řešitelnosti a upravte výrazy

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

b) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$

c) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$

d) $\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!}$

e) $\dfrac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+1)! - (n-2)!}$

f) $\dfrac{(n+1)! \cdot (n+2)!}{(n+1)! \cdot (n-1)!}$

2.5.3. Vypočítejte

a) $\dbinom{8}{3}$ b) $\dbinom{20}{2}$ c) $\dbinom{67}{64}$ d) $\dbinom{34}{40}$

2.5.4. Uveďte podmínky řešitelnosti a upravte výrazy

a) $\dbinom{n+1}{2}$

b) $\dbinom{n+3}{n+1}$

c) $\dbinom{n-1}{n-3}$

d) $\dbinom{n+2}{n-2}$

e) $\dbinom{n-1}{n+2}$

f) $\dbinom{4-n}{2-n}$

2.5.5. Řešte rovnice:

a) $(n+4)! = 2(n+3)!$

b) $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!} = 20$

c) $(n+3)! \cdot (n+5)! = (n+2)! \cdot (n+4)!$

d) $\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!} = \dfrac{(n-3)!}{(n-2)!}$

e) $(n+2)! = (n+1)! + n!$

f) $(n+3)! - 12n! = n \cdot (n+2)! + 3(n+1)!$

2.5.6. Řešte nerovnice:

a) $(n+6)! \leq 7(n+5)!$

b) $(n+8)! \leq 6(n+6)!$

c) $(n+4)! \cdot (n+1)! \geq 18n! \cdot (n+3)!$

d) $(n+1)! \cdot (n+6)! \leq n! \cdot (n+5)!$

e) $(n+6)! \cdot (n-5)! \geq n \cdot (n+5)! \cdot (n-4)!$

f) $(n+4)! + (n+2)! \leq 2(n+1)! + 4(n+3)!$

2.5.7. Řešte rovnice

a) $\binom{n}{2} = \binom{4}{2}$

b) $\binom{5}{n} = \binom{5}{3}$

c) $\binom{n+2}{n} = \binom{5}{2}$

d) $\binom{n}{2} + \binom{n}{n-3} = \binom{7}{4}$

e) $\binom{n+6}{n+3} - \binom{n+2}{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \binom{6}{3}$

f) $\binom{n+4}{2} + 5 = \binom{n+5}{n+3}$

2.5.8. Řešte nerovnice

a) $\binom{n}{4} \leq \binom{6}{4}$

b) $\binom{6}{n} < \binom{6}{n+1}$

c) $\binom{n+2}{n} > \binom{7}{3}$

d) $\binom{n-3}{n-5} \geq \binom{n+1}{1}$

e) $\binom{n+3}{2} > \binom{n-3}{2}$

f) $12 \cdot \binom{n+2}{n-2} \leq (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$

2.5.9. Pomocí binomické věty vypočítejte

a) $1{,}01^{10}$ b) $2{,}003^{7}$ c) $3{,}2^{5}$

2.5.10. Určete člen rozvoje $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$, který

a) obsahuje x^5,

b) obsahuje x^{-10},

c) je absolutním členem.

2.5.11. V jídelně jsou na výběr čtyři druhy příloh a šest druhů mas. Předpokládejme, že každá příloha je vhodná ke každému z mas. Kolik různých jídel (rozumějme jedna příloha + jedno maso) můžeme objednat?

2.5.12. Ve firmě je zaměstnáno 15 metodiků, 10 analytiků a 20 programátorů.

a) Kolika různými způsoby můžeme vybrat tým složený z jednoho metodika, jednoho analytika a jednoho programátora?

b) Kolika způsoby můžeme vybrat tříčlenný tým programátorů?

c) Majitel velmi pospíchá na práci, proto vytvořil tým ze tří metodiků, kteří toho dne přišli první do práce. Kolik je možností složení tohoto týmu?

d) Majitel každé ráno v pracovním týdnu zaznamenává jméno prvního příchozího zaměstnance. Kolik různých týdenních zápisů může být vytvořeno?

2.5.13. Máme k dispozici pět výrobků I. kvality, tři výrobky II. kvality a jeden zmetek.

a) Kolika různými způsoby můžeme vybrat čtyři výrobky?

b) Jeden výrobek posíláme do Kladna, jeden do Kolína a jeden do Prahy. Kolika způsoby toto můžeme udělat?

c) Máme za úkol vyexpedovat jeden výrobek I.kvality, jeden výrobek II.kvality a jeden zmetek. Kolika způsoby toto můžeme provést?

d) Na každý výrobek je ve skladu připraveno jedno místo. Kolika různými způsoby můžeme výrobky do skladu uložit?

e) Kolika způsoby můžeme vybrat pětici výrobků, aby mezi nimi byl alespoň jeden zástupce každé kvalitativní kategorie?

f) Všechny výrobky jsme poskládali do řady. Kolik existuje různých uspořádání z hlediska kvality (tj. například: I. kvalita - I. kvalita - II. kvalita - zmetek - II. kvalita - I. kvalita - II. kvalita - I. kvalita - I. kvalita).

2.5.14. Na trhu figuruje v daném odvětví deset firem. My chceme spolupracovat pouze se třemi firmami, které měly vloni nejvyšší zisky. Kolik je teoreticky různých možností s jakou trojicí firem budeme spolupracovat?

2.5.15. Ve třídě je deset studentů. Dáváme hlasovat o nejoblíbenějšího studenta. Každý ze studentů napíše na lísteček jméno svého oblíbence. Nesmí přitom napsat sám sebe. Každý student odkryje jméno vyvoleného, papírek stále drží v ruce. Kolik různých možností může nastat?

Výsledky příkladů

2.5.1 a) 720 **b)** 756 **c)** $1\ 330$ **d)** $2,148\ 571\ 4$ **e)** 63 **f)** $-1\ 769\ 947,51$ **2.5.2 a)** $n^2+3n+2, n \geq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$ **b)** $n^2+5n+6, n \geq -1 \wedge n \in \mathbb{Z}$ **c)** $n^2-3n+2, n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$ **d)** $n^4+2n^3-n^2-2n, n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{N}$ **e)** $\frac{n^4+3n^3-n^2-3n}{n^3-n-1}, n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{N}$ **f)** $n^3+3n^2+2n, n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$ **2.5.3 a)** 56 **b)** 190 **c)** $47\ 905$ **d)** nelze **2.5.4 a)** $\frac{n^2+n}{2}, n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$ **b)** $\frac{n^2+5n+6}{2}, n \geq -1 \wedge n \in \mathbb{Z}$ **c)** $\frac{n^2-3n+2}{2}, n \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$ **d)** $\frac{n^4+2n^3-n^2-2n}{24}, n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{N}$ **e)** nelze **f)** $\frac{n^2-7n+12}{2}, n \leq 2 \wedge n \in \mathbb{Z}$ **2.5.5 a)** $n \in \{-2\}$ **b)** $n \in \{-1\}$ **c)** $\emptyset$ **d)** $\emptyset$ **e)** $n \in \{0\}$ **f)** $n \in \{1\}$ **2.5.6 a)** $n \in \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$ **b)** $n \in \{-6,-5\}$ **c)** $n \in \{2,3,4,\ldots\}$ **d)** $\emptyset$ **e)** $n \in \{5,6\}$ **f)** $n \in \{-1\}$ **2.5.7 a)** $n \in \{4\}$ **b)** $n \in \{2,3\}$ **c)** $n \in \{5\}$ **d)** $n \in \{6\}$ **e)** $\emptyset$ **f)** $n \in \{1\}$ **2.5.8 a)** $n \in \{4,5,6\}$ **b)** $n \in \{0,1,2,3\}$ **c)** $n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ **d)** $n \in \{8,9,10,\ldots\}$ **e)** $n \in \{5,6,7,\ldots\}$ **f)** $n \in \emptyset$ **2.5.9 a)** $1,104\ 622\ 13$ **b)** $129,350\ 063$ **c)** $335,544\ 32$ **2.5.10 a)** $8\ 064x^5$ **b)** $11\ 520x^{-10}$ **c)** 13 440 **2.5.11** 24 **2.5.12 a)** 3 000 **b)** $C_3(20) = 1\ 140$ **c)** $V_3(15) = 2\ 730$ **d)** $V_5'(45) = 184\ 528\ 125$ **2.5.13 a)** $C_4(9) = 126$ **b)** $V_3(9) = 504$ **c)** $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ **d)** $P(9) = 362\ 880$ **e)** $C_1(1) \cdot C_1(3) \cdot C_3(5) + C_1(1) \cdot C_2(3) \cdot C_2(5) + C_1(1) \cdot C_3(3) \cdot C_1(5) = 65$ **f)** $P'(5,3,1) = 504$ **2.5.14** $V_3(10) = 120$ **2.5.15** $V_{10}'(9) = 3\ 486\ 784\ 401$

Kapitola 3

Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti je část matematiky zabývající se zákonitostí jevů, u kterých není předem známo, zda nastanou, či nikoliv, respektive jevů, u kterých není předem známa jejich výsledná hodnota.

Teorie pravděpodobnosti společně s kombinatorickými úlohami se začala objevovat zejména v kontextu s hazardními hrami. Zmínky o pravděpodobnosti se objevují již před několika tisíci lety, první matematické teorie jsou však známy až ze 17. století a jsou spojovány především se jmény PIERRE DE FERMAT (1601-1665), BLAISE PASCAL (1623-1662) či později THOMAS BAYES (1702-1761) a PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827). Další výrazný rozvoj pravděpodobnosti se projevuje až ve 20. století a je spjat například se jmény ANDREJ NIKOLAJEVIČ KOLMOGOROV (1903-1987), RICHARD THRELKELD COX (1898-1991), ANDREY MARKOV (1856-1922), ale i mnoha dalšími. Rozvoj teorie pravděpodobnosti není ukončen ani v dnešní době, například v souvislosti s kvantovou fyzikou či teorií chaosu.

3.1 Náhodný pokus, náhodný jev

V pravděpodobnostní teorii se setkáváme s poněkud jiným významem pokusu, než jak jej známe například z fyziky. Příkladem fyzikálního pokusu je měření teploty bodu varu vody při daném tlaku. V tomto případě při stejných podmínkách obdržíme shodný výsledek pokusu.

V teorii pravděpodobnosti však u pokusu předem výsledek znát nemůžeme (ani nesmíme) a je časté, že při stejných podmínkách obdržíme zcela odlišné výsledky pokusu. V tomto případě mluvíme o *náhodném pokusu*. Učebnicovým příkladem náhodného pokusu je například hod kostkou.

Libovolný výsledek náhodného pokusu nazýváme *náhodným jevem*. Pro lepší představu v některých fázích výkladu je možná lépe říci, že náhodný jev je předpověď výsledku. Co může být například tipem na výsledek výše zmíněného náhodného pokusu hod kostkou?

Někdo by možná řekl „Padne číslo 6“. Jiný třeba řekne „Padne číslo 2“. Jsou ale i opatrní tipaři a ti mou říci „Padne sudé číslo“ či „Padne číslo větší než 3“. Možná existuje někdo, kdo v životě neviděl kostku, a ten může říci „Padne číslo větší než 10“ či naopak „Padne číslo menší než 8“. Toto všechno jsou příklady náhodných jevů. V čem zásadním se tyto jevy od sebe liší?

Co to znamená „Padne sudé číslo“? Kdo zná, jak vypadá kostka, jistě odpoví „Padne 2, nebo padne 4, nebo padne 6“. Obdobně bychom mohli rozepsat i jevy „Padne číslo větší než 3“ či „Padne číslo menší než 8“.

Jevy „Padne číslo 6“ či „Padne číslo 2“ však takto rozložit nemůžeme. Takovýmto jevům říkáme *elementární jevy*.

Jiným úhlem pohledu můžeme objevit jinou odlišnost. O jevu „Padne číslo větší než 10“ každý řekne, že je to nesmysl, že to nikdy nastat nemůže. Podobným jevům se říká *nemožné jevy*. Naopak víme, že jev „Padne číslo menší než 8“ musí nastat vždy, jiná možnost totiž neexistuje. A takovým jevům říkáme *jevy jisté*. Jevům, které nejsou zmíněnými krajními případy, říkáme *jevy možné*. Vše můžeme shrnout následovně.

Definice 3.1.1. Množinu všech možných (elementárních) výsledků náhodného pokusu značíme Ω, nazýváme ji *množina všech elementárních jevů*. Jednotlivé možné (elementární) výsledky pokusu značíme ω, nazýváme *elementární jev*. Podmnožiny množiny Ω se nazývají *náhodné jevy*, značíme velkými písmeny převážně z počátku abecedy.

Z výše uvedeného je zřejmé, že jev jistý je roven celé množině všech elementárních jevů ($\Omega \subseteq \Omega$) a jev nemožný je roven prázdné množině ($\emptyset \subseteq \Omega$).

Příklad 3.1

3.1. Vypište množinu všech elementárních jevů náhodného pokusu hod dvěma mincemi.

Řešení: Na minci mohou padnout dvě možnosti, rub - budeme značit R a líc - budeme značit L. Častým nápadem studentů, jak řešit úlohu o hodu dvěma mincemi, je následující množina.

$$\Omega = \{2 \times R, R + L, 2 \times L\}$$

Toto řešení má ovšem jeden velký háček. Uvědomme si, že druhý jev (tj. „padne jeden rub a jeden líc") můžeme vidět jako sloučení dvou „jednodušších" jevů. Jedním z těchto jevů je „na první minci padne rub a na druhé líc", druhým jevem je „na první minci padne líc a na druhé rub". Proto je nutno uvádět množinu všech elementárních jevů následovně.

$$\Omega = \{(R, R), (R, L), (L, R), (L, L)\}$$

Příklad 3.2

3.2. Tři kamarádi si v naprosté tmě rozdělují a oblékají své kabáty. Sledujeme, kdo má a kdo nemá svůj kabát. Vypište množinu všech elementárních jevů.

Řešení: Častou úvahou studentů při řešení úlohy o kabátech je sledování, zda každý z kamarádů má, či nemá svůj kabát. Při této úvaze je možno označit „A" na dané pozici - daný kamarád má svůj kabát, „N" na dané pozici - daný kamarád nemá svůj kabát. Pak množina všech elementárních jevů vypadá následovně.

$$\Omega = \{(AAA), (AAN), (ANA), (ANN), (NAA), (NAN), (NNA), (NNN)\}$$

To znamená, že máme osm elementárních jevů. Jak by ale vypadala například možnost (AAN)? První a druhý kamarád mají v tomto případě své kabáty, ale třetí nikoliv. Jak je to možné? Čí kabát vlastně tento kamarád má? Vidíme, že předchozí úvaha byla zcela chybná. Uvědomme si však, co znamená, že první kamarád K_1 nemá svůj kabát. V tomto případě může mít buď kabát druhého nebo třetího kamaráda. Proto je lépe utvářet množinu všech elementárních jevů následovně. Označme si K_1, K_2, K_3 jednotlivé kamarády a k_1, k_2, k_3 popořadě jejich kabáty. Potom

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} K_1 & k_1 \\ K_2 & k_2 \\ K_3 & k_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_1 & k_1 \\ K_2 & k_3 \\ K_3 & k_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_1 & k_2 \\ K_2 & k_1 \\ K_3 & k_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_1 & k_2 \\ K_2 & k_3 \\ K_3 & k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_1 & k_3 \\ K_2 & k_1 \\ K_3 & k_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K_1 & k_3 \\ K_2 & k_2 \\ K_3 & k_1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vidíme, že v množině Ω není osm, ale pouze šest elementárních jevů.

Můžeme se zamyslet nad tím, co jsme právě vypsali. Vypsali jsme všechny možnosti, jakými mohou být rozděleny tři různé kabáty třem různým lidem. A to znamená, jak jsme blíže probírali v kapitole o kombinatorice, že jsme vypsali všechny možné permutace ze tří prvků.

3.2 Pravděpodobnost náhodného jevu

Pravděpodobnost náhodného jevu je číslo, které je jistou mírou očekávání výskytu jevu. Existují různé definice pravděpodobnosti. Všechny však mají určité vlastnosti společné.

Pravděpodobnost jevu se vyjadřuje reálným číslem od 0 do 1, může se pro lepší názornost převést na procenta (tj. od 0% do 100%). Jev, který nemůže nastat (tj. neexistuje situace, kdy by tento jev nastal), má vždy pravděpodobnost 0 a naopak jistý jev má pravděpodobnost 1.

Jednou z nejčastěji využívaných a nejoblíbenějších definic je klasická definice, jak ji formuloval Laplace. Bývá po něm také někdy nazývána. Je použitelná pouze v případě, kdy je množina všech elementárních jevů konečná, tj. všech možných výsledků náhodného pokusu je konečně mnoho. Dále je nutno, aby všechny tyto elementární jevy byly stejně možné.

Definice 3.2.1. (Klasická definice pravděpodobnosti) Nechť A je náhodný jev, $n = \|\Omega\|$ značí počet prvků množiny všech elementárních jevů, $m = \|A\|$ značí počet prvků množiny A. Pravděpodobností jevu A nazveme číslo

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3.1}$$

Je zřejmé, že tato definice splňuje všechny požadované vlastnosti. Z definice náhodného jevu víme, že je to libovolná podmnožina množiny všech elementárních jevů Ω, tedy i prázdná podmnožina. Zřejmě platí $m = \|A\| = \|\emptyset\| = 0$, pak tedy zřejmě $P(A) = P(\emptyset) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$, kde n je počet prvků Ω, tudíž nějaké přirozené číslo. Druhou extrémní možností je, že A je celá množina všech elementárních jevů. Pak platí $m = \|A\| = \|\Omega\| = n$, a tedy i $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$. V ostatních případech $A \subset \|\Omega\|$ je zřejmě $0 < m < n$, a proto $0 < P(A) < 1$.

Lidově řečeno, podle klasické definice počítáme pravděpodobnost jako podíl počtu těch případů, které mne zajímají ku počtu všech případů.

3.3. Házejme jedenkrát hrací kostkou a sledujme číslo, které v tomto hodu padne. Za pomocí klasické definice pravděpodobnosti vypočtěte pravděpodobnost jevů **Příklad 3.3**

A	...	„Padne číslo 6“
B	...	„Padne číslo 2“
C	...	„Padne sudé číslo“
D	...	„Padne číslo větší než 2“
E	...	„Padne číslo větší než 10“
F	...	„Padne číslo menší než 8“.

Řešení: Nejprve si vypíšeme množinu všech elementárních jevů Ω a všechny zmíněné jevy vyjádříme jako množiny.

$$\begin{array}{lll} \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} & & \\ A = \{6\} & B = \{2\} & C = \{2,4,6\} \\ D = \{3,4,5,6\} & E = \emptyset & F = \{1,2,3,4,5,6\} \end{array}$$

Nyní můžeme přistoupit k vlastním výpočtům.

$$\begin{array}{lll} P(A) = \dfrac{1}{6} & P(B) = \dfrac{1}{6} & P(C) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \\ P(D) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} & P(E) = \dfrac{0}{6} = 0 & P(F) = \dfrac{6}{6} = 1 \end{array}$$

Z dalších možných definic pravděpodobnosti můžeme uvést statistickou definici pravděpodobnosti, která říká, že při velkém počtu pokusů se bude (za jistých předpokladů) relativní četnost výskytu jevu blížit pravděpodobnosti daného jevu.

Definice 3.2.2. (Statistická definice pravděpodobnosti) Opakujme náhodný pokus N-krát. Z těchto N pokusů pozorujeme výskyt náhodného jevu A v M případech. Poměr $\frac{M}{N}$ pak znamená relativní četnost výskytu jevu A. Jestliže se s rostoucím N relativní četnost blíží nějakému číslu, pak toto číslo můžeme považovat za pravděpodobnost $P(A)$ daného jevu. Statistickou pravděpodobnost jevu A tak definujeme jako limitu podílu:

$$P(A) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{M}{N}$$

Příklad 3.4

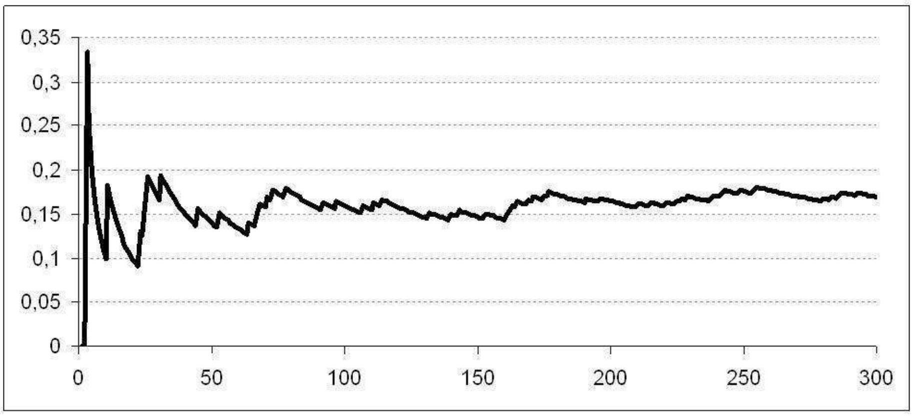
3.4. Za pomocí statistické definice pravděpodobnosti určete pravděpodobnost jevu A: „Padne číslo 6.“

Řešení: Hodili jsme třistakrát kostkou a sledovali, padne-li nám šestka. Po každém hodu jsme přepočítali relativní četnost jevu A. Prvních deset hodů je zaznamenáno v Tabulce 3.1 a vývoj relativních četností v průběhu všech 300 hodů je znázorněn na Obrázku 3.1. Z grafu je zřejmé, že se hodnota relativní četnosti ustaluje kolem hodnoty 0,17. Dle statistické definice pravděpodobnosti bude tato hodnota pravděpodobností jevu A. Jak vidíme, výsledek je shodný s výsledkem v předchozím příkladu, i když jsme

č. hodu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
padlé č.	1	5	6	1	4	2	1	2	3	2
rel. č.	0,00	0,00	0,33	0,25	0,20	0,17	0,14	0,13	0,11	0,10

Tabulka 3.1: Vývoj relativních četností padnutí šestky při hodu kostkou

k němu došli mnohem složitější cestou a výsledná hodnota je mnohem méně přesná. V našem případě využití statistické definice není příliš vhodné.



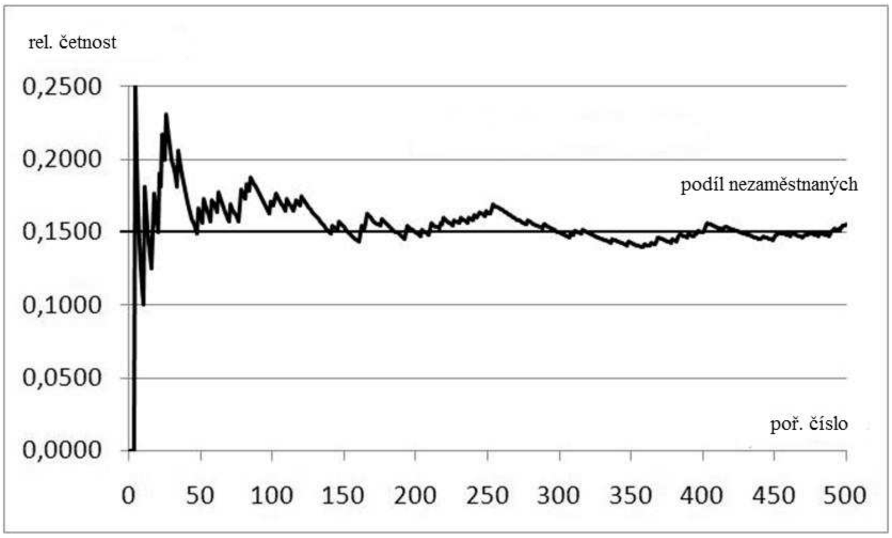
Obrázek 3.1: Vývoj relativních četností padnutí šestky při hodu kostkou

Přesto existují případy, kdy není možné použití klasické definice a je nutno přistoupit k jinému řešení, například k použití definice statistické. Toto může nastat v případě, že množina všech elementárních jevů není konečná nebo ji nemáme k dispozici.

Příklad 3.5

3.5. Za pomocí statistické definice pravděpodobnosti určete pravděpodobnost jevu, že náhodně vybraná osoba v daném regionu je nezaměstnaná.

Řešení: Náhodný pokus „výběr náhodné osoby“ jsme provedli pětsetkrát a u každé z osob jsme zjistili, zda je nezaměstnaná. Po každém výběru jsme přepočítali relativní četnost našeho jevu. Vývoj těchto relativních četností je zřejmý z grafu na obrázku 3.2. Z grafu je zřejmé, že se hodnota relativních četností ustaluje kolem hodnoty 0,15. Je 15% pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba ve sledovaném regionu je nezaměstnaná.



Obrázek 3.2: Vývoj relativních četností nezaměstnaných

Pro zajímavost ještě zmíníme geometrickou definici pravděpodobnosti. Tato je, kromě jiného, užitečná v určitých situacích, kdy nám dobrá vizuální představivost pomůže pochopit danou problematiku. Geometrická definice pravděpodobnosti je založena na porovnání například objemů, obsahů ploch či délek geometrických útvarů.

Definice 3.2.3. (Geometrická definice pravděpodobnosti) Nechť náhodný pokus se základním prostorem Ω má nekonečně mnoho výsledků a každý z těchto výsledků má stejnou možnost nastat. Nechť μ je míra geometrického útvaru reprezentujícího náhodný jev A a ν je míra geometrického útvaru reprezentujícího základní prostor Ω. Potom pravděpodobnost $P(A)$ náhodného jevu A z množiny S definujeme jako podíl

$$P(A) = \frac{\mu}{\nu}. \tag{3.2}$$

Míra ν může například značit objem, obsah plochy či délku geometrického útvaru představujícího všechny možné výsledky náhodného pokusu, μ může například značit objem, obsah plochy či délku geometrického útvaru představujícího výsledky, při nichž dojde k výskytu jevu A.

Opět si ukážeme (například na případu ploch dvourozměrných obrazců), že tato definice pravděpodobnosti splňuje všechny podmínky. Nejmenší možná plocha má velikost 0. Uvažujme jev A odpovídající této ploše. Je zřejmé, že této ploše odpovídá nemožný jev. Dále je zřejmé, že $\mu = 0$ a tedy $P(A) = \frac{\mu}{\nu} = 0$. Obráceně podíl $P(A) = \frac{\mu}{\nu}$ je nulový pouze v případě, že čitatel zlomku je roven 0, čili $\mu = 0$. To znamená, že velikost plochy náležející jevu A je rovna 0. Jak jsme již řekli, toto platí pro jev nemožný.

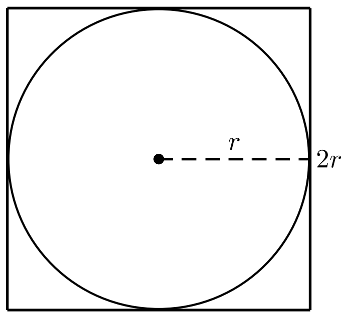
Pokud naopak budeme uvažovat jev jistý, je zřejmé, že jeho plocha musí být stejná jako plocha odpovídající všem možným výsledkům náhodného pokusu. Tedy $\mu = \nu$ a $P(A) = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$. V ostatních případech $A \subset \|\Omega\|$ je zřejmě $0 < \mu < \nu$, a proto $0 < P(A) < 1$.

3.6. Střílíme směrem na čtvercový terč (naším cílem není trefit střed terče, ale terč jako takový). Za pomocí geometrické definice pravděpodobnosti vypočtěte pravděpodobnost, že se trefíme do kruhu tomuto čtverci vepsanému. **Příklad 3.6**

Řešení: Označíme si r poloměr sledovaného kruhu. Tento kruh je zřejmě vepsán do čtverce o straně $2r$. Situace je znázorněna na Obrázku 3.3. Plochu čtverce vypočítáme $\nu = (2r)^2 = 4r^2$. Plochu kruhu vypočítáme $\mu = \pi r^2$. Hledanou pravděpodobnost (za výše zmíněného předpokladu, že trefa do kteréhokoliv místa terče je stejně pravděpodobná, protože se netrefujeme do středu terče) vypočítáme

$$P(A) = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{1}{4}\pi.$$

Pravděpodobnost, že se trefíme do kruhu je $\frac{1}{4}\pi$.



Obrázek 3.3: Geometrická definice pravděpodobnosti - příklad

Ve většině našich příkladů budeme využívat k výpočtu pravděpodobnosti klasickou definici. Druhé dvě se používají ve speciálních případech.

Ať už pravděpodobnost definujeme jakkoliv, musíme si uvědomit, že pokud posčítáme pravděpodobnosti všech možných (rozumějme elementárních) jevů, dostaneme výsledek 1 (tj. 100%). Nejlépe tento fakt pochopíme na jednoduchém příkladu s hodem kostkou.

Již dříve jsme spočítali, že pravděpodobnost, že při jednom hodu běžnou hrací kostkou padne jednička, je $\frac{1}{6}$, stejná je i pravděpodobnost, že při tomto hodu padne dvojka, stejně tak i trojka, čtyřka, pětka, či šestka. Dále jsme si uvědomili, že těchto šest jevů tvoří množinu všech elementárních jevů. A nikoho asi nepřekvapí, že platí

$$P(\text{„Padne 1“}) + P(\text{„Padne 2“}) + \ldots + P(\text{„Padne 6“}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Vše, co jsme si tu nyní řekli, můžeme shrnout do následující věty.

Věta 3.2.4 (Zákon rozdělení pravděpodobností). *Mějme náhodný pokus a k němu náležející konečnou množinu všech elementárních jevů Ω. Označme ω libovolný elementární jev z této množiny a $P(\omega)$ jeho pravděpodobnost. Pak platí*

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1. \tag{3.3}$$

Slovy řečeno - součet pravděpodobností všech elementárních jevů je roven jedné.

Příklad 3.7

3.7. V továrně vyrobili celkem 2500 výrobků, z toho 50 vadných, jaká je pravděpodobnost, že koupíme-li si výrobek této továrny, bude v pořádku?

Řešení: Počet těch možností, které nás zajímají je $m = 2\,500 - 50 = 2\,450$. Počet všech možností je roven $n = 2\,500$. Pravděpodobnost, že výrobek bude bez vad, je

$$\frac{m}{n} = \frac{2\,450}{2\,500} = \frac{49}{50} = 0,98 = 98\%.$$

Příklad 3.8

3.8. V osudí je 50 koulí, z toho 20 černých, zbytek je bílých. Náhodně vytáhneme z osudí jednu kouli, jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme černou kouli?

Řešení: Počet těch, které nás zajímají je $m = 20$. Počet všech je $n = 50$. Pravděpodobnost, že vytáhnu černou kouli je

$$\frac{m}{n} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%.$$

Příklad 3.9

3.9. V osudí je 50 koulí, z toho 20 černých, zbytek je bílých. Náhodně vytáhneme z osudí dvě koule a držíme obě v ruce. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme obě černé koule?

Řešení: Počet všech v tomto případě znamená počet všech možností, jak mohu vytáhnout dvě koule z 50. Připomeneme-li si znalosti kombinatoriky, uvědomíme si, že každou kouli mohu vytáhnout pouze jedenkrát, čili se jedná o úlohu bez opakování. Navíc vidíme, že pokud držíme v ruce dvě vytažené koule, zřejmě je jedno, která je první a která druhá, tedy nezáleží na pořadí, a proto se jedná o kombinace. Lehce zjistíme, že budeme počítat počet kombinací druhé třídy z 50 prvků

$$n = \binom{50}{2} = \frac{50!}{2! \cdot (50-2)!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = \frac{2\,450}{2} = 1\,225.$$

Obdobně bychom zjistili, že počet těch případů, které mne zajímají (tj. dvojic černých koulí), se spočítá jako počet kombinací druhé třídy z 20

$$m = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = \frac{380}{2} = 190.$$

Pravděpodobnost, že vytáhnu dvě černé koule, je

$$\frac{m}{n} = \frac{190}{1\,225} = \frac{38}{245} \doteq 0,155\,1 = 15,51\%.$$

Příklad 3.10

3.10. Jaká by byla pravděpodobnost v předchozím příkladu, že vytáhneme každou kouli jinou?

Řešení: Počet všech v tomto případě bude stejný jako v předchozím příkladu $n = 1\,225$. Počet těch, které mne zajímají (tj. dvojic různých koulí), se dá spočítat různými způsoby. Například pomocí úvahy, že máme jednu černou a jednu bílou. Počet těchto případů můžeme spočítat za pomoci kombinatorického pravidla součinu (viz Věta 2.3.2 na straně 40) jako součin počtů bílých a černých koulí $m = 20 \cdot 30 = 600$.

Jinou možností výpočtu počtu dvojic různých koulí by bylo odečtení počtu všech dvojic černých koulí (již jsme spočítali dříve, jeho hodnota je 190) a počtu všech dvojic bílých koulí (tj. počtu kombinací druhé třídy ze 30 prvků, $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2} = 435$) od celkového počtu dvojic, tedy $1\,225 - 190 - 435 = 600$.

Vidíme, že jsme obdrželi stejný výsledek jako při předchozím způsobu výpočtu. Pravděpodobnost, že vytáhnu dvě různě barevné koule, je

$$\frac{m}{n} = \frac{600}{1\,225} = \frac{24}{49} \doteq 0.4898 = 48,98\%.$$

Příklad 3.11

3.11. Losujeme tři karty z balíčku mariášových karet. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme tři esa?

Řešení: Počet všech v tomto případě znamená počet všech možností, jak mohu vytáhnout tři karty z 32. Budeme počítat počet kombinací třetí třídy z 32 prvků (pomocí obdobné úvahy jako u předchozích dvou příkladů)

$$n = \binom{32}{3} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2} = \frac{29\,760}{6} = 4\,960.$$

Počet těch možností, které mne zajímají (tj. trojic es poskládaných ze všech čtyř es obsažených v balíčku karet) se spočítá jako počet všech kombinací třetí třídy ze čtyř $m = \binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$. Pravděpodobnost, že vytáhnu tři esa, je

$$\frac{m}{n} = \frac{4}{4\,960} = \frac{1}{1\,240} \doteq 0,000\,8 = 0,08\%.$$

Příklad 3.12

3.12. Losujeme opět tři karty z balíčku mariášových karet. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme dvě esa (na zbylé kartě nezáleží)?

Řešení: Počet všech jsme již spočítali v předchozím příkladu, tj. $n = 4\,960$. Počet těch, které mne zajímají (tj. trojic karet, mezi kterými jsou dvě esa), se spočítá za využití kombinatorického pravidla součinu a počtu kombinací druhé třídy ze čtyř (tj. počet možností, jak mohou být vytažena dvě esa) a počtu kombinací první třídy z 28 (tj. počet možností, jaká může být vytažena třetí karta)

$$m = \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{1} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 28 = 168.$$

Pravděpodobnost, že vytáhnu dvě esa (a na další kartě nezáleží), je

$$\frac{m}{n} = \frac{168}{4\,960} = \frac{21}{620} \doteq 0,033\,9 = 3,39\%.$$

Příklad 3.13

3.13. Na turnaji je 40 družstev. V úvodní části turnaje se hraje v pěti základních skupinách. Jaká je pravděpodobnost, že tři družstva, která na konci obsadí stupně vítězů, hrála původně ve stejné základní skupině?

Řešení: Rozdělení do skupin můžeme chápat jako losování pořadí, přičemž prvních osm družstev bude v první skupině, dalších osm družstev bude ve druhé skupině až posledních osm družstev bude v páté skupině. Počet všech možností, do které skupiny byla přidělena družstva, jenž na konci závodu nastoupila na stupně vítězů, můžeme vypočítat jako počet variací třetí třídy bez opakování ze 40 prvků, tedy

$$n = \frac{40!}{(40-3)!} = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59\,280.$$

Počet možností, kdy byla prvním třem družstvům vylosována pořadí umisťující je do první skupiny, je

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Stejným způsobem by se vypočítaly počty všech možností náležení k ostatním čtyřem skupinám. Celkem je tedy počet všech možností, které nás zajímají

$$m = 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1\,680.$$

Pravděpodobnost, že družstva ze stupňů vítězů hrála ve stejné základní skupině, je

$$\frac{m}{n} = \frac{1\,680}{59\,280} = 0,0283 = 2,83\%.$$

Příklad 3.14

3.14. Dva kamarádi, Ondra a Tomáš, byli přijati na vysokou školu a bylo jim přiděleno ubytování na vysokoškolské koleji. Na této koleji je celkem ubytováno 300 studentů ve trojlůžkových pokojích. Jaká je pravděpodobnost, že budou Ondra s Tomášem ubytováni ve stejném pokoji?

Řešení: Rozdělení do pokojů budeme opět chápat jako losování pořadí, přičemž první tři studenti budou v prvním pokoji, další tři ve druhém až poslední tři studenti budou v posledním, stém pokoji. To znamená, že každému studentovi je přiděleno jedno pořadí. Pokud si budeme všímat pouze studentů Ondry a Tomáše, pak Ondra má přiděleno jedno z 300 pořadí a Tomáš, který nemůže mít stejné pořadí jako Ondra, už může mít přiděleno pouze jedno z 299 pořadí. Dále můžeme aplikovat pravidlo součinu. Počet všech možností, jak umístit Ondru a Tomáše do pokojů dle tohoto losování, je $n = 300 \cdot 299$.

Počet možností, kdy bylo Ondrovi a Tomášovi vylosováno pořadí umisťující je do prvního pokoje, je $3 \cdot 2$. Stejným způsobem by se vypočítaly počty všech možností náležení k ostatním 99 pokojům. Pomocí kombinatorického pravidla součtu získáme celkový počet všech možností, které nás zajímají $m = 100 \cdot 3 \cdot 2$. Pravděpodobnost, že budou Ontra s Tomášem ubytováni ve stejném pokoji, je

$$\frac{m}{n} = \frac{100 \cdot 3 \cdot 2}{300 \cdot 299} = \frac{2}{299} \doteq 0,0067 = 0,67\%.$$

3.15. Házíme dvakrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padl součet 8? **Příklad 3.15**

Řešení: V podobných příkladech studenti často podléhají chybné intuitivní myšlence, že pokud množina všech elementárních jevů při hodu jednou kostkou má 6 prvků, pak při hodu dvěma kostkami bude mít 12 prvků.

Bohužel je to velmi chybná úvaha. Doložit si to můžeme buď kombinatorickými výpočty nebo názorně výpisem všech možností.

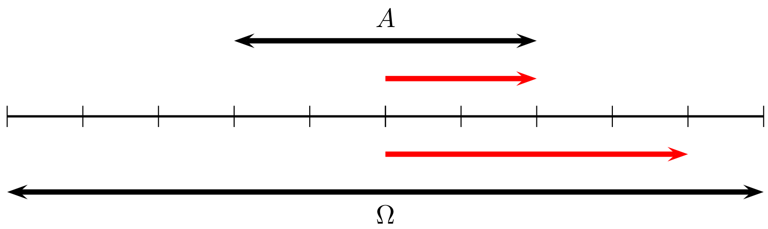
$$\begin{Bmatrix} 1-1, & 1-2, & 1-3, & 1-4, & 1-5, & 1-6, \\ 2-1, & 2-2, & 2-3, & 2-4, & 2-5, & 2-6, \\ 3-1, & 3-2, & 3-3, & 3-4, & 3-5, & 3-6, \\ 4-1, & 4-2, & 4-3, & 4-4, & 4-5, & 4-6, \\ 5-1, & 5-2, & 5-3, & 5-4, & 5-5, & 5-6, \\ 6-1, & 6-2, & 6-3, & 6-4, & 6-5, & 6-6 \end{Bmatrix}$$

Z výpisu vidíme, že všech možností je 36. Možnosti, kdy nám hodnoty jednotlivých hodů dávají součet 8, jsou 2-6, 3-5, 4-4, 5-3 a 6-2, jejich počet je 5. Pravděpodobnost, že při dvou hodech kostkou padne součet osm, je

$$\frac{m}{n} = \frac{5}{36} \doteq 0,1389 = 13,89\%.$$

3.16. Tyč délky 1 m je náhodně rozlomena na dvě části (zlom je stejně možný v každém místě tyče). Jaká je pravděpodobnost, že větší část bude kratší než 70 cm? **Příklad 3.16**

Řešení: V tomto příkladu bude opět lépe využít geometrickou definici pravděpodob-



Obrázek 3.4: Grafické znázornění jevů v příkladu 3.16

nosti. Grafické znázornění jevu A i množiny všech elementárních jevů Ω je vidět na obrázku 3.4. Je zřejmé, že situace je symetrická, proto můžeme použít znázornění jevu pouze v jedné polovině tyče. Černou barvou je v Obrázku vyznačena situace ze zadání, červenou barvou zúžená situace, se kterou budeme dále počítat.

Zlom je stejně možný v každém místě tyče, tj. kdekoliv v rozmezí 100 cm. Sledujeme větší ulomenou část tyče, proto je její délka aspoň 50 cm. Tedy $\nu = 50$. Chceme, aby tato část byla kratší než 70 cm. Zajímá nás tedy rozmezí délek 50 až 70 cm, proto $\mu = 70 - 50 = 20$. Pravděpodobnost, že větší část tyče bude kratší než 70 cm, vypočítáme

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{20}{50} = 0,4 = 40\%.$$

3.17. Hodiny se porouchaly a zastavily se v určitém časovém okamžiku. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví mezi 8 a 9? **Příklad 3.17**

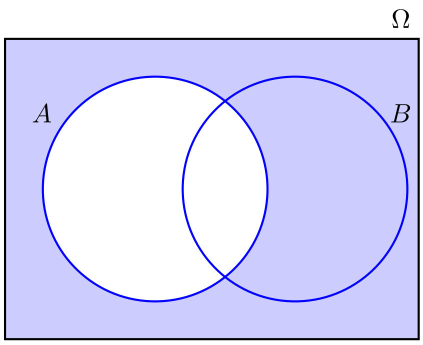
Řešení: V tomto příkladu bude lépe využít geometrickou definici pravděpodobnosti. Velká ručička se mohla zastavit kdekoliv na ciferníku, tj. kdekoliv v rozmezí 360°. Tedy $\nu = 360°$. My sledujeme zastavení ručičky v rozmezí mezi 8 a 9. Na ciferníku je celkem dvanáct čísel, které rozdělují ciferník po obvodu na dvanáct stejných dílů. Z toho plyne výpočet $\mu = \frac{360°}{12} = 30°$. Pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví mezi 8 a 9, vypočítáme

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12} \doteq 0,0833 = 8,33\%.$$

3.3 Základní operace s náhodnými jevy

Mnoho operací prováděných s náhodnými jevy nám bude povědomých, setkali jsme se s nimi již při práci s množinami. Obdobně jako u množin je dobré si operace pro představu znázornit graficky pomocí tzv. Vennových diagramů. Pravděpodobnost budeme ve většině případů počítat dle klasické pravděpodobnosti.

Definice 3.3.1. *Jev opačný* k jevu A nastává právě tehdy, když nenastává jev A. Značíme A'. Graficky znázorněno na Obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Jev opačný k jevu A

Příklad 3.18

3.18. Pro jevy uvedené v příkladu 3.3 zjistěte A', B', C', D', E' a F' a vypočítejte pravděpodobnost nových jevů.

Řešení:
$A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ … „Nepadne šestka“
$B' = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ … „Nepadne dvojka“
$C' = \{1, 3, 5\}$ … „Nepadne sudé“ … „Padne liché číslo“
$D' = \{1, 2\}$ … „Nepadne číslo větší než 2“ … „Padne maximálně dvojka“
$E' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ … „Nepadne číslo větší než 10“ … „Padne maximálně desítka“ … „Padne libovolné číslo“
$F' = \emptyset$ … „Nepadne méně než 8“ … „Padne alespoň 8“ … Není možné.

Pokud budeme počítat pravděpopdobnost nových jevů pomocí klasické definice pravděpodobnosti, dostaneme následující výsledky

$$P(A') = \frac{5}{6} \qquad P(D') = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(B') = \frac{5}{6} \qquad P(E') = \frac{6}{6} = 1$$
$$P(C') = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(F') = \frac{0}{6} = 0$$

Můžeme si ovšem uvědomit, co to vlastně opačný jev je. Jetliže jev A je podmnožinou množiny všech elementárních jevů sledovaného náhodného pokusu Ω, pak opačný jev je doplňkem množiny A v množině Ω, což znamená, že obsahuje všechny prvky množiny Ω, které nejsou obsaženy v množině A. Pak ovšem o počtech prvků v jednotlivých množinách platí následující vztah

$$\|A'\| = \|\Omega\| - \|A\|.$$

Pro pravděpodobnost opačného jevu potom platí

$$P(A') = \frac{\|A'\|}{\|\Omega\|} = \frac{\|\Omega\| - \|A\|}{\|\Omega\|} = \frac{\|\Omega\|}{\|\Omega\|} - \frac{\|A\|}{\|\Omega\|} = 1 - P(A).$$

Věta 3.3.2 (Pravděpodobnost opačného jevu). *Pro všechny náhodné jevy* A *platí*

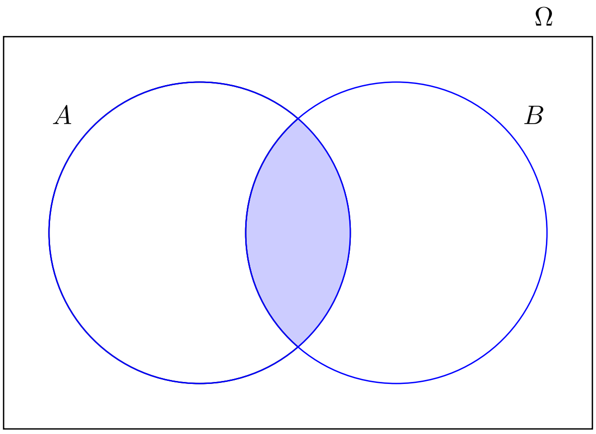
$$P(A') = 1 - P(A). \tag{3.4}$$

Pokračování příkladu 3.18. Nyní můžeme příklad vyřešit pomocí vzorce (3.4).

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \qquad P(D') = 1 - P(D) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \qquad P(E') = 1 - P(E) = 1 - 0 = 1$$
$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad P(F') = 1 - P(F) = 1 - 1 = 0$$

Vidíme, že jsme obdrželi shodné výsledky jako při výpočtu pomocí klasické definice pravděpodobnosti.

Definice 3.3.3. *Průnik jevů A* a *B* nastává právě tehdy, když nastávají současně oba jevy *A* a *B*. Značíme $A \cap B$. Graficky znázorněno na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Průnik jevů

3.19. Pro jevy uvedené v příkladu 3.3 zjistěte $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $A \cap E$, $A \cap F$ a $C \cap D$ a vypočítejte pravděpodobnost nových jevů. **Příklad 3.19**

Řešení:
$A \cap B = \emptyset$ …„Padne šestka a zároveň dvojka“ …Není možné.
$A \cap C = \{6\}$ …„Padne šestka a zároveň sudé číslo“ …„Padne šestka“
$A \cap D = \{6\}$ …„Padne šestka a zároveň číslo větší než 2“ …„Padne šestka“
$A \cap E = \emptyset$ …„Padne šestka a zároveň číslo větší než 10“ …Není možné.
$A \cap F = \{6\}$ …„Padne šestka a zároveň číslo menší než 8“ …„Padne šestka“
$C \cap D = \{4, 6\}$ …„Padne sudé číslo a zároveň číslo větší než 2“ …„Padne čtyřka nebo šestka“

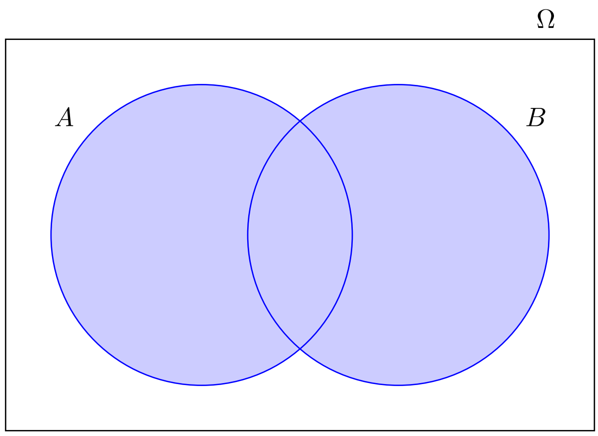
Opět budeme počítat pravděpopdobnost nových jevů pomocí klasické definice pravděpodobnosti a dostaneme následující výsledky.

$$P(A \cap B) = \frac{0}{6} = 0 \qquad P(A \cap E) = \frac{0}{6} = 0$$
$$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cap F) = \frac{1}{6}$$
$$P(A \cap D) = \frac{1}{6} \qquad P(C \cap D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Důležité upozornění: Pro počítání pravděpodobnosti průniku dvou jevů obecně neexistuje jiná možnost než výpočet pomocí definice!

Definice 3.3.4. Řekneme, že jevy A a B jsou *neslučitelné* právě tehdy, když nemohou nastat současně. To znamená, že $A \cap B = \emptyset$, nebo-li $P(A \cap B) = 0$.

Definice 3.3.5. *Sjednocení jevů* A a B nastává právě tehdy, když nastává alespoň jeden z jevů A a B. Značíme $A \cup B$. Graficky znázorněno na Obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Sjednocení jevů

Příklad 3.20

3.20. Pro jevy uvedené v příkladu 3.3 zjistěte $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$, $A \cup E$, $A \cup F$ a $C \cup D$ a vypočítejte pravděpodobnost nových jevů.

Řešení:
$A \cup B = \{2, 6\}$ … „Padne šestka nebo dvojka.“
$A \cup C = \{2, 4, 6\}$ … „Padne šestka nebo sudé číslo.“ … „Padne sudé číslo.“
$A \cup D = \{3, 4, 5, 6\}$ … „Padne šestka nebo číslo větší než 2.“ … „Padne číslo větší než 2.“
$A \cup E = \{6\}$ … „Padne šestka nebo číslo větší než 10.“ … „Padne šestka.“
$A \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ … „Padne šestka nebo číslo menší než 8.“ … „Padne libovolné číslo.“
$C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ … „Padne sudé číslo nebo číslo větší než 2.“ … „Padne alespoň dvojka.“

Opět budeme počítat pravděpodobnost nových jevů pomocí klasické definice pravděpodobnosti, dostaneme následující výsledky.

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(A \cup E) = \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(A \cup F) = \frac{6}{6} = 1$$
$$P(A \cup D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad P(C \cup D) = \frac{5}{6}$$

„Nebo“ v předchozím příkladu znamená slučovací nebo, v češtině se před ním nepíše čárka. „A nebo B“ znamená, že nastane A, nebo B, nebo nastanou oba dva jevy.

V některých situacích při výpočtech jistých pravděpodobností může být užitečná následující představa související s Vennovými diagramy. Spojme si v hlavě P jako **P**RAVDĚPODOBNOST a P jako **P**LOCHA **P**APÍRU.

Pak už můžeme přemýšlet, jak danou P = **P**LOCHU **P**APÍRU vystřihneme (tj. odečítáme P = **P**RAVDĚPODOBNOST) případně poslepujeme (tj. přičítáme P = **P**RAVDĚPODOBNOST) z jiných, již nám známých P = **P**LOCH **P**APÍRU.

Hned si můžeme poprvé tuto úvahu vyzkoušet při odvození jiného způsobu výpočtu pravděpodobnosti sjednocení dvou jevů.

Podíváme-li se na obrázek 3.7 na vybarvenou plochu, čili plochu, která nás zajímá, a zamyslíme-li se, z jakých částí se skládá, vidíme, že ke kruhu A je připojena část kruhu B. Tato část kruhu B vznikla odstřižením průniku (tj. vybarvené plochy z obrázku 3.6). Dle předchozí úvahy tedy pravděpodobnost sjednocení můžeme vypočítat dle následujícího předpisu.

Věta 3.3.6 (**Pravděpodobnost sjednocení**)**.** *Pro všechny náhodné jevy* A *a* B *platí*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{3.5}$$

Uvedený vzorec samozřejmě můžeme odvodit i jinak, oficiálně. Uvědomíme-li si, že sjednocení dvou jevů představuje sjednocení odpovídajících množin, pak víme, že do výsledné množiny (a tedy i jevu) náležejí všechny prvky z první množiny a k nim jsou připojeny ty prvky z druhé množiny, které se nevyskytují v první množině (tj. v průniku obou množin).

Pak je tedy zřejmě počet prvků sjednocení roven součtu počtů prvků jednotlivých množin sníženému o počet prvků průniku obou množin, tj.

$$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|,$$

a proto výpočet pravděpodobnosti sjednocení bude

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{\|A \cup B\|}{\|\Omega\|} = \frac{\|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|}{\|\Omega\|} = \\ &= \frac{\|A\|}{\|\Omega\|} + \frac{\|B\|}{\|\Omega\|} - \frac{\|A \cap B\|}{\|\Omega\|} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

.

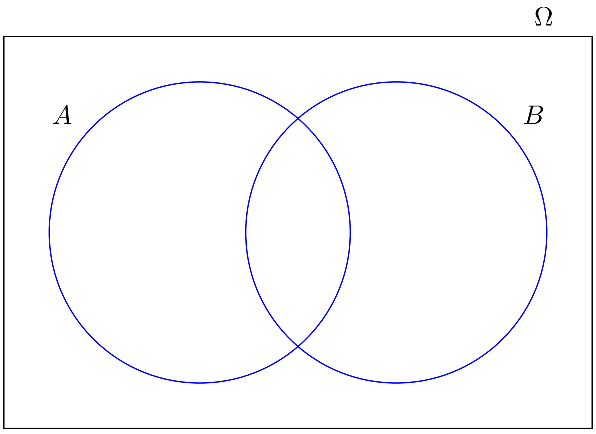
Věta 3.3.7 (**Pravděpodobnost sjednocení neslučitelných jevů**)**.** *Pro všechny náhodné jevy* A *a* B*, pro něž $A \cap B = \emptyset$ (tj.* A *a* B *jsou neslučitelné), platí*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{3.6}$$

Pokračování příkladu 3.20. Nyní můžeme příklad vyřešit pomocí vzorce (3.5).

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A \cup D) &= P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ P(A \cup E) &= P(A) + P(E) - P(A \cap E) = \frac{1}{6} + 0 - 0 = \frac{1}{6} \\ P(A \cup F) &= P(A) + P(F) - P(A \cap F) = \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 1 \\ P(C \cup D) &= P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Vidíme, že jsme obdrželi shodné výsledky jako při výpočtu pomocí definic.



Obrázek 3.8: Nákres k příkladu 3.21

Příklad 3.21

3.21. Čtyřicet procent klientů pojišťovny má sjednáno životní pojištění a sedmdesát procent klientů má sjednáno pojištění bytu. Dvacet procent klientů nemá sjednáno ani jedno z těchto pojištění. K přepážce přišel jeden z klientů, jaká je pravděpodobnost, že má u pojišťovny sjednána obě zmíněná pojištěmí?

Řešení: Označme si jev A ...klient má sjednáno životní pojištění, jev B ...klient má sjednáno pojištění bytu. Zřejmě platí $P(A) = 0,4$ a $P(B) = 0,7$. Již možná není tak zcela jasné, co nám v řeči náhodných jevů říká poslední informace zadání. Pokud bychom neuměli zápis provést přímo, je dobré využít nákresu pomocí Vennova diagramu, viz Obrázek 3.8. Z obrázku bychom měli být již schopni si uvědomit, že pravděpodobnost 20% má opačný jev ke sjednocení jevů A a B, tedy platí $0,2 = 1 - P(A \cup B)$.

A jak vše převedeme do symboliky náhodných jevů? Pokud neumíme přímo, využijeme opět Vennova diagramu, z obrázku 3.8. Z něj již jistě lehce vyčteme, že chceme vypočítat pravděpodobnost průniku jevů A a B. Shrneme tedy všechny poznatky a můžeme přejít k vlastním výpočtům.

$$0,2 = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

Upravením vzniklé rovnice a dosazením známých údajů získáme

$$P(A \cap B) = 0,2 + P(A) + P(B) - 1 = 0,2 + 0,4 + 0,7 - 1 = 0,3.$$

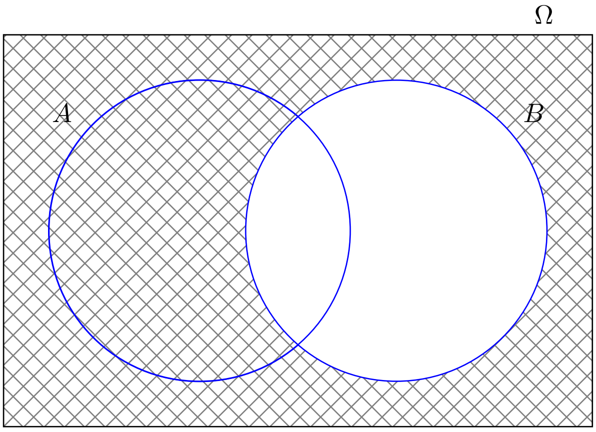
Je třiceti procentní pravděpodobnost, že klient má uzavřena obě sledovaná pojištění.

Někdy se ocitneme v situaci, kdy zkoumáme pravděpodobnost náhodného jevu za nějakých omezujících podmínek, které mají charakter náhodného jevu, jenž musí před zkoumaným jevem nastat. Mluvíme pak o podmíněné pravděpodobnosti.

Pro lepší představu si můžeme celou situaci (mírně zjednodušeně) znázornit graficky. Na Obrázku 3.9 je ukázáno zúžení náhodného jevu A podmínkou, že nastal jev B. Pokud již jev B nastal, pak se vše mimo něj „ztratí v mlze“, tj. ze všech možností, které mohly nastat pro daný pokus (prvky množiny všech elementárních jevů Ω), odpadnou všechny, které neleží v množině náležející jevu B. To znamená, že z celé množiny Ω „zbyla“ pouze množina B. Pak ale také z množiny A odpadnou prvky, které neleží v množině B, tj. z množiny A „zůstane“ pouze průnik $A \cap B$.

Definice 3.3.8. *Podmíněná pravděpodobnost* znamená pravděpodobnost jevu A určovanou za podmínky, že již předem jistě nastal jev B s nenulovou pravděpodobností. Je dána předpisem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\|A \cap B\|}{\|B\|}. \tag{3.7}$$



Obrázek 3.9: Podmíněnost jevů

Příklad 3.22

3.22. Pro jevy uvedené v příkladu 3.3 vypočítejte podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$, $P(A|C)$, $P(A|D)$, $P(A|E)$, $P(A|F)$ a $P(C|D)$.

Řešení: Nejdříve si uvědomíme, co vlastně jednotlivé podmínky znamenají, jak by mohla vypadat situace, ve které bychom potřebovali s podmíněnými pravděpodobnostmi pracovat.

Jak si můžeme například představit situaci $P(A|C)$? Skupina osob sází na výsledek hodu kostkou. Osoba *A* tipuje „padne 6“, osoba *C* je opatrnější, tipuje „padne sudé číslo“. Pak jdou všichni sledovat krupiéra, jak hází kostkou. Osoba *C* si pospíšila a je blízko stolku krupiéra, dobře mu vidí na ruce. Osoba *A* se však opozdila a přišla až v okamžiku, kdy je u stolku krupiéra již mnoho lidí. Osoba *A* nevidí, co krupiér hodil. Vidí však, že osoba *C* se raduje, protože vyhrála.

Co vlastně osoba *A* v daném okamžiku ví? Osoba *C* vyhrála, tedy ví, že padlo sudé číslo. Co z toho vyplývá pro osobu *A*? Změní zjištěné informace její náladu?

Ze všech šesti možných výsledků, které mohou padnout při hodu kostkou, zůstaly jen tři. To znamená, že osobě *A* se zvýšila pravděpodobnost výhry. V současném okamžiku je již pravděpodobnost výhry osoby *A* rovna $\frac{1}{3}$ místo původní $\frac{1}{6}$.

K výpočtu jednotlivých pravděpodobností využijeme obě části vzorce 3.7.

$$P(A|B) = \frac{\|A \cap B\|}{\|B\|}, \qquad \text{neboli} \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{0}{1} = 0, \qquad \text{neboli} \qquad P(A|B) = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0,$$

$$P(A|C) = \frac{1}{3}, \qquad \text{neboli} \qquad P(A|C) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$P(A|D) = \frac{1}{4}, \qquad \text{neboli} \qquad P(A|D) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4},$$

$$P(A|E) \ldots \text{nelze, protože } P(E) = 0,$$

$$P(A|F) = \frac{1}{6}, \qquad \text{neboli} \qquad P(A|F) = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6},$$

$$P(C|D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \text{neboli} \qquad P(C|D) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Můžeme si všimnout dvou rozdílných situací, ve kterých byly hodnoty podmíněných pravděpodobností (neuvažujeme případ, kdy pravděpodobnost podmínky byla nulová a nemělo smysl zabývat se podmíněným jevem). V případě dvojice jevů *C* a *D* vyšla podmíněná pravděpodobnost $P(C|D)$ stejné hodnoty, jakou měla pravděpodobnost $P(C)$. To znamená, že zjištění, že jev *D* nastal, nijak neovlivnilo pravděpodobnost jevu *C*.

Ve všech ostatních případech vyšla hodnota podmíněných pravděpodobností odlišně od původních pravděpodobností jednotlivých jevů. To znamená, že splnění podmínek ovlivňovalo pravděpodobnost jevů. Podrobněji jsme si již ukázali na případu pravděpodobnosti jevu *A* za podmínky nastání jevu *C*.

Podmíněné pravděpodobnosti využijeme ke zjišťování závislosti náhodných jevů na sobě. Jak jsme v předchozím příkladu viděli, platí dva případy.

Pokud je jeden náhodný jev nezávislý na druhém, pak se jeho podmíněná pravděpodobnost neliší od původní hodnoty. Naopak, pokud splnění podmínky hodnotu pravděpodobnosti změní, náhodné jevy se navzájem ovlivňují.

Definice 3.3.9. (Závislost a nezávislost jevů) Mějme jevy *A* a *B*, přičemž platí $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Říkáme, že náhodné jevy *A* a *B* jsou *nezávislé* právě tehdy, jestliže pravděpodobnost jevu *A* není ovlivněna výskytem jevu *B* a současně pravděpodobnost jevu *B* nezávisí na výskytu jevu *A*, a tedy platí $P(A|B) = P(A)$ a $P(B|A) = P(B)$. V opačném případě mluvíme o závislosti jevů.

Dále si odvodíme další důležité vlastnosti nezávislých jevů s nenulovými pravděpodobnostmi.

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

Věta 3.3.10 (Věta o nezávislých jevech). *Pro náhodné jevy* A *a* B*, pro které* $P(A) > 0$ *a* $P(B) > 0$*, jsou následující podmínky ekvivalentní.*

1. *Náhodný jev* A *nezávisí na náhodném jevu* B*, tedy* $P(A|B) = P(A)$.
2. *Náhodný jev* B *nezávisí na náhodném jevu* A*, tedy* $P(B|A) = P(B)$.
3. *Platí*
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.8}$$

Vztahu (3.8) se říká *nutná a postačující podmínka nezávislosti*. To znamená, že pokud tato vlastnost platí, pak jsou jevy nezávislé, a naopak, pokud víme, že jsou jevy nezávislé, pak můžeme pravděpodobnost průniku počítat dle popsaného vztahu.

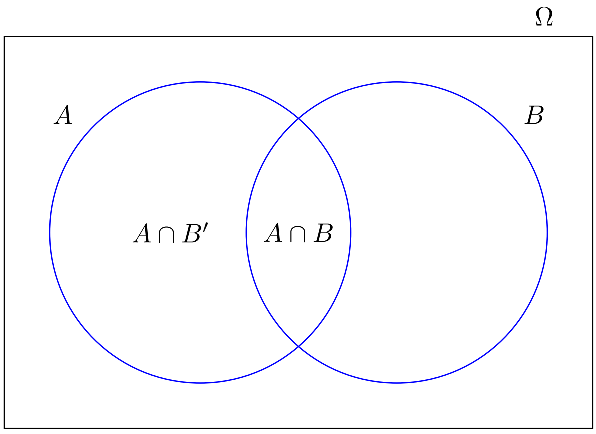
Věta 3.3.11 (Věta o skupině nezávislých jevů). *Nutná a postačující podmínka nezávislosti obecně platí i pro skupinu jevů. Tedy platí, že jevy* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *jsou nezávislé právě, když pro každou vybranou skupinu z těchto jevů platí*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Můžeme si položit otázku, jak je to s nezávislostí jevů *A* a B' vzhledem k nezávislosti jevů *A* a *B*.
Z obrázku 3.10 je zřejmé, že $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$. Předpokládejme, že jevy A a B jsou nezávislé, dle nutné podmínky nezávislosti platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Pak můžeme vyvodit následující rovnosti.

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) \\ &= P(A) \cdot P(B') \end{aligned}$$

Dle postačující podmínky nezávislosti jsou i jevy *A* a B' nezávislé.



Obrázek 3.10: Jev a jeho doplněk

Věta 3.3.12 (Vlastnost nezávislých jevů). *Pro náhodné jevy* A *a* B*, vyhovujícím podmínkám* $P(A) > 0$ *a* $P(B) > 0$*, platí, že jevy* A *a* B *jsou nezávislé právě, když jsou nezávislé jevy* A *a* B'.

Pro nezávislé jevy zřejmě platí rovnosti $P(A) = P(A|B) = P(A|B')$.

Příklad 3.23

3.23. Ke zkoušce je dáno 20 otázek. Student se naučil 15 z nich. Při zkoušce si losuje dvě otázky. Jaká je pravděpodobnost, že bude student obě otázky umět?

Řešení: Tato úloha jde řešit dvěma způsoby. Jedním z nich je kombinatorický přístup a výpočet pravděpodobnosti za pomoci klasické definice.

U zkoušky si student nemůže vytáhnout žádnou otázku dvakrát, proto se bude jednat o úlohu bez opakování. Zřejmě je jedno, kterou ze dvou vytažených otázek si student vylosoval jako první a kterou jako druhou. Proto nezáleží na pořadí. Budeme pracovat s kombinacemi.

V případě všech možností, které mohou nastat, se vybírají dvě otázky ze 20, budeme počítat počet kombinací druhé třídy z 20. V případě možností vytažení dvou otázek, které student umí, se vybírají dvě otázky z 15, budeme počítat počet kombinací druhé třídy z 15.

Výpočet hledané pravděpodobnosti za pomoci klasické definice bude následující.

$$P(A) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{\frac{15\cdot14}{2}}{\frac{20\cdot19}{2}} = \frac{15\cdot 14}{20\cdot 19} = 0,5526$$

Pravděpodobnost, že student bude umět obě vylosované otázky je $55,26\%$.

Druhým možným způsobem je postup založený na znalosti podmíněné pravděpodobnosti. K tomu, aby si student vylosoval dvě otázky, které umí, musí si vylosovat nejprve jednu, kterou umí. Tuto situaci označíme jako jev *B*. Pravděpodobnost jevu *B* vypočítáme

$$P(B) = \frac{15}{20} = 0,75.$$

Při losování druhé otázky (označíme jako jev *A*) již víme, že byla jako první vytažena otázka, kterou student uměl (tj. nastal jev *B*). K losování zbylo už jen 19 otázek, z nichž 14 student umí. Platí tedy

$$P(A|B) = \frac{14}{19} = 0,7368.$$

Výpočet pravděpodobnosti vylosování dvojice otázek (tj. nastal jev *A* i jev *B*), které student umí, je na základě vztahu (3.7)

$$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) = 0,7368 \cdot 0,75 = 0,5526.$$

Obdrželi jsme tedy stejný výsledek jako při předchozím postupu.

Příklad 3.24

3.24. V příkladu 3.21 zjistěte, zda existuje nějaká spojitost mezi životním pojištěním a pojištěním bytu.

Řešení: Připomeňme si následující informace z příkladu 3.21.
Jev A … „Klient má sjednáno životní pojištění“, $P(A) = 0,4$,
jev B … „Klient má sjednáno pojištění bytu“,$P(B) = 0,7$,
$P(A \cap B) = 0,3$

Nyní nám již stačí ověřit postačující podmínku nezávislosti 3.8, čili ověřujeme, zda se pravděpodobnost průniku rovná součinu pravděpodobností jednotlivých jevů.

$$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28 \wedge P(A \cap B) = 0,3 \Longrightarrow P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$$

Prokázali jsme, že neplatí postačující podmínka nezávislosti. Jevy A a B jsou závislé, to znamená, že existuje spojitost mezi životním pojištěním a pojištěním bytu.

Příklad 3.25

3.25. Házíme dvakrát kostkou. Označme následující jevy:

A	…	„Padne sudé číslo na obou kostkách.“
B	…	„Na každé z kostek padne číslo menší než 3.“
C	…	„Na první kostce padne dvojnásobek toho, co na druhé.“
D	…	„Padne jednička a dvojka.“
E	…	„Na první kostce padne 1, na druhé 2.“

Které z uvedených jevů jsou nezávislé?

Řešení: Nejprve si všimněme jevů D a E. Někomu by se mohlo zdát, že se jedná o totožné jevy. Ale POZOR! V případě jevu D nerozlišujeme, na které kostce padne jednička, a na které dvojka. Na rozdíl od toho v případě jevu E je přesně řečeno, že na **první** kostce padla jednička, a na **druhé** dvojka.

Opět je dobré (i když samozřejmě ne nutné) si vypsat všechny možnosti, které mohou nastat. Poté si můžeme vyznačit možnosti náležející k jednotlivým jevům.

$$\text{Jev } A \ldots \left\{ \begin{array}{cccccc} 1-1, & 1-2, & 1-3, & 1-4, & 1-5, & 1-6, \\ 2-1, & 2-2, & 2-3, & 2-4, & 2-5, & 2-6, \\ 3-1, & 3-2, & 3-3, & 3-4, & 3-5, & 3-6, \\ 4-1, & 4-2, & 4-3, & 4-4, & 4-5, & 4-6, \\ 5-1, & 5-2, & 5-3, & 5-4, & 5-5, & 5-6, \\ 6-1, & 6-2, & 6-3, & 6-4, & 6-5, & 6-6 \end{array} \right\}$$

$$\text{Jev } B \ldots \left\{ \begin{array}{cccccc} 1-1, & 1-2, & 1-3, & 1-4, & 1-5, & 1-6, \\ 2-1, & 2-2, & 2-3, & 2-4, & 2-5, & 2-6, \\ 3-1, & 3-2, & 3-3, & 3-4, & 3-5, & 3-6, \\ 4-1, & 4-2, & 4-3, & 4-4, & 4-5, & 4-6, \\ 5-1, & 5-2, & 5-3, & 5-4, & 5-5, & 5-6, \\ 6-1, & 6-2, & 6-3, & 6-4, & 6-5, & 6-6 \end{array} \right\}$$

$$\text{Jev } C \ldots \left\{ \begin{array}{cccccc} 1-1, & 1-2, & 1-3, & 1-4, & 1-5, & 1-6, \\ 2-1, & 2-2, & 2-3, & 2-4, & 2-5, & 2-6, \\ 3-1, & 3-2, & 3-3, & 3-4, & 3-5, & 3-6, \\ 4-1, & 4-2, & 4-3, & 4-4, & 4-5, & 4-6, \\ 5-1, & 5-2, & 5-3, & 5-4, & 5-5, & 5-6, \\ 6-1, & 6-2, & 6-3, & 6-4, & 6-5, & 6-6 \end{array} \right\}$$

$$\text{Jev } D \ldots \left\{ \begin{array}{cccccc} 1-1, & 1-2, & 1-3, & 1-4, & 1-5, & 1-6, \\ 2-1, & 2-2, & 2-3, & 2-4, & 2-5, & 2-6, \\ 3-1, & 3-2, & 3-3, & 3-4, & 3-5, & 3-6, \\ 4-1, & 4-2, & 4-3, & 4-4, & 4-5, & 4-6, \\ 5-1, & 5-2, & 5-3, & 5-4, & 5-5, & 5-6, \\ 6-1, & 6-2, & 6-3, & 6-4, & 6-5, & 6-6 \end{array} \right\}$$

$$\text{Jev } E \ldots \left\{ \begin{array}{llllll} 1-1, & 1-2, & 1-3, & 1-4, & 1-5, & 1-6, \\ 2-1, & 2-2, & 2-3, & 2-4, & 2-5, & 2-6, \\ 3-1, & 3-2, & 3-3, & 3-4, & 3-5, & 3-6, \\ 4-1, & 4-2, & 4-3, & 4-4, & 4-5, & 4-6, \\ 5-1, & 5-2, & 5-3, & 5-4, & 5-5, & 5-6, \\ 6-1, & 6-2, & 6-3, & 6-4, & 6-5, & 6-6 \end{array} \right\}$$

Nyní můžeme lehce vypočítat pravděpodobnosti jednotlivých jevů.

$$\begin{array}{lll} P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, & P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, & P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \\ P(D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, & P(E) = \frac{1}{36}. & \end{array}$$

Následně spočítáme pravděposobnosti průniků všech možných dvojic jevů. Z kombinatoriky víme, že počet těchto dvojic se vypočítá jako počet kombinací druhé třídy z 5 prvků, tj. $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$. Budeme tedy probírat 10 případů dvojic jevů. Počty prvků v průniku spočítáme jako počet společně označených prvků v jednotlivých jevech.

$$\begin{array}{ll} P(A \cap B) = \frac{1}{36}, & P(A \cap C) = \frac{1}{36}, \\ P(A \cap D) = \frac{0}{36} = 0, & P(A \cap E) = \frac{0}{36} = 0, \\ P(B \cap C) = \frac{1}{36}, & P(B \cap D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \\ P(B \cap E) = \frac{1}{36}, & P(C \cap D) = \frac{1}{36}, \\ P(C \cap E) = \frac{0}{36} = 0, & P(D \cap E) = \frac{1}{36}. \end{array}$$

Nyní již můžeme dle nutné a postačující podmínky nezávislosti 3.8 rozhodnout, zda je daná dvojice jevů závislá, či nezávislá.

Jevy A a B $\ldots P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9}$ … nezávislé

Jevy A a C $\ldots P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48}$ … závislé

Jevy A a D $\ldots P(A \cap D) = 0 \neq P(A) \cdot P(D) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{72}$ … závislé

Jevy A a E $\ldots P(A \cap E) = 0 \neq P(A) \cdot P(E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{144}$ … závislé

Jevy B a C $\ldots P(B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{108}$ … závislé

Jevy B a D $\ldots P(B \cap D) = \frac{1}{18} \neq P(B) \cdot P(D) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{162}$ … závislé

Jevy B a E $\ldots P(B \cap E) = \frac{1}{36} \neq P(B) \cdot P(E) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{1296}$ … závislé

Jevy C a D $\ldots P(C \cap D) = \frac{1}{36} \neq P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{216}$ … závislé

Jevy C a E $\ldots P(C \cap E) = 0 \neq P(C) \cdot P(E) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{432}$ … závislé

Jevy D a E $\ldots P(D \cap E) = \frac{1}{36} \neq P(D) \cdot P(E) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{648}$ … závislé

Příklad 3.26

3.26. Dva střelci střílejí na terč. Adam se trefí do terče s pravděpodobností 90%, Bedřich pouze s pravděpodobností 70%. Jaká je pravděpodobnost, že se trefí

a) oba střelci,

b) alespoň jeden ze střelců,

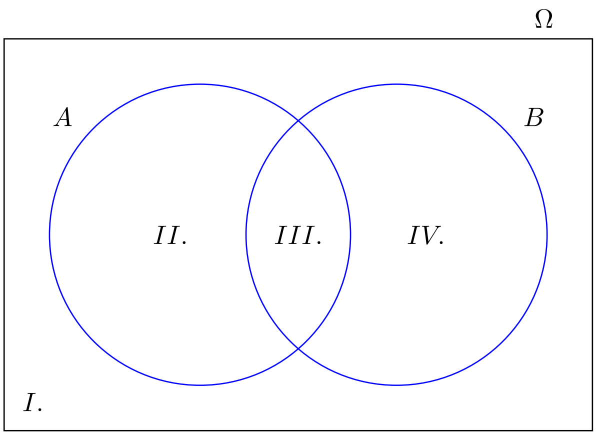
c) pouze jeden ze střelců,

d) pouze Bedřich,

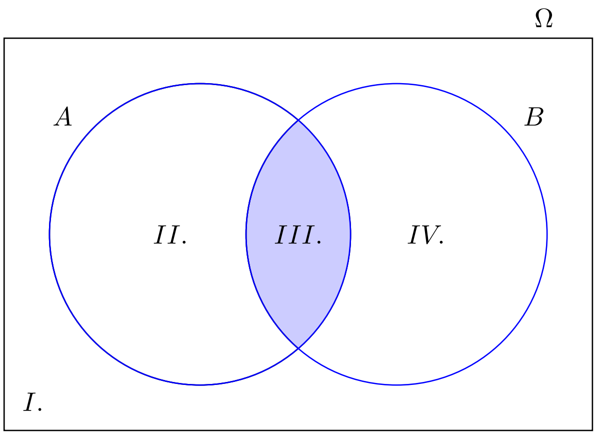
e) žádný ze střelců?

Řešení: Musíme si uvědomit, že střelci střílejí na terč. Každý střílí „po svém“, tedy fakt, že se trefí Adam, nijak nezávisí a ani neovlivňuje fakt, že se trefí Bedřich. Označíme si jev A … „Adam se trefí“ a jev B … „Bedřich se trefí“. Tyto dva jevy jsou nezávislé.

Situaci si v každé úloze zvlášť znázorníme pomocí Vennova diagramu. Vybarvíme vždy plochy, které odpovídají jevu, jehož pravděpodobnost počítáme. Jsme-li uvnitř kruhu znázorňujícího jev A, znamená to, že Adam se trefil, jsme-li uvnitř kruhu znázorňujícího jev B, značí to, že se trefil Bedřich. Všimneme si, že Vennův diagram popisující situaci se dvěma základními jevy (viz obrázek 3.11), obsahuje čtyři souvislé plochy. Postupně si pro každou z těchto ploch uvědomíme, zda odpovídá námi sledovanému jevu. Pokud ano, obarvíme ji. Uvnitř plochy I. se netrefil ani jeden ze střelců (tj. trefí se nula střelců), uvnitř plochy II. se trefil pouze Adam (tj. trefí se jeden střelec), uvnitř plochy III. Adam i Bedřich (tj. trefí se dva střelci) a uvnitř plochy IV. se trefí jen Bedřich (tj. trefí se jeden střelec).

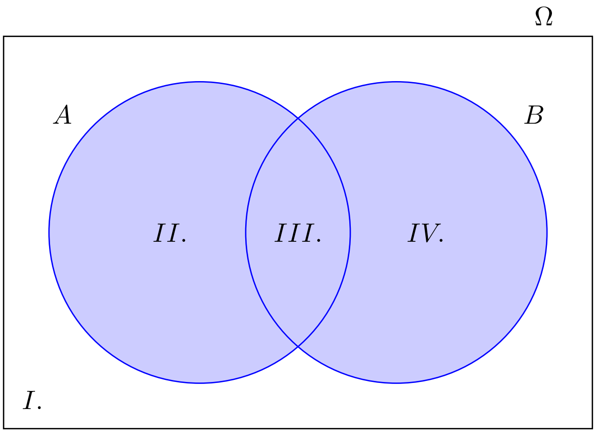


Obrázek 3.11: Vennův diagram se dvěma jevy

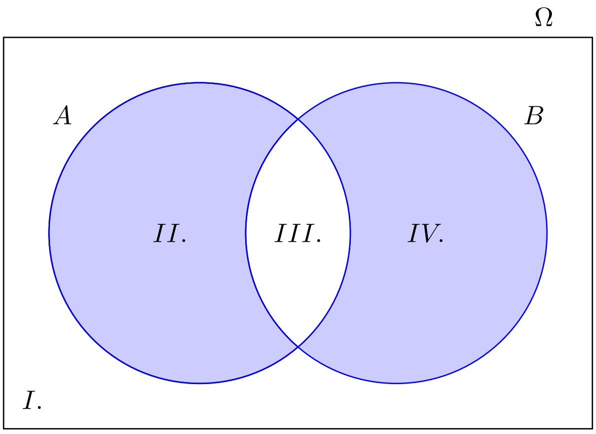


Obrázek 3.12: Trefí se oba střelci

Poté si uvědomíme, jestli námi vyznačená plocha neodpovídá některé z operací prováděných s jevy či jestli námi vyznačenou plochu nelze „vystříhat“ a „poslepovat“ z ploch, které již máme vypočítány nebo je umíme vypočítat.



Obrázek 3.13: Trefí se alespoň jeden střelec



Obrázek 3.14: Trefí se právě jeden střelec

a) Sledujeme situaci, kdy se trefí oba střelci. Tomuto stavu odpovídá vybarvení pouze plochy III., viz obrázek 3.12. Vidíme, že jsme vybarvili stejnou plochu, jaká je na Obrázku 3.6 znázorňujícím průnik. Počítáme tedy pravděpodobnost průniku jevů A a B. Jelikož jsou jevy A a B nezávislé, můžeme k výpočtu této pravděpodobnosti využít vztah 3.8.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$$

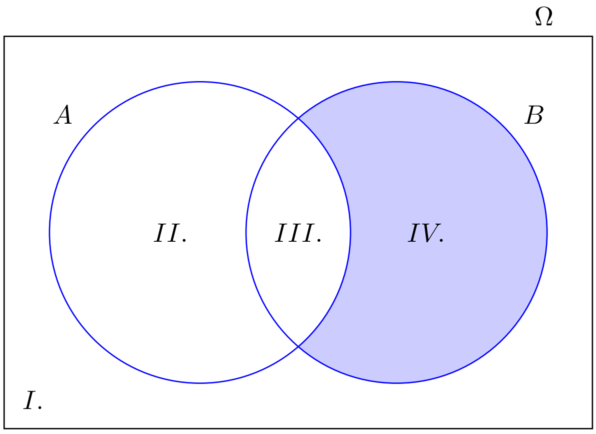
Pravděpodobnost, že se trefí oba střelci, je 63%.

b) Nyní sledujeme situaci, kdy se trefí alespoň jeden ze střelců. Tomuto stavu odpovídá vybarvení ploch II., III. a IV., viz Obrázek 3.13. Vidíme, že jsme vybarvili stejnou plochu, jaká je na Obrázku 3.7, který znázorňuje sjednocení. Počítáme tedy pravděpodobnost sjednocení jevů A a B, a to na základě vzorce 3.5.

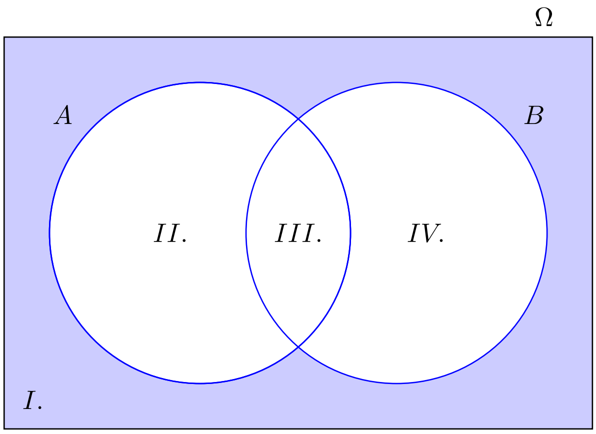
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 + 0,7 - 0,63 = 0,97$$

Pravděpodobnost, že se trefí alespoň jeden ze střelců, je 97%.

c) V případě, že se trefí pouze jeden ze střelců, vybarvíme plochy II. a IV., viz obrázek 3.14. Tuto plochu například dostaneme, odsřihneme-li z obarvené plochy na obrázku 3.13 plochu obarvenou na Obrázku 3.12. To znamená, že od pravděpodobnosti sjednocení jevů A a B odečteme pravděpodobnost průniku těchto



Obrázek 3.15: Trefí se pouze Bedřich



Obrázek 3.16: Netrefí se ani jeden střelec

jevů.

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,97 - 0,63 = 0,34$$

Pravděpodobnost, že se trefí právě jeden ze střelců, je 34%.

d) V dalším případu nás zajímá situace, kdy se trefí pouze Bedřich, to znamená, že vybarvíme pouze plochu IV., viz obrázek 3.15. Tuto plochu například dostaneme, odsřihneme-li z plochy kruhu *B* plochu obarvenou na Obrázku 3.12. To znamená, že od pravděpodobnosti jevu *B* odečteme pravděpodobnost průniku jevů *A* a *B*.

$$P(B) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,63 = 0,07$$

Pravděpodobnost, že se trefí pouze Bedřich, je jen 7%.

e) Nakonec máme spočítat pravděpodobnost, že se netrefí žádný ze střelců. Tomu odpovídá vybarvení plochy I., viz Obrázek 3.16. Tuto plochu například dostaneme, odsřihneme-li z plochy celého obdélníku označujícího množinu všech elementárních jevů Ω plochu obarvenou na obrázku 3.13. To znamená, že od pravděpodobnosti jevu jistého odečteme pravděpodobnost sjednocení jevů *A* a *B*.

$$1 - P(A \cup B) = 1 - 0,97 = 0,03$$

Pravděpodobnost, že se netrefí právě ani jeden ze střelců, je 3%.

Příklad 3.27

3.27. Student vykonává zkoušku skládající se ze tří samostatných částí. Jednotlivé oblasti zkoušky spolu nesouvisí. Pravděpodobnost, že student splní úspěšně první část je, 70%, druhou 95% a třetí 80%. Jaká je pravděpodobnost, že

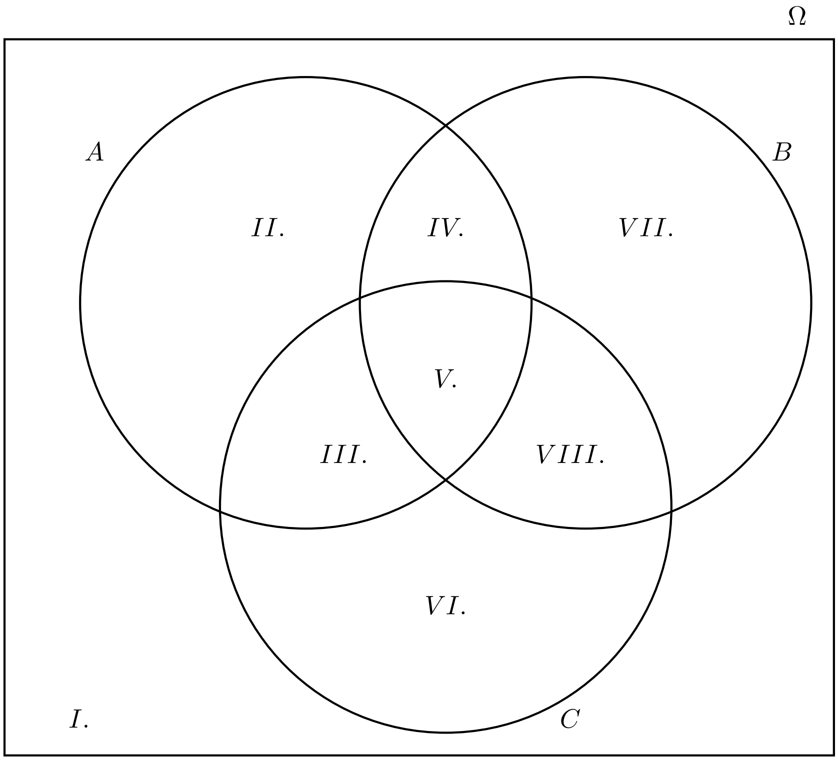
a) vykoná úspěšně všechny tři části zkoušky,

b) nevykoná úspěšně žádnou z částí zkoušky,

c) pouze první část zkoušky,

d) alespoň dvě části zkoušky?

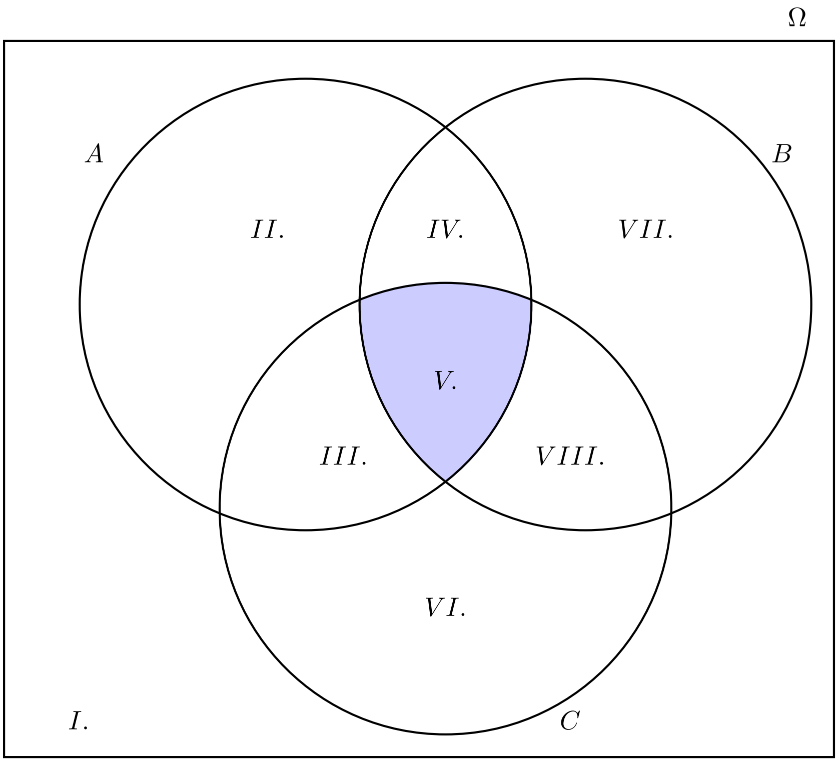
Řešení: Přístup k řešení této úlohy bude velmi podobný předchozímu příkladu. Bohužel vše bude složitější, a tím i méně přehledné. Opět si můžeme uvědomit, že úspěšné splnění jednotlivých částí zkoušky na sobě nijak nezávisí. Máme tedy tři nezávislé jevy. Označíme si jev A ... složení první části, jev B ... složení druhé části a jev C ... složení třetí části.



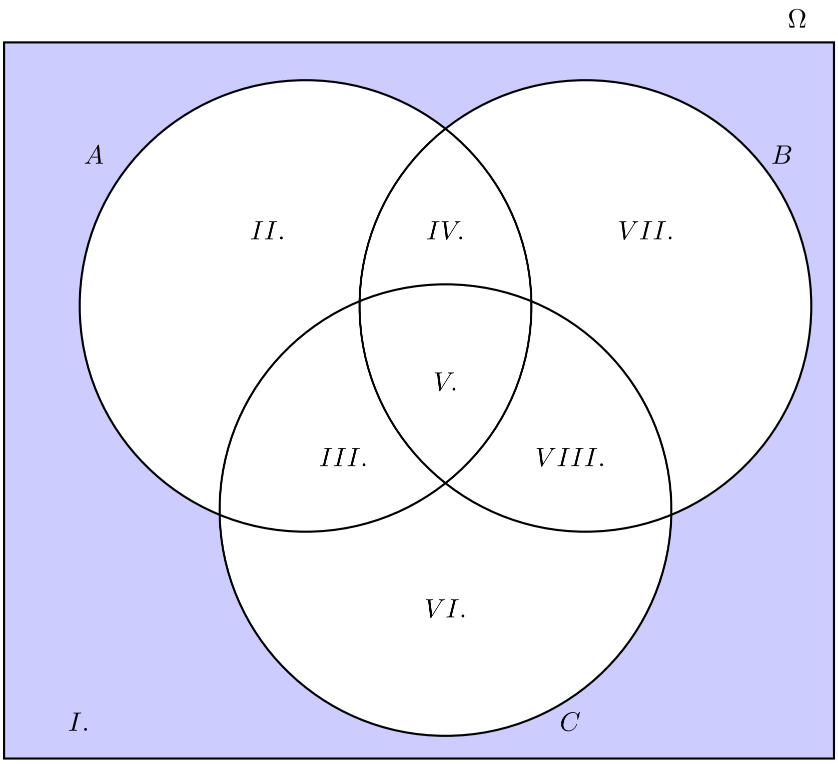
Obrázek 3.17: Vennův diagram se třemi jevy

Situaci si v každé úloze zvlášť znázorníme pomocí Vennova diagramu. Vybarvíme vždy plochy, které odpovídají jevu, jehož pravděpodobnost počítáme. Jsme-li uvnitř kruhu znázorňujícího jev A, znamená to, že student úspěšně složil první část, jsme-li uvnitř kruhu znázorňujícího jev B, značí to úspěšné složení druhé části a jsme-li uvnitř kruhu znázorňujícího jev C, značí to úspěšné složení třetí části. Všimneme si, že Vennův diagram popisující situaci se třemi základními jevy (viz obrázek 3.17), obsahuje osm souvislých ploch. Postupně si pro každou z těchto ploch uvědomíme, zda odpovídá námi sledovanému jevu. Pokud ano, obarvíme ji.

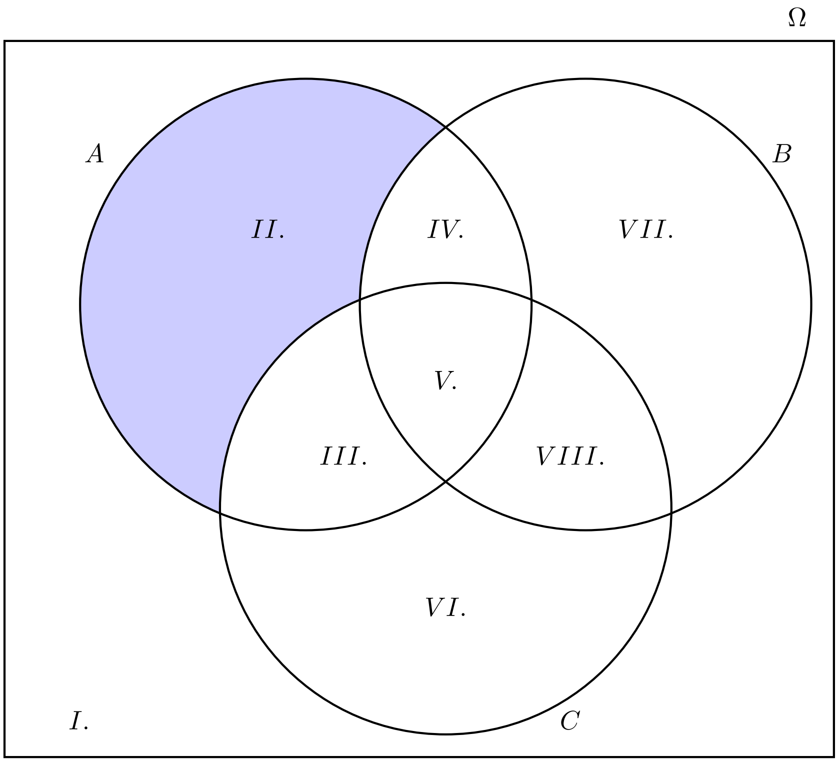
Uvnitř plochy I. nebyla splněna žádná z částí zkoušky (tj. bylo splněno nula částí), uvnitř plochy II. je splněna pouze první část (tj. byla splněna jedna část), uvnitř plochy III. pouze první a třetí část (tj. byly splněny dvě části), uvnitř plochy IV. pouze první



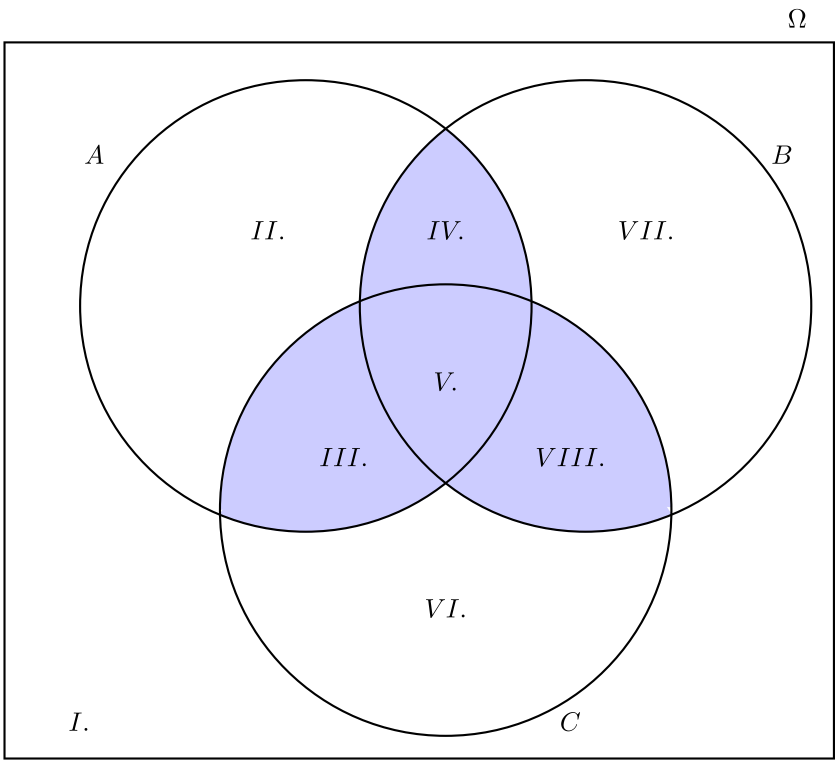
Obrázek 3.18: Všechny části zkoušky splněny



Obrázek 3.19: Nesplněna žádná část zkoušky



Obrázek 3.20: Splněna pouze první část zkoušky



Obrázek 3.21: Splněny alespoň dvě části zkoušky

a druhá část (tj. byly splněny dvě části), uvnitř plochy V. byly splněny všechny tři části(tj. byly splněny tři části), uvnitř plochy VI. byla splněna pouze třetí část (tj. byla splněna jedna část), uvnitř plochy VII. pouze druhá část (tj. byla splněna jedna část) a uvnitř plochy VIII. pouze druhá a třetí část (tj. byly splněny dvě části).

Poté si opět uvědomíme, jestli námi vyznačená plocha neodpovídá některé z operací prováděných s jevy či jestli námi vyznačenou plochu nelze „vystříhat“ a „poslepovat“ z ploch, které již máme vypočítány nebo je umíme vypočítat.

a) Sledujeme situaci, kdy byly splněny všechny tři části zkoušky. Tomuto stavu odpovídá vybarvení pouze plochy V., viz Obrázek 3.18. Vidíme, že jsme vybarvili plochu znázorňující průnik všech tří jevů. Počítáme tedy pravděpodobnost průniku jevů A, B a C. Jelikož jsou jevy A a B nezávislé, můžeme k výpočtu pravděpodobnosti jejich průniku využít vztah 3.8. Dále i jevy $(A \cap B)$ a C jsou nezávislé jevy, proto můžeme opět aplikovat vzorec 3.8 a celý výpočet shrnout

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,7 \cdot 0,95 \cdot 0,8 = 0,532$$

Pravděpodobnost, že student složí úspěšně všechny tři části je $53,2\%$.

b) Nyní sledujeme situaci, kdy student nevykoná žádnou část zkoušky. Tomuto stavu odpovídá vybarvení plochy I., viz Obrázek 3.19. Vidíme, že jsme vybarvili plochu, která vznikne odstřižením plochy znázorňující sjednocení všech tří jevů od celkové plochy. Počítáme tedy pravděpodobnost sjednocení jevů A, B a C, a to tak, že nejprve na základě vzorce 3.5 spočítáme pravděpodobnost sjednocení jevů A a B.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,95 = 0,665 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,95 - 0,665 = 0,985 \end{aligned}$$

Návazným aplikováním stejného vzorce na sjednocení jevů $(A \cup B)$ a C obdržíme následující výpočet.

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P(A \cup B) \cdot P(C) = 0,985 \cdot 0,8 = 0,788 \\ P((A \cup B) \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= 0,985 + 0,8 - 0,788 = 0,997 \end{aligned}$$

Nakonec, jak jsme již řekli, odečteme tuto pravděpodobnost od pravděpodobnosti jistého jevu (tj. od 1).

$$1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0,997 = 0,003$$

Pravděpodobnost, že nesloží úspěšně ani jednu z částí, je pouze $0,3\%$.

c) V případě, že student složí úspěšně pouze první část zkoušky, vybarvíme pouze plochu II., viz Obrázek 3.20. Tuto plochu například dostaneme, odstřihneme-li z plochy jevu A plochy III., IV. a V. Plochy IV. a V. dohromady znázorňují průnik jevů A a B. Plochu III. obdržíme, pokud od plochy znázorňující průnik jevů A a C odstřihneme plochu V. znázorňující průnik všech tří jevů. Pravděpodobnost $P(A \cap B)$ a $P(A \cap B \cap C)$ již vypočítánu máme z bodu a), vypočítáme tedy už jen pravděpodobnost $P(A \cap C)$.

$$P(A \cap C) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$$

Konečný výpočet bude

$$\begin{aligned} P(A) - P(A \cap B) - (P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)) &= \\ = 0,7 - 0,665 - (0,56 - 0,532) &= 0,007. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že student složí úspěšně pouze první část, je $0,7\%$.

d) Nakonec máme spočítat pravděpodobnost, že student vykoná úspěšně alespoň dvě části zkoušky. Tomu odpovídá vybarvení ploch III., IV., V. a VIII. viz Obrázek 3.21. Tuto plochu například dostaneme slepením jednotlivých zmíněných ploch. Kromě plochy VIII. jsme již vše vypočítali v předchozí části. Plochu VIII. získáme například odstřižením plochy V. znázorňující průnik všech tří jevů od plochy znázorňující průnik jevů *B* a *C*.

$$P(B \cap C) = 0,95 \cdot 0,8 = 0,76$$
$$P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0,76 - 0,532 = 0,228$$

Konečný výpočet bude

$$(\text{IV.} + \text{V.}) + \text{III.} + \text{VIII.} = 0,665 + (0,56 - 0,532) + 0,228 = 0,921$$

Pravděpodobnost, že student vykoná úspěšně alespoň dvě části zkoušky, je $92,1\%$.

3.28. Házíme šestkrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že **Příklad 3.28**

a) padne šestkrát dvojka,

b) padne čtyřikrát dvojka (a dvakrát něco jiného než dvojka),

c) padne alespoň jedna dvojka,

d) alespoň třikrát dvojka?

Řešení: Zcela zřejmě se kostka nijak neničí a jednotlivé hody se vzájemně nijak neovlivňují. Jednotlivé hody můžeme považovat za nezávislé pokusy a jejich výsledky za nezávislé jevy.

a) Padne šestkrát dvojka, to znamená, že dvojka padla v prvním hodu a zároveň v druhém hodu a zároveň ve třetím hodu, ... Mluvíme tedy o průniku šesti jevů. Výše jsme řekli, že jevy jsou nezávislé, to znamená, že pravděpodobnost průniku těchto jevů se rovná součinu pravděpodobností jednotlivých jevů. Pravděpodobnost, že v jednotlivém hodu padne dvojka je zřejmě $\frac{1}{6}$. Potom platí

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{6^6} \doteq 0,00002.$$

Pravděpodobnost, že padne šest dvojek, je asi $0,002\%$.

b) Jak vypadá situace, kdy padne čtyřikrát dvojka (a dvakrát něco jiného než dvojka)? Například (2,2,2,2,x,x), ale i (2,2,2,x,2,x), to znamená, že hledáme všechny uspořádané pětice skládající se ze čtyř dvojek a dvou jiných čísel, tedy hledáme všechny permutace s opakováním, kdy jeden prvek se opakuje čtyřikrát a druhý dvakrát. Počet těchto permutací je

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Máme 15 možných stavů, kdy padly čtyři dvojky. Je jasné, že nastal jeden z těchto případů, což mimo jiné znamená, že jsou tyto jevy neslučitelné a pravděpodobnost jejich sjednocení je rovna součtu pravděpodobností jednotlivých jevů.

A jaké jsou tyto pravděpodobnosti? Vidíme, že se jedná o průnik šesti nezávislých jevů, přičemž čtyři z nich mají pravděpodobnost $\frac{1}{6}$ a dva $\frac{5}{6}$. To znamená, že jednotlivé pravděpodobnosti jsou rovny

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Celkovou zjišťovanou pravděpodobnost vypočteme jako součet patnácti pravděpodobností stejné hodnoty, čili jako patnáctinásobek této hodnoty.

$$P(B) = 15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \doteq 0,0080$$

Pravděpodobnost, že padne čtyřikrát dvojka, je asi $0,8\%$.

c) Padne alespoň jedna dvojka. Tento fakt můžeme rozepsat dvěma způsoby. Buď můžeme říci, že padla jedna dvojka, nebo padly dvě dvojky, nebo padly tři dvojky, ... Tento rozpis ukazuje na sjednocení jevů. Navíc si musíme uvědomit, že nemůže nastat zároveň, že by padla (právě) jedna dvojka a (právě) dvě dvojky. Proto se jedná o neslučitelné jevy. Pravděpodobnost sjednocení neslučitelných jevů se rovná součtu pravděpodobností jednotlivých jevů (viz vzorec 3.6). Museli bychom tedy spočítat pravděpodobnosti šesti jevů, z nichž první znamená: padla jedna dvojka, druhý: padnou dvě dvojky, třetí: padnou tři dvojky, ..., a poté všech šest pravděpodobností sečíst. Výpočet jednotlivých pravděpodobností by se prováděl obdobně jako v případě b), kdy jsme počítali pravděpodobnost jevu, že padnou čtyři dvojky. Počítali jsme dle postupu

$$15 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Obdobně bychom spočítali pravděpodobnost v případě, že nám padne jedna dvojka

$$\binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \doteq 0,4019,$$

že nám padnou dvě dvojky

$$\binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \doteq +0,2009,$$

že nám padnou tři dvojky

$$\binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \doteq 0,0536,$$

že nám padne pět dvojek

$$\binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \doteq 0,0003,$$

že nám padne šest dvojek

$$\binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 \doteq 0,00002.$$

Celková pravděpodobnost se vypočítá jako součet všech vypočítaných pravděpodobností

$$P(C) \doteq 0,4019 + 0,2009 + 0,0536 + 0,0080 + 0,0003 + 0,00002 = 0,66472.$$

Jak vidíme, tento postup byl velmi pracný.

Ale existuje i jiný přístup. Můžeme si uvědomit, že jev „Padne alespoň jedna dvojka“ je opačným jevem k jevu „Nepadne žádná dvojka“. Pravděpodobnost opačného jevu je rovna doplňkové pravděpodobnosti, viz (3.4). Stačí nám tedy spočítat pravděpodobnost jevu „Nepadne žádná dvojka“, což jiným způsobem můžeme opsat tak, že „V prvním hodu nepadla dvojka a zároveň v druhém hodu nepadla dvojka a zároveň ve třetím hodu nepadla dvojka, ...“ Jedná se o vzájemně nezávislé jevy, a proto pravděpodobnost jejich průniku se rovná součinu pravděpodobností. Pravděpodobnost každého z jednotlivých jevů je rovna $\frac{5}{6}$.

$$P(C') = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{5^6}{6^6} \doteq 0,3349$$
$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - 0,3349 = 0,6651$$

Obdrželi jsme (skoro) stejný výsledek jako v předchozím výpočtu. Rozdíl je dán zaokrouhlovací chybou. Ta byla větší v předchozím výpočtu, protože jsme v něm zaokrouhlovali všech šest mezivýpočtů. Pravděpodobnost, že padne alespoň jedna dvojka, je asi $66,51\%$.

d) V posledním případu máme vypočítat pravděpodobnost situace, kdy nám padnou alespoň tři dvojky. To znamená, že padnou tři dvojky, nebo padnou čtyři dvojky, nebo padne pět pětek nebo padně šest pětek. Náš sledovaný jev je sjednocením čtyř dílčích jevů. Tyto jednotlivé jevy jsou vzájemně neslučitelné, pravděpodobnost sjednocení se vypočítá jako součet pravděpodobností jednotlivých jevů. Všechny tyto pravděpodobnosti jsme již vypočítali v části c). Můžeme uvést konečný výpočet.

$$P(D) = 0,0536 + 0,0080 + 0,0003 + 0,00002 = 0,06192$$

Pravděpodobnost, že padnou alespoň tři dvojky, je asi $6,19\%$.

3.4 Úplná pravděpodobnost

Někdy se dostaneme do situace, že nás zajímá pravděpodobnost výskytu jevu A, jestliže známe pravděpodobnosti výskytu tohoto jevu za různých podmínek $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, ..., $P(A|B_k)$ a také pravděpodobnosti, s jakými tyto podmínky nastanou, tj. $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_k)$. Jinými slovy víme, že náhodnému pokusu, jehož výsledkem může být námi sledovaný jev, předcházel jiný náhodný pokus, jehož všechny možné výsledky známe, ale nevíme, který z výsledků nastal.

Příkladem může být situace, kdy známe, jak velkou část populace tvoří ženy a jakou muži. Dále víme, jak velká část žen a jaký podíl mužů trpí určitou chorobou. Zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba trpí touto chorobou.

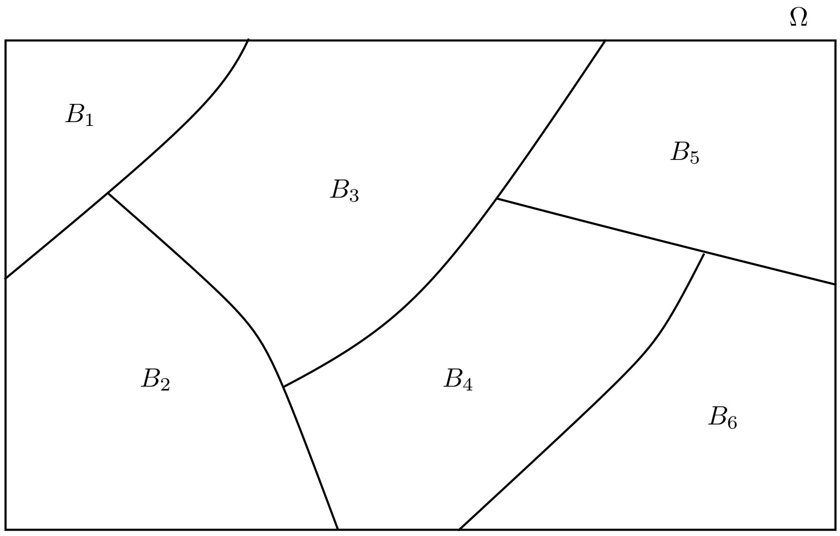
Takto jednoduchý příklad by asi někteří z nás na základě dosavadních znalostí již uměli vypočítat. Ale jistě ne všichni. Navíc se většinou ocitneme v daleko složitější situaci. Proto si uvedeme trochu teorie a pár vzorců, které nám v podobných případech pomohou.

Definice 3.4.1. Řekneme, že soubor množin $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ tvoří *rozklad* neprázdné množiny Ω na třídy, jestliže platí:

- $\forall i = 1, \ldots, n : B_i \subseteq \Omega$
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$
- $\forall i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n; i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$.

Rozkladem množiny Ω na třídy je soubor disjunktních podmnožin, jejichž sjednocením je celá množina Ω. Lidově řečeno, množinu Ω „rozstříháme“ na díly. Na Obrázku 3.22 názorně vidíme rozklad množiny Ω na šest tříd.

Uvědomme si, že každý náhodný jev můžeme prezentovat jako množinu. Rozkladu množiny všech elementárních jevů Ω na třídy někdy říkáme *úplný systém vzájemně neslučitelných jevů*.

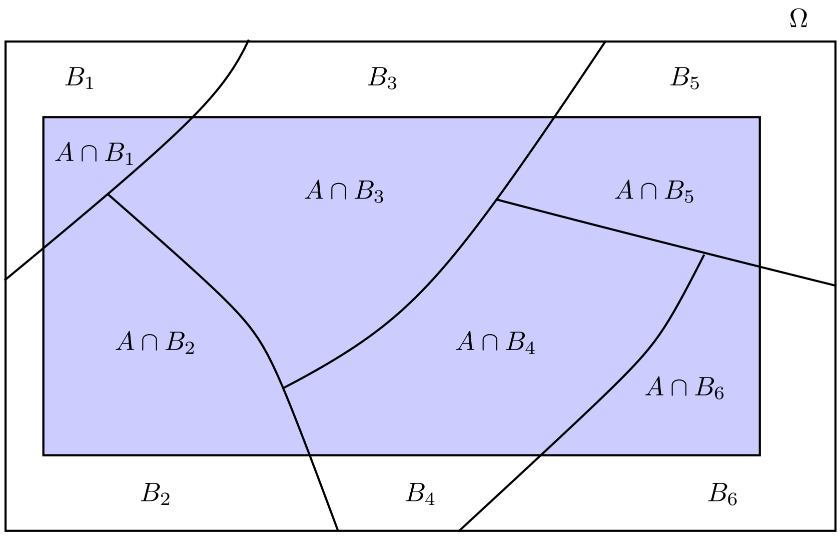


Obrázek 3.22: Rozklad na třídy

Na Obrázku 3.23 vidíme rozklad libovolného náhodného jevu *A* v úplném systému vzájemně neslučitelných jevů. Připomeneme-li si představu P (=pravděpodobnosti) jako P (=plochy) a také vzorec pro podmíněnou pravděpodobnost (3.7), pak si na základě tohoto obrázku lehce odvodíme vzorec

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_6) \\ &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_6) \cdot P(A|B_6). \end{aligned}$$

Zobecněním je pak následující vzorec pro úplnou pravděpodobnost.



Obrázek 3.23: Rozklad jevu *A* v úplném systému vzájemně neslučitelných jevů

Věta 3.4.2 (Úplná pravděpodobnost). *Jestliže jevy* $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ *tvoří úplný systém vzájemně neslučitelných jevů a platí* $P(B_i) \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n$, *můžeme pravděpodobnost libovolného jevu* A *spočítat pomocí tzv. vzorce úplné pravděpodobnosti*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i). \tag{3.9}$$

3.29. V dílně jsou dva stroje. První, na kterém je vyrobeno 60% celé produkce, má zmetkovitost 2%. Na druhém stroji je vyroben zbytek produkce. Tento stroj je však méně kvalitní a vyrábí 10% zmetků. Jak velký podíl z celkové produkce dílny tvoří zmetky?

Příklad 3.29

Řešení: Co můžeme vyčíst ze zadání příkladu? Označme si jev A ...výrobek je zmetek, jev B_1 ...výrobek je vyroben na prvním stroji a jev B_2 ...výrobek je vyroben na druhém stroji. Víme, že $P(B_1) = 0,6$, $P(B_2) = 0,4$, $P(A|B_1) = 0,02$ a $P(A|B_2) = 0,1$.

Zřejmě platí $B_1 \cap B_2 = \emptyset \wedge B_1 \cup B_2 = \Omega$, to znamená, že jevy B_1 a B_2 tvoří úplný systém vzájemně neslučitelných jevů, můžeme tedy vypočítat pravděpodobnost jevu A pomocí vzorce (3.9) pro úplnou pravděpodobnost.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) \\
&= 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,1 = 0,012 + 0,04 = 0,052
\end{aligned}
$$

Zmetky tvoří $5,2\%$ ze všech výrobků vyrobených v dílně.

Jakou úvahu bychom mohli použít, pokud bychom neznali vzorec (3.9) pro úplnou pravděpodobnost? Víme, že zmetky mohou být vyrobeny na prvním nebo na druhém stroji, to znamená, že celkový počet zmetků je součtem zmetků z prvního a z druhého stroje. A kolik zmetků je z prvního stroje? Ze zadání víme, že 2% z 60% všech výrobků, tj. $0,02 \cdot 0,6$. Obdobně je 10% z 40% výrobků tvořeno zmetky z druhého stroje, tj. $0,1 \cdot 0,4$. Celkem tedy máme $0,02 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,4 = 0,052$. Obdrželi jsme stejný výsledek jako při předchozím způsobu výpočtu.

3.30. Studenti prvního ročníku tvoří polovinu všech studentů sledované vysoké školy, studenti druhého ročníku tvoří třetinu a zbytek studentů jsou studenti třetího ročníku. V prvním ročníku je 70% dívek, ve druhém 45% a ve třetím 60% dívek. Jak velký podíl studentů vysoké školy tvoří dívky?

Příklad 3.30

Řešení: Označme si jev A ...student je dívka, jev B_1 ...student prvního ročníku, jev B_2 ...student druhého ročníku a jev B_3 ...student třetího ročníku. Víme, že $P(B_1) = \frac{1}{2}$, $P(B_2) = \frac{1}{3}$, $P(B_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $P(A|B_1) = 0,7$, $P(A|B_2) = 0,45$ a $P(A|B_3) = 0,6$.

Platí $B_1 \cap B_2 = \emptyset \wedge B_1 \cap B_3 = \emptyset \wedge B_2 \cap B_3 = \emptyset \wedge B_1 \cup B_2 \cup B_2 = \Omega$, to znamená, že jevy B_1, B_2 a B_3 tvoří úplný systém vzájemně neslučitelných jevů, můžeme tedy vypočítat pravděpodobnost jevu A pomocí vzorce (3.9) pro úplnou pravděpodobnost.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0,7 + \frac{1}{3} \cdot 0,45 + \frac{1}{6} \cdot 0,6 = 0,35 + 0,15 + 0,1 = 0,6
\end{aligned}
$$

Dívky tvoří 60% ze všech studentů školy.

Někdy se dostaneme do situace, kdy potřebujeme zjistit pravděpodobnou příčinu sledovaného jevu. Například nejpravděpodobnější příčinu nějaké nemoci, pravděpodobnosti všech možných příčin ekonomického stavu naší firmy atd.

Touto problematikou se zabývá Bayesova věta, která se většinou uvádí ve formě tzv. Bayesova vzorce.

Věta 3.4.3 (Bayesův vzorec). *Jestliže jevy $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ tvoří úplný systém vzájemně neslučitelných jevů,* A *je libovolný náhodný jev, známe jednotlivé pravděpodobnosti všech jevů B_i, $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ a dále známe podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_1), P(A|B_2), \dots, P(A|B_n)$, přičemž platí $P(A) \neq 0$ a $P(B_i) \neq 0$, pro všechna $i = 1, \dots, n$, pak můžeme spočítat všechny pravděpodobnosti $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$, ..., $P(B_n|A)$ pomocí tzv. Bayesova vzorce*

$$
P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}. \tag{3.10}
$$

Pro pochopení bude názornější a mnohdy k použití stačí nejjednodušší varianta Bayesova vzorce

$$P(B|A) = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(A|B) + P(B')\cdot P(A|B')},$$
$$P(B'|A) = \frac{P(B')\cdot P(A|B')}{P(B)\cdot P(A|B) + P(B')\cdot P(A|B')}. \tag{3.11}$$

V čem je zjednodušení verze Bayesova vzorce v poznámce? Úplný systém vzájemně neslučitelných jevů obsahuje pouze dva jevy. Prvním jevem nechť je třeba jev A. Jak bude vypadat druhý jev (označíme jej B)? Víme, že musí mít s jevem A prázdný průnik a že sjednocením těchto dvou jevů musí být celá množina všech elementárních jevů Ω, symbolicky zapsáno $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = \Omega$.

Takovéto vlastnosti má opačný jev k jevu A. To znamená, že $B = A'$. Pak už lehce za využití definičního vzorce 3.7 pro podmíněnou pravděpodobnost a vzorce (3.9) pro úplnou pravděpodobnost odvodíme následující rovnosti

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(A|B) + P(B')\cdot P(A|B')}.$$

Tím jsme se dostali k vzorci (3.11). Základní Bayesův vzorec (3.10) by se odvodil podobným (i když pro nás méně přehledným) způsobem.

Příklad 3.31

3.31. V Příkladu 3.29 zjistěte, jaká je pravděpodobnost, že náhodný zmetek byl vyroben na prvním stroji.

Řešení: Připomeňme si následující informace z Příkladu 3.29.
Jev B_1 ... výrobek je vyroben na prvním stroji, $P(B_1) = 0,6$,
jev B_2 ... výrobek je vyroben na prvním stroji, $P(B_2) = 0,4$,
jev A ... výrobek je zmetek, $P(A|B_1) = 0,02$, $P(A|B_2) = 0,1$.

Nyní nám již stačí dosadit do Bayesova vzorce (3.10) a vypočítat požadovanou pravděpodobnost.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\cdot P(A|B_2)}$$
$$= \frac{0,6\cdot 0,02}{0,6\cdot 0,02 + 0,4\cdot 0,1} = \frac{0,012}{0,052} = 0,2308$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný zmetek byl vyroben na prvním stroji, je $23,08\%$.

Příklad 3.32

3.32. Uvažujme případ školy z Příkladu 3.30. Na chodbě školy jsme potkali dívku. Jaká je pravděpodobnost, že je studentkou třetího ročníku?

Řešení: Připomeňme si následující informace z příkladu 3.30.
Jev B_1 ... student je v prvním ročníku, $P(B_1) = \frac{1}{2}$,
jev B_2 ... student je v druhém ročníku, $P(B_2) = \frac{1}{3}$,
jev B_3 ... student je v třetím ročníku, $P(B_3) = \frac{1}{6}$,
jev A ... student je dívka, $P(A|B_1) = 0,70$, $P(A|B_2) = 0,45$, $P(A|B_3) = 0,60$.

Nyní nám již stačí dosadit do Bayesova vzorce 3.10 a vypočítat požadovanou pravděpodobnost.

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\cdot P(A|B_2) + P(B_3)\cdot P(A|B_3)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}\cdot 0,60}{\frac{1}{2}\cdot 0,70 + \frac{1}{3}\cdot 0,45 + \frac{1}{6}\cdot 0,60} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6} \doteq 0,1667$$

Pravděpodobnost, že dívka na chodbě je z prvního ročníku, je asi $16,67\%$.

3.33. Skupina ekonomů rozdělila sledované firmy do čtyř skupin. V první kategorii je 70 firem, kterým nehrozí bankrot, čtyři firmy v druhé kategorii mají pětiprocentní riziko bankrotu, ve třetí kategorii je 20 firem s rizikem bankrotu 25% a šest firem ve čtvrté skupině má výši rizika bankrotu rovnu 50%. Jedna ze sledovaných firem zkrachovala, jaká je pravděpodobnost, že patřila k nejrizikovější skupině?

Příklad 3.33

Řešení: Víme, že máme celkem $70 + 4 + 20 + 6 = 100$ firem. Označme
jev B_1 ... firma je v první skupině, $P(B_1) = \frac{70}{100}$,
jev B_2 ... firma je v druhé skupině, $P(B_2) = \frac{4}{100}$,
jev B_3 ... firma je v třetí skupině, $P(B_3) = \frac{20}{100}$,
jev B_4 ... firma je v čtvrté skupině, $P(B_4) = \frac{6}{100}$,
jev A ... firma zkrachuje.
D8le je $P(A|B_1) = 0$, $P(A|B_2) = 0,05$, $P(A|B_3) = 0,25$, $P(A|B_4) = 0,5$. Zajímá nás příslušnost ke čtvrté skupině, kde ekonomové předpokládali největší riziko bankrotu firmy. Dosazením do Bayesova vzorce (3.10) dostáváme následující výpočet

$$P(B_4|A) =$$
$$= \frac{P(B_4) \cdot P(A|B_4)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) + P(B_4) \cdot P(A|B_4)}$$
$$= \frac{0,06 \cdot 0,5}{0,7 \cdot 0 + 0,04 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,25 + 0,06 \cdot 0,5} = \frac{0,03}{0,082} \doteq 0,365\,9.$$

Pravděpodobnost, že zbankrotovaná firma náležela do nejrizikovější skupiny, je asi $36,59\%$.

3.5 Cvičení

3.5.1. V osudí je 5 modrých koulí, 5 červených, 6 bílých a 4 zelené koule. Náhodně vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená koule je

a) modrá, b) červená, c) bílá, d) zelená?

3.5.2. Máme mariášové karty. Náhodně snímáme jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že jsme sejmuli

a) eso,
b) žaludovou kartu,
c) křížového krále,
d) kartu s hodnotou od sedmi do deseti (včetně)?

3.5.3. Eva, Jana, Karel a Pepa hrají s mariášovými kartami. Rozdalo se ze zamíchaného balíčku po čtyřech kartách. Jaká je pravděpodobnost, že

a) Eva má dvě esa?,
b) mají obě dívky dohromady dvě esa,
c) Karel nemá žádnou pikovou kartu,
d) nikdo nemá žádnou pikovou kartu,
e) má Pepa každou kartu jiné barvy,
f) má Pepa všechny karty stejné barvy?

3.5.4. Házíme jedenkrát dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padne

a) na obou kostkách šestka,
b) aspoň na jedné kostce šestka,
c) na první kostce sudé číslo a na druhé číslo 4,
d) na první kostce o dvě více než na kostce druhé,

e) na první kostce dvojnásobek toho, co na druhé kostce,

f) součet hodnot na obou kostkách roven 8?

3.5.5. Házíme jedenkrát pěti mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že padne

a) na všech mincích líc,

b) pouze na jediné minci líc,

c) přesně na dvou mincích líc,

d) alespoň na jedné minci líc,

e) alespoň na dvou mincích líc,

f) na většině mincí líc?

3.5.6. Koupili jsme si dva losy, každý v jiné loterii. V první loterii vyhrává každý desátý los, ve druhé každý pátý. Jaká je pravděpodobnost, že

a) vyhrajeme na oba losy,

b) vyhrajeme na alespoň jeden los,

c) vyhrajeme na právě jeden los,

d) vyhrajeme na první los, ale nikoliv na druhý,

e) vyhrajeme na druhý, ale nikoliv na první,

f) nevyhrajeme na žádný z losů?

3.5.7. Zkoušku skládají tři studenti, a to Pavel, Honza a Standa. Pravděpodobnost, že Pavel složí úspěšně zkoušku je 80%. Honza složí zkoušku s pravděpodobností 60%. Standa zkoušku neudělá s pravděpodobností 5%. Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku

a) úspěšně složí všichni tři studenti,

b) udělají jen Standa s Pavlem,

c) udělá pouze Pavel,

d) udělají přesně dva studenti,

e) úspěšně složí právě jeden student,

f) nesloží žádný student?

3.5.8. Studenti píší test skládající se za dvou částí. Pravděpodobnost, že student správně napíše alespoň jednu z částí, je 80%. Víme, že 30% studentů úspěšně napíše jen první část. Student dobře nenapíše první část s pravděpodobností 60%. Jaká je pravděpodobnost, že náhodný student

a) složí první část testu,

b) správně napíše maximálně jednu část testu,

c) nenapíše ani jednu z částí testu,

d) napíše právě jednu z částí testu,

e) napíše dobře pouze druhou část testu,

f) správně napíše obě části testu?

3.5.9. Máme koupeny akcie dvou firem. Pravděpodobnost, že nám nebudou vyplaceny žádné dividendy, je 35%, že nám budou vyplaceny jen jedny dividendy 65%. Dividendy z první firmy nám budou vyplaceny s pravděpodobností 45%. Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme dividendy

a) z druhé firmy,

b) pouze z první společnosti,

c) z obou firem,

d) z alespoň jedné firmy?

3.5.10. Házíme dvakrát hrací kostkou. Zjistěte, které z následujících dvojic jevů jsou nezávislé a které závislé.

a) jev A: „Padne sudé číslo v prvním hodu“, jev B: „V prvním hodu padne dvojka“

b) jev A: „Padne sudé číslo v prvním hodu“, jev C: „Padne jednička a dvojka“

c) jev A: „Padne sudé číslo v prvním hodu“, jev D: „Padne součet 7“

d) jev E: „V prvním hodu padne 1 a v druhém 4“, jev F: „Součin hodnot obou hodů je roven 4“

3.5.11. Předpokládejte jevy z Příkladu 3.5.10. Vypočítejte následující podmíněné pravděpodobnosti

a) $P(A|B)$,
c) $P(B|A)$,
e) $P(E|B)$,
b) $P(B|C)$,
d) $P(E|F)$,
f) $P(F|E)$.

3.5.12. Na trhu sledujeme prodej dvou výrobků, a to výrobku A a výrobku B. Zajímalo by nás, zda se jedné o tzv. komplementy, substituty, či že není jejich prodej vzájemně ovlivněn, když víme, že

a) pravděpodobnost, že si náhodná osoba koupí oba výrobky, je 35%, že si koupí pouze výrobek B, je 30% a že si koupí aspoň jeden výrobek, je 90%.

b) pravděpodobnost, že si náhodná osoba nekoupí žádný výrobek, je 10%, pravděpodobnost, že si koupí právě jeden výrobek, je 40%, a pravděpodobnost, že si koupí výrobek A, je o 10% vyšší než pravděpodobnost, že si koupí výrobek B.

c) pravděpodobnost, že si náhodná osoba koupí pouze jeden výrobek, je 50%, že si koupí nejvýše jeden výrobek, je 65% a že osob, které si koupily pouze výrobek A, je stejně jako osob, které si koupily oba výrobky.

3.5.13. Na trhu s daným výrobkem se vyskytuje 75% tuzemských firem oproti 25% zahraničních firem. Z tuzemských firem se třetina zúčastnila soutěže kvality, kdežto ze zahraničních firem 60% vstoupilo do této soutěže. Předem nemáme žádné informace o kvalitě výrobků žádné z firem. Jaká je pravděpodobnost, že

a) námi náhodně vybraná firma, která prodává sledovaný výrobek, se zúčastnila soutěže,

b) výhra zůstane v tuzemsku?

3.5.14. Muži tvoří 65% klientů pojišťovny, 45% z těchto mužů má v pojišťovně sjednáno havarijní pojištění. Toto pojištění má však sjednáno pouze 25% klientek, žen.

a) Jaká je pravděpodobnost, že si náhodná osoba sjedná havarijní pojištění?

b) Likvidátor zpracovává plnění havarijního pojištění. Jaká je pravděpodobnost, že bude jednat s klientem, mužem?

3.5.15. Ve firmě je 5% zaměstnanců v pozici manažera, 40% zaměstnanců tvoří techničtí pracovníci, 35% zaměstnanců jsou obchodníci a zbytek tvoří pomocný personál. Víme, že na pozici manažerů je 80% mužů, mezi technickými pracovníky je 75% mužů, kdežto ve zbylých profesích převládají ženy. Mezi obchodníky je 60% žen, mezi pomocným personálem je 85% žen. Jaká je pravděpodobnost, že

a) náhodná osoba z této firmy je muž,

b) žena, kterou potkáme na schodišti je manažerkou firmy?

Výsledky cvičení

3.5.1 a) 25% **b)** 25% **c)** 30% **d)** 20% **3.5.2 a)** $12,5\%$ **b)** 25% **c)** $3,125\%$ **d)** 50% **3.5.3 a)** $6,31\%$ **b)** $21,49\%$ **c)** $56,94\%$ **d)** $0,11\%$ **e)** $11,39\%$ **f)** $0,78\%$ **3.5.4 a)** $2,78\%$ **b)** $30,56\%$ **c)** $8,33\%$ **d)** $11,11\%$ **e)** $8,33\%$ **f)** $13,89\%$ **3.5.5 a)** $3,125\%$ **b)** $15,625\%$ **c)** $31,25\%$ **d)** $96,875\%$ **e)** $81,25\%$ **f)** $81,25\%$ **3.5.6 a)** 2% **b)** 28% **c)** 26% **d)** 8% **e)** 18% **f)** 72% **3.5.7 a)** $45,6\%$ **b)** $30,4\%$ **c)** $1,6\%$ **d)** $44,2\%$ **e)** $9,8\%$ **f)** $0,4\%$ **3.5.8 a)** 40% **b)** 90% **c)** 20% **d)** 70% **e)** 40% **f)** 10% **3.5.9 a)** 20% **b)** 45% **c)** 0% **d)** 65% **3.5.10 a)** závislé **b)** nezávislé **c)** závislé **d)** závislé **3.5.11 a)** $16,67\%$ **b)** 50% **c)** $5,56\%$ **d)** $33,33\%$ **e)** 0% **f)** 100% **3.5.12 a)** $P(A) = 60\%, P(A|B) = 53,85\%$, tedy $P(A) > P(A|B)$ (případně $P(B) = 65\%, P(B|A) = 58,33\%$, tedy $P(B) > P(B|A)$), proto se jedná o substituty (protože fakt, že si osoba koupí jeden z výrobků, sníží pravděpodobnost koupě druhého výrobku), **b)** $P(A) = 75\%$, $P(A|B) = 76,92\%$, tedy $P(A) < P(A|B)$ (případně $P(B) = 65\%, P(B|A) = 66,67\%$, tedy $P(B) < P(B|A)$), proto se jedná o komplementy (protože fakt, že si osoba koupí jeden z výrobků, zvýší pravděpodobnost koupě druhého výrobku), **c)** $P(A) = 70\%, P(A|B) = 70\%$, tedy $P(A) = P(A|B)$ (případně $P(B) = 50\%, P(B|A) = 50\%$, tedy $P(B) = P(B|A)$), proto je prodej obou výrobků nezávislý (protože fakt, že si osoba koupí jeden z výrobků, nezmění pravděpodobnost koupě druhého výrobku), **3.5.13 a)** 40% **b)** $62,5\%$
Nápověda: Otázku bychom mohli položit i jinak … Jaká je pravděpodobnost, že vítězná (tj. náhodná firma, která se zúčastnila soutěže) je tuzemská? **3.5.14 a)** 38% **b)** $76,97\%$
Nápověda: Víme, že daný klient měl sjednáno havarijní pojištění, a zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že to byl muž. **3.5.15 a)** 51% **b)** $2,04\%$

Kapitola 4

Lineární algebra

4.1 Matice

4.1.1 Matice a operace s nimi

Motivační úvaha I.

Představme si následující situaci. Máme tři studenty, A. Nováka, J. Černého a M. Hájka, kteří v průběhu pololetí napsali postupně čtyři testy z matematiky s následujícím bodovým ziskem: student A. Novák získal z prvního testu 48 bodů, z druhého 30, ze třetího 33 a ze čtvrtého 27 bodů. Student J. Černý získal z prvního testu 39 bodů, z druhého 35, ze třetího 41 a ze čtvrtého 37 bodů. Třetí student měl bodové ohodnocení následovné- z prvního testu získal 34 bodů, z druhého 29, ze třetího 38 a ze čtvrtého 40 bodů. Pro větší přehlednost jsme zvyklí uspořádat všechny informace do tabulky.

Testy z matematiky				
Student	**První**	**Druhý**	**Třetí**	**Čtvrtý**
A. Novák	48	30	33	27
J. Černý	39	35	41	37
M. Hájek	34	29	38	40

Vidíme, že každé číslo v tabulce představuje počet získaných bodů určitého člověka z určitého testu. Tedy každá číselná hodnota v tabulce se vztahuje jednak k příslušnému řádku, jednak k příslušnému sloupci. Například hodnota 41 ve druhém řádku a třetím sloupci udává, že student ve druhém řádku, tedy J. Černý, získal ze třetího testu 41 bodů.

Motivační úvaha II.

Podívejme se na podobný problém. Máme soubor patnácti lidí z města A. U těchto lidí se ptáme na dvě vlastnosti, na pohlaví a vzdělání. U vzdělání rozlišujeme čtyři stupně, a to základní (Z), středoškolské bez maturity (Sb), středoškolské s maturitou (Ss) a vysokoškolské (V). U znaku pohlaví označíme M-muži a Ž-ženy. Zjištěné údaje ohledně dotázaných patnácti osob, jak byly postupně zjišťovány, jsou zapsány v následující tabulce.

	Odpovědi dotázaných osob														
vzdělání	Ss	Z	V	V	Sb	Z	Ss	Sb	V	Z	Ss	Z	V	V	Sb
pohlaví	M	M	M	Ž	M	Ž	Ž	Ž	M	Ž	M	M	M	Ž	M

Počty mužů či žen s určitým dosaženým vzděláním můžeme přehledněji zapsat do následující tabulky.

	Vzdělání			
Pohlaví	**Základní**	**Středoškolské bez maturity**	**Středoškolské s maturitou**	**Vysokoškolské**
muži	2	2	2	3
ženy	2	1	1	2

Každé číslo v této tabulce představuje počet dotázaných osob, které jsou určitého pohlaví (řádky) a dosáhly výše vzdělání odpovídající příslušnému sloupci. Tedy každé číslo v tabulce nese informaci o počtu osob s vlastností uvedenou v určitém řádku a zároveň vlastností uvedenou v určitém sloupci.

Stejné dotazníkové šetření jsme navíc mohli provést i ve městě B. Výsledky zapíšeme do stejné tabulky.

	Vzdělání			
Pohlaví	**Základní**	**Středoškolské bez maturity**	**Středoškolské s maturitou**	**Vysokoškolské**
muži	2	1	2	2
ženy	1	2	4	1

Není těžké zjistit, jaký počet z dotázaných žen z měst A i B dohromady měl středoškolské vzdělání bez maturity. Sečteme čísla z obou tabulek, která jsou ve druhém řádku a druhém sloupci $1 + 2 = 3$. A pokud takto sečteme odpovídající si hodnoty v odpovídajícím řádku a sloupci z obou tabulek, dostaneme informace o počtech mužů a žen, které mají určité dosažené vzdělání, za obě skupiny dohromady. Tuto informaci nám uvádí následující tabulka.

	Vzdělání			
Pohlaví	**Základní**	**Středoškolské bez maturity**	**Středoškolské s maturitou**	**Vysokoškolské**
muži	4	3	4	5
ženy	3	3	5	3

V tomto motivačním příkladu vidíme, že čísla, která se vztahují k určitému řádku a sloupci, má smysl sčítat. Samozřejmě ale počet řádků a stejně tak počet sloupců v obou tabulkách, jejichž hodnoty sčítáme, musí být stejný.

Motivační úvaha III.

V poslední motivační úvaze opět vyjdeme z práce s tabulkami. Mějme čtyři kamarády Oldu, Pavla, Jiřího a Martina. Tito kamarádi během svých studií bydlí na stejné koleji a ve stánku u koleje si nakupují ovoce. Nejraději mají jablka, hrušky a švestky. Každý nakoupí v měsíci určitý pevně domluvený počet kilogramů jmenovaných druhů ovoce. Měsíční počty zakoupených kilogramů tří jmenovaných druhů ovoce čtyřmi kamarády jsou zachyceny v následující tabulce.

	ovoce		
osoba	**jablka**	**hrušky**	**švestky**
Olda	3	2	1
Pavel	2	1	2
Jiří	1	2	0
Martin	1	3	1

Ceny jednotlivých druhů ovoce se ale během roku mění. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že ceny jednotlivých druhů ovoce se mohou měnit z měsíce na měsíc, ale v konkrétním měsíci jsou neměnné. Tak například porovnejme jednotlivé ceny zmiňovaných tří druhů ovoce v měsíci lednu a v měsíci září. Pro přehlednost údaje znovu uspořádáme do tabulky.

	ceny v Kč/kg	
ovoce	**leden**	**září**
jablka	30	22
hrušky	50	25
švestky	60	28

Naším úkolem bude nyní zjistit, kolik korun zaplatil za ovoce každý z kamarádů v lednu a kolik v září. Lehce nahlédneme, že Olda v měsíci lednu zaplatil za ovoce $3 \cdot 30 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 60 = 250$ Kč. Stejnou úvahou zjistíme cenu ovoce koupeného Pavlem $2 \cdot 30 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 60 = 230$ Kč, Jiřím $1 \cdot 30 + 2 \cdot 50 + 0 \cdot 60 = 130$ Kč a Martinem $1 \cdot 30 + 3 \cdot 50 + 1 \cdot 60 = 240$ Kč. V září Olda zaplatil $3 \cdot 22 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 28 = 122$ Kč, Pavel $2 \cdot 22 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 28 = 125$ Kč, Jiří $1 \cdot 22 + 2 \cdot 25 + 0 \cdot 28 = 72$ Kč a Martin zaplatil $1 \cdot 22 + 3 \cdot 25 + 1 \cdot 28 = 125$ Kč.

Když si ted' uvědomíme, jak jsme jednotlivé sumy vypočítali, vidíme, že jsme vždy hodnoty v jednotlivých řádcích první tabulky „vynásobili" s hodnotami ve sloupcích druhé tabulky. A příslušný řádek (jeden ze čtyř kamarádů) v první tabulce s příslušným sloupcem (cena za ovoce v určitém měsíci) druhé tabulky jsme „vynásobili" tak, že jsme násobili vždy počet zakoupených kilogramů jablek s cenou jablek, počet zakoupených kilogramů hrušek s cenou hrušek a počet zakoupených kilogramů švestek s cenou švestek a tyto součiny jsme sečetli. Výsledek můžeme zapsat do následující tabulky.

	zaplacené částky v Kč	
osoba	**leden**	**září**
Olda	250	122
Pavel	230	125
Jiří	130	72
Martin	240	125

Rozmyslete si, že není náhoda, že výsledná tabulka má stejný počet řádků jako první tabulka (osoby) v této motivační úvaze a že výsledná tabulka má stejný počet sloupců jako druhá tabulka (měsíce). Abychom danou úlohu vůbec mohli vyřešit, musela první tabulka mít stejný počet sloupců, jako měla druhá tabulka řádků (druhy ovoce).

V této úvaze vidíme, že bude mít smysl určitý způsob násobení řádků a sloupců, ale jen za jistých podmínek. Počet údajů v řádku musí být stejný jako počet hodnot ve sloupci druhé tabulky.

V našich třech motivačních příkladech jsme postupně viděli, že můžeme pracovat se souborem hodnot, které jsou uloženy do řádků a sloupců. Každá hodnota v tomto souboru se tedy vztahuje k určitému řádku a sloupci. Navíc za jistých podmínek má smysl hodnoty dvou takových souborů sčítat, či můžeme za jistých podmínek násobit řádky a sloupce dvou jistých takových souborů hodnot.

Matematika má velký dar abstrakce. Dokáže zachytit a zapsat, co je v jednotlivých konkrétních případech stejné. Umí abstrahovat od jednotlivosti k obecnému. V první třídě ve škole se nejprve učíme sčítat konkrétní předměty. Pak se naučíme, že je jedno, jestli jsme sčítali například talířky nebo balónky. Podstatná je celková hodnota. A stejné to bude i s našimi motivačními úvahami. Uvědomme si, že nemusíme pracovat jen s tabulkami, ale obecně se soubory nějakých dat uložených do řádků a sloupců. A tato data ani nemusí být číselná.

Nyní jsme již učinili první kroky k pojmu matice, který si v následující kapitole zavedeme korektně a naučíme se s maticemi pracovat. Později uvidíme, že používání matic nám práci často zpřehlední a zjednoduší.

Definice 4.1.1. Schema m řádků a n sloupců matematických objektů označených a_{ij} nazveme *maticí* A typu $m \times n$.

Píšeme $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

První číslo v typu matice m udává počet řádků a druhé číslo n značí počet sloupců v matici. Zmíněné matematické objekty a_{ij} nazýváme *prvky matice*. Nejčastěji to jsou reálná nebo komplexní čísla, ale mohou to být i například reálné funkce reálné proměnné. Prvek a_{ij} se nachází v $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci matice A. Prvky matice budou mít tedy dvojí index. První index u prvku a_{ij} nás informuje o tom, ve kterém řádku v matici se prvek nachází, a říkáme mu řádkový index. Druhý index u prvku a_{ij} nás informuje, ve kterém sloupci v matici se prvek nachází, a říkáme mu sloupcový index. Prvky, které mají stejný první (řádkový) index, například i, jsou prvky, které v matici leží ve stejném, konkrétně $i-$tém, řádku. Prvky, které mají stejný druhý (sloupcový) index, například j, leží v $j-$tém sloupci matice A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \mathbf{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \mathbf{a_{mj}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jednotlivým řádkům matice budeme říkat *řádkové vektory* a budeme je označovat $a_1, a_2, \dots, a_m$. Každý takový řádek je vlastně matice typu $1 \times n$.

Příklad 4.1

4.1. Jakého typu je matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$ a jakou hodnotu mají prvky a_{32} a a_{13}?

Řešení: Matice A má tři řádky a dva sloupce, je tedy typu 3×2. Prvek a_{32} je prvek matice A ležící ve třetím řádku a druhém sloupci. Tento prvek má hodnotu 2. Prvek a_{13} se nachází v prvním řádku a třetím sloupci. Matice A má ovšem jen dva sloupce. Takový prvek v naší matici neexistuje.

Některé matice budou mít určitý vztah mezi počtem řádků a sloupců, u některých matic mohou mít jednotlivé prvky pevně dané hodnoty, nebo v matici může existovat pevně daný vztah mezi jednotlivými prvky. Tyto matice pak ponesou speciální názvy.

Matice, ve které se počet řádků a sloupců liší, $m \neq n$, se nazývá matice *obdélníková*. Na následujících příkladech vidíme, že prvky v matici jsou skutečně uspořádány do obdélníku.

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 0 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

První z uvedených matic je typu 2×4, druhá je typu 4×2 a poslední je typu 3×4. Matici typu $1 \times n$ budeme také nazývat *(řádkový) vektor*. Obdélníkovou matici, která má jen jeden sloupec, je typu $m \times 1$, budeme nazývat také *(sloupcový) vektor*.

Matice, která má stejný počet řádku jako sloupců, tedy $m = n$, se nazývá *čtvercová* matice. U takové matice pak nemluvíme o typu (například $m \times m$), ale o řádu matice. Tak například následující matice jsou postupně řádu 4 (matice má čtyři řádky a čtyři sloupce), 2 a 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & -7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,1 & 3,2 & 6,8 \\ 7,2 & 5,6 & 7,9 \\ 0,3 & 5,1 & 8,5 \end{pmatrix}$$

Prvky v matici typu $m \times n$, které mají stejný index řádku a sloupce, tedy $a_{11}, a_{22}, ...a_{ii}$, kde $i = 1, ..., \min(m, n)$, se nazývají *diagonální prvky*. V následujících maticích jsou tyto prvky zvýrazněny.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -\mathbf{3} & 3 & 7 \\ 8 & 11 & -\mathbf{4} & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\mathbf{a} & b \\ 3a & \mathbf{4a} \\ -b & 2a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\mathbf{3} & -3 & -6 \\ -7 & -\mathbf{6} & -9 \\ 0 & -1 & -\mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Tyto prvky v matici tvoří *hlavní diagonálu matice*.

Následující matice jsou čtvercová matice řádu 4 a obdélníková matice typu 4×3.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 0 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Všechny jejich prvky na hlavní diagonále jsou nenulové, všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové a nad hlavní diagonálou jsou jak nenulové, tak i nulové prvky. Tedy v dolním trojúhelníku jsou samé nuly, ale v horním trojúhelníku jsou jak nulové, tak i nenulové prvky, přičemž na „přeponě" tohoto pomyslného trojúhelníku jsou prvky nenulové. Asi nás nepřekvapí, že takovouto matici nazýváme *horní trojúhelníková* matice. Naproti tomu matice

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 14 & 22 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme *dolní trojúhelníková* matice.

Pokud bude matice obdélníková, například typu 3×4 resp. 4×3, bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

budeme ji nazývat *horní*, resp. *dolní lichoběžníková matice*. Prvky pod, resp. nad diagonálou, jsou nulové a nenulové prvky jsou v maticích uloženy do tvaru lichoběžníku.

Definice 4.1.2. Nechť matice A je čtvercová řádu n. Pokud $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, kde $i, j = 1, \ldots, n$ a prvky $a_{ii} \neq 0$, pak se taková matice nazývá *horní trojúhelníková matice*. Pokud $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, kde $i = 1, \ldots, n$ a prvky $a_{ii} \neq 0$, pak se taková matice nazývá *dolní trojúhelníková matice*.
Nechť matice A je typu $m \times n$, kde $n > m$. Pokud $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, kde $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$ a prvky $a_{ii} \neq 0$, pak se taková matice nazývá *horní lichoběžníková matice*. Nechť matice A je typu $m \times n$, kde $n < m$. Pokud $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, kde $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$ a prvky $a_{ii} \neq 0$, pak se taková matice nazývá *dolní lichoběžníková matice*.

Matice, jejíž jediné nenulové prvky leží na hlavní diagonále, se bude nazývat *diagonální matice*.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definice 4.1.3. Čtvercová matice, pro kterou platí $a_{ii} \neq 0$, kde $i = 1, \ldots, n$ a $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, \ldots, n$, se nazývá *diagonální matice*.

Mezi všemi diagonálními maticemi je jedna, která nese speciální název. Její jméno je *jednotková matice*.

Definice 4.1.4. Čtvercová matice řádu n, pro kterou platí $a_{ii} = 1$, kde $i = 1, \ldots, n$ a $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, \ldots, n$, se nazývá *jednotková matice*.

Následující matice jsou jednotkové matice řádu postupně $1, 2, 3$ a 4.

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotkovou matici budeme značit symbolem I.

Matice typu $m \times n$, která má všechny prvky nulové, se nazývá *nulová matice* a značíme ji O. Příkladem nulové matice typu 2×3 je matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ještě si zavedeme pojem rovnosti dvou matic. Všimněte si, že rovnost nastává nejen tehdy, když jsou obě matice stejného typu, ale i tehdy, když se rovnají prvky matic na stejných místech v maticích.

Definice 4.1.5. Mějme matici A typu $m \times n$ a matice $B = (b_{ij})$ nechť je stejného typu $m \times n$. Platí $A = B$, jestliže $a_{ij} = b_{ij}$, pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$ a také $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Z definice plyne, že

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Toto jsou matice stejného typu; obsahují stejná čísla, ale stejná čísla, konkrétně čísla -3 a -2, nejsou v maticích umístěna do stejných řádků a sloupců. Například číslo -3 se v první matici nachází ve třetím řádku a druhém sloupci, kdežto ve druhé matici se číslo -3 nachází ve druhém řádku a prvním sloupci. Proto se nejedná o matice, které jsou si rovny.

Příklad 4.2

4.2. Nalezněte w, x, y, z takové, aby platilo $A = B$, kde $A = \begin{pmatrix} 4-x & z-3 \\ 2y & w+5 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Řešení: Víme, že rovnost matic znamená rovnost odpovídajících si prvků. Porovnáním jednotlivých prvků v obou maticích dostáváme postupně tyto rovnice

$$\begin{aligned} 4 - x &= 3 \\ z - 3 &= -2 \\ 2y &= 6 \\ w + 5 &= -5. \end{aligned}$$

Vyřešením těchto jednoduchých rovnic dostaneme $x = 1$, $z = 1$, $y = 3$ a $w = -10$.

Ve druhé motivační úvaze vidíme, že má smysl čísla uložená do tabulek sčítat. Mohli jsme ale sčítat jen hodnoty v takových tabulkách, které mají stejný počet řádků a sloupců. Sčítali jsme tak, že jsme sečetli hodnoty, které se nacházely ve stejném řádku a sloupci. Tak to bude i s maticemi. Matice můžeme sčítat, ale jen matice stejných typů. Sčítat budeme tak, že sečteme jednotlivé prvky matic v odpovídajících si řádcích a sloupcích. Uvidíme, že výsledkem je zase matice stejného typu.

Definice 4.1.6. Matice $A = (a_{ij})$ je typu $m \times n$ a matice $B = (b_{ij})$ je stejného typu $m \times n$. Pak $A + B = C$, kde $C = (c_{ij})$ je typu $m \times n$ a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, kde $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Uveď me názorný příklad.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Umíme tedy již dvě matice sčítat. Představme si situaci, že budeme sčítat dvě stejné matice. Pak jistě platí $A + A = 2A$. Jaké budou prvky výsledné matice? Ano, výsledná matice bude mít každý prvek dvojnásobný oproti prvkům matice A.

Nebo si představme jinou situaci. Mějme matici A typu 3×2. Řádky matice představují tři města J, K, L a sloupce představují města M, N. Hodnoty v matici A představují vzdálenosti v kilometrech mezi jednotlivými městy v řádcích a městy ve sloupcích.

$$\begin{array}{c} \\ J \\ K \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 43 \\ 21,5 & 62,3 \\ 41,2 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Z této matice například vidíme, že město K je od města N vzdáleno $62,3$ km. Pokud bychom potřebovali jednotlivé vzdálenosti v matici A převést na metry, znamenalo by to každou hodnotu v matici vynásobit číslem $1\,000$.

Obě úvahy nás dovedly k situaci, kde jsme každý prvek matice násobili stejným číslem. Takovou operaci s maticemi budeme nazývat násobení matice skalárem.

Definice 4.1.7. Jestliže $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a α je reálné číslo (skalár), pak matice $\alpha \cdot A$ je matice typu $m \times n$ a platí $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$.

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozdílem matic $A - B$ budeme rozumět součet $A + (-1) \cdot B$. Nyní již umíme matice sčítat, násobit číslem i odečítat. Uvedeme ještě vlastnosti těchto operací s maticemi.

Věta 4.1.8 (Vlastnosti sčítání matic a násobení matic skalárem). *Jestliže matice A, B a C jsou matice typu $m \times n$, O je nulová matice typu $m \times n$ a c, d jsou reálná čísla, pak platí*

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + B = B + A$
3. $c(A + B) = cA + cB$
4. $(c + d)A = cA + dA$
5. $0 \cdot A = O$
6. $1 \cdot A = A$

První vlastnost se nazývá *asociativnost*. Ta říká, že nezáleží na uzávorkování. Neboli je jedno, jestli nejprve sečteme matice B a C a výslednou matici sečteme s maticí A, nebo jestli nejprve sečteme matici A a B a výsledek přičteme k matici C. Druhá vlastnost se nazývá *komutativnost*, tedy pořadí sčítanců můžeme prohodit. První dvě vlastnosti se týkají sčítání matic. Další čtyři vlastnosti se týkají násobení matice skalárem. Třetí a čtvrtá vlastnost se nazývá *distributivní zákon*, neboli zákon o roznásobování závorek. Pátá a šestá vlastnost upozorňují na násobení konkrétními čísly 0 a 1.

V následujícím řešeném příkladě si procvičíme sčítání matic a násobení skalárem.

Příklad 4.3

4.3. Vypočtěte $2A + \frac{1}{2}B$, kde $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} 2A + \frac{1}{2}B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 10 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1,5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 11 & 3 \\ -2 & 7,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zavedeme ještě jednu operaci s maticí. Tato operace se bude nazývat transponování matice.

Definice 4.1.9. Nechť matice $A = (a_{i,j})$ je typu $m \times n$. Matice $A^T = (a^T_{i,j})$ typu $n \times m$ se nazývá *transponovaná matice k matici A*, jestliže platí pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ a pro všechna $j = 1, 2, \ldots, m$, $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Matice A a matice A^T si tedy navzájem vymění řádky a sloupce.

Příklad 4.4

4.4. K matici $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nalezněte matici transponovanou.

Řešení: Jelikož matice A je matice typu 4×3, pak k ní transponovaná matice A^T je typu 3×4. Víme, že transponovaná matice k matici A vznikne z matice A záměnou jejích řádků za sloupce. První řádek matice A se stane prvním sloupcem matice A^T, druhý řádek matice A se stane druhým sloupcem matice A^T atd. Tedy

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že při transponování některé prvky zůstanou na svém místě. Jsou to prvky hlavní diagonály, které nezmění svou polohu.

Definice 4.1.10. Čtvercová matice $A = (a_{i,j})$ řádu n se nazývá *symetrická matice*, jestliže platí $A^T = A$.
Čtvercová matice $A = (a_{i,j})$ řádu n se nazývá *antisymetrická matice*, jestliže platí $A^T = -A$.

Symetrická matice musí být matice čtvercová. Na hlavní diagonále mohou být jakékoli prvky. Ale prvek v $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci musí mít stejnou hodnotu jako prvek v $i-$tém sloupci a $j-$tém řádku. Takže kdybychom si představili, že máme symetrickou matici napsanou na čtvercovém papíru a tento papír přeložíme v úhlopříčce (podél hlavní diagonály), musí nám stejné hodnoty v matici padnout na sebe. Příkladem takové symetrické matice může být matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Z definice plyne, že antisymetrická matice musí také být matice čtvercová. Protože při transponování prvky na hlavní diagonále zůstávají na místě, tyto prvky se musejí rovnat prvkům s opačnou hodnotou, a to platí jedině pro prvky nulové. Prvek v $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci musí mít opačnou hodnotu než prvek v $i-$tém sloupci a $j-$tém řádku. Příkladem takové antisymetrické matice může být matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -7 & 2 \\ -5 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Motivační úvaha III. nám ukázala, že někdy má smysl „násobit“ řádky jedné matice se sloupci druhé matice. Tento příklad nás vede k zavedení maticového násobení.

Definice 4.1.11. Nechť matice A je matice typu $m \times n$ a matice B je matice typu $n \times p$. Potom matice $C = A \cdot B$ je matice typu $m \times p$ a platí $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Názorně máme vše zachyceno na následujícím obrázku.

$$A_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}} \cdot B_{\mathbf{n}\times\mathbf{p}} = C_{\mathbf{m}\times\mathbf{p}}$$

Násobení matic je tedy definováno, jestliže počet sloupců první matice v součinu je roven počtu řádků druhé matice v součinu. Typ výsledné matice je pak „počet řádků první matice $\times$ počet sloupců druhé matice“. Všimněte si, že záleží na pořadí, v jakém matice násobíme. Obecně tedy násobení matic není komutativní. Budeme rozlišovat násobení zprava a násobení zleva.

V součinu AB je matice A násobena maticí B *zprava*.

V součinu AB je matice B násobena maticí A *zleva*.

Příklad 4.5

4.5. Vypočtěte součin matic AB, kde $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Matice A je typu 4×3 a matice B je typu 2×2. Počet sloupců matice A (tři) není roven počtu řádků matice B (dva) a součin AB neexistuje.

Příklad 4.6

4.6. Rozhodněte, jakého typu má být matice B a C, aby platil vztah $AC + B^T = D$, kde matice A je typu 3×5 a matice D má sedm sloupců.

Řešení: Na levé straně rovnosti $AC + B^T = D$ sčítáme matice, a to lze jen tehdy, když se jedná o matice stejného typu. Ze zadání vidíme, že součin AC je matice, která musí mít tři řádky. Připomeňme, že součin matic je matice, která má stejný počet řádků jako první matice a stejný počet sloupců jako druhá matice. Součin AC má tři řádky, proto musí mít tři řádky i matice B^T. Dále rovnat se mohou jen matice stejného typu. Z toho plyne, že matice D musí mít tři řádky a matice B^T musí mít sedm sloupců. Dostali jsme, že matice B^T je typu 3×7, a tudíž matice B je typu 7×3. Protože součin AC je matice, která se sčítá s maticí B^T typu 3×7, i součin AC je matice typu 3×7. Odtud plyne, že matice C musí mít sedm sloupců. Matice A je typu 3×5, a aby součin existoval, matice C musí mít pět řádků. Zjistili jsme, že matice C je typu 5×7.

Příklad 4.7

4.7. Nechť $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Vypočtěte součin matic AB a BA.

Řešení: Matice A je typu 2×3 a matice B je typu 2×2. Počet sloupců matice A je různý od počtu řádků matice B, součin AB tedy neexistuje. Součin BA existuje, protože matice B má dva sloupce a matice A má dva řádky. Výsledkem součinu BA bude matice typu 2×3.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ 3\cdot 4 + 5\cdot 3 & 3\cdot 0 + 5\cdot 1 & 3\cdot 1 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 10 & 2 & 11 \\ 27 & 5 & 28 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Příklad 4.8

4.8. Nechť $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočtěte součin matic AB a BA.

Řešení: Matice A je typu 4×2 a matice B je typu 2×4. Součin AB existuje protože první matice má dva sloupce a druhá dva řádky. Výsledná matice je typu 4×4.

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 1\cdot 1 & 5\cdot(-2) + 1\cdot(-3) & 5\cdot 0 + 1\cdot 2 & 5\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 0\cdot(-3) & 2\cdot 0 + 0\cdot 2 & 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) + 3\cdot(-3) & 3\cdot 0 + 3\cdot 2 & 3\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 2\cdot(-3) & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & -13 & 2 & 7 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 6 & -15 & 6 & 9 \\ 3 & -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Také součin BA existuje, protože matice B má čtyři sloupce a matice A má čtyři řádky. Výsledná matice součinu BA bude typu 2×2.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 5 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V Příkladech 4.7 a 4.8 jsme viděli, že součin matic není obecně komutativní, neboli pokud existuje součin AB, součin BA nemusí vůbec existovat, nebo $AB \neq BA$.

Příklad 4.9

4.9. Nechť $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vypočtěte součin matic AB.

Řešení: Součin AB existuje, protože matice A má čtyři sloupce a matice B má čtyři řádky. Výsledná matice je typu 3×1.

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.10

4.10. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Vypočtěte součin matic BA.

Řešení: Součin bude existovat, protože matice B má tři sloupce a matice A má tři řádky. Výsledná matice je typu 1×4.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

V Příkladu 4.9 si můžeme všimnout, že matice B má jeden sloupec. Výsledek součinu matice a sloupce je sloupec. Samozřejmě, pokud je součin definován. V Příkladu 4.10 vidíme, že matice B má tvar jednoho řádku. Tedy řádek krát matice je řádek. Samozřejmě, pokud součiny existují.

Příklad 4.11

4.11. Nechť $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Vypočtěte součin matic AA^T a A^TA.

Řešení: Jestliže matice A je matice typu 3×2, pak matice A^T je typu 2×3. Oba součiny tedy budou existovat. Součin AA^T bude matice typu 3×3.

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)\cdot(-3) + 1\cdot 1 & (-3)\cdot 1 + 1\cdot 0 & (-3)\cdot(-2) + 1\cdot 2 \\ 1\cdot(-3) + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot(-2) + 0\cdot 2 \\ (-2)\cdot(-3) + 2\cdot 1 & (-2)\cdot 1 + 2\cdot 0 & (-2)\cdot(-2) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -3 & 8 \\ -3 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Součin $A^T A$ bude matice typu 2×2.

$$
\begin{aligned}
A^T A &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)\cdot(-3) + 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) & (-3)\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot 2 \\ 1\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Uvědomte si, že součiny AA^T a $A^T A$ budou existovat vždy, ať je matice A jakéhokoli typu. Výsledkem každého takového součinu bude čtvercová matice. A navíc tato čtvercová matice bude vždy symetrická.

Příklad 4.12

4.12. Nechť A je matice typu 4×3 a I je jednotková matice řádu 3. Ověřte, že platí $AI = A$.

Řešení:

$$
A \cdot I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 + a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 1 \\
a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 + a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 1 \\
a_{31}\cdot 1 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 1 + a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 1 \\
a_{41}\cdot 1 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot 0 & a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot 1 + a_{43}\cdot 0 & a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = A
$$

Uvědomte si, že v tomto příkladu nebylo rozhodující, jakého typu je matice A a jakého řádu je jednotková matice. Rozhodující bylo, aby součin existoval. Výsledkem takového součinu matice a matice jednotkové je *vždy* původní matice. Tedy $A \cdot I = A$. Stejně platí $I \cdot A = A$ (pokud součin existuje).

Naučili jsme se sčítat, transponovat i násobit matice. Vlastnosti těchto operací s maticemi si uvedeme v následující větě.

Věta 4.1.12 (Vlastnosti násobení matic). *Nechť matice A je matice typu $m\times n$, matice B a C jsou typu $n \times p$, matice D je typu $p \times q$ a r, s jsou reálná čísla. Pak platí*

1. $(AB)D = A(BD)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)D = BD + CD$
4. $(rA)B = A(rB) = r(AB)$
5. $r(sA) = (rs)A$.

První vlastnost v této větě nazýváme asociativnost. Nezáleží na tom, jestli nejprve vynásobíme matice A a B a pak tento součin (novou matici) vynásobíme (zprava) maticí D, nebo nejprve spočteme součin BD a pak matici A tímto součinem (novou maticí) vynásobíme (zprava). Druhá vlastnost v této větě je známa jako distributivnost. Neboli nezáleží, jestli nejprve provedeme součet (sečteme matice B, C) a pak tento součet vynásobíme zleva maticí A, nebo jestli nejprve maticí A vynásobíme zleva matici B a matici C teprve pak oba výsledky součinů sečteme. Třetí vlastnost z této věty je distributivnost při násobení zprava. Čtvrtá a pátá vlastnost ve větě hovoří o násobení skalárem (reálným číslem).

Všimněte si, že v žádné vlastnosti uvedené v této větě o součinu matic neměníme pořadí matic v součinu. Tedy *komutativita operace násobení matic není splněna*.

Můžeme matice mocnit? Když si uvědomíme, že například třetí mocnina reálného čísla a je definována rovností $a^3 = a \cdot a \cdot a$, pak mocninu matice můžeme také definovat pomocí násobení. Tedy $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$ a obecně

$$A^n = A^{n-1} \cdot A.$$

Samozřejmě součiny matic musí existovat. Snadno ověříme, že tyto součiny budou existovat pouze v případě, že matice A je čtvercová. Mocniny matic jsou definovány pouze pro čtvercové matice.

Pozor! Například druhá mocnina čtvercové matice nikdy nebude znamenat, že každý prvek původní matice umocníme na druhou.

4.13. Ověřte, že platí rovnost $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. **Příklad 4.13**

Řešení: Spočtěme nejprve $A^2 = A \cdot A$.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyní spočteme levou stranu zadané rovnosti $A \cdot A^2$.

$$\begin{aligned} A \cdot A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pro pravou stranu zadané rovnosti $A^2 \cdot A$ dostaneme

$$\begin{aligned} A^2 \cdot A &= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ověřili jsme, že rovnost je splněna. Z definice mocnin čtvercové matice plyne, že

$$A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3.$$

Následující vlastnost se týká transponování.

Věta 4.1.13 (Vlastnosti transpozice matic). *Nechť matice A je matice typu $m \times n$, matice B typu $m \times n$ a C je typu $n \times p$, r je reálné číslo. Pak platí*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(rA)^T = rA^T$
4. $(AC)^T = C^T A^T$

Ověřme v následujícím příkladě čtvrtou vlastnost v této větě.

4.14. Ověřte, že platí $(AC)^T = C^T A^T$, kde matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **Příklad 4.14**

Řešení: Vypočtěme nejprve levou stranu dané rovnosti.

$$
\begin{aligned}
(AC)^T &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]^T \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 8 & -8 & -8 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 5 & -8 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nyní vypočteme pravou stranu dané rovnosti. Nejprve každou z matic A a C transponujeme.

$$
A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
C^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Nyní již vypočteme součin $C^T A^T$. Uvědomte si, že součin bude existovat. Matice A je typu 2×4 a matice C je typu 4×3. Při transponování dojde k záměně řádků za sloupce. Pak součin $C^T_{3\times 4} A^T_{4\times 2}$ bude typu 3×2.

$$
\begin{aligned}
C^T A^T &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 5 & -8 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Levá strana rovnosti se rovná pravé straně. Ověřili jsme, že rovnost platí.

4.1.2 Hodnost matice

V této části kapitoly o maticích se dozvíme, že každá matice má v sobě ukryté číslo, které nazýváme *hodnost matice*.

Motivační úvaha I.

Představme si následující situaci. Máme tři země: Německo, Rakousko a Českou republiku. Budeme sledovat počty turistů přijíždějících z uvedených zemí v prázdninových měsících do Chorvatska, Řecka a Bulharska. Tyto údaje jsou uspořádány do tabulky. Počty turistů jsou uvedeny v tisících.

Počty turistů			
odkud/kam	**Chorvatsko**	**Řecko**	**Bulharska**
Německo	48	38	8
Rakousko	25	26	3
Česká republika	24	19	4

Víme již, že si data můžeme také zapsat do následující matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 48 & 38 & 8 \\ 25 & 26 & 3 \\ 24 & 19 & 4 \end{pmatrix} .$$

V této matici značí hodnoty v prvním řádku počty německých turistů (v tisících) cestujících postupně do Chorvatska, Řecka a Bulharska. Ve druhém řádku jsou počty turistů z Rakouska a ve třetím z České republiky.

Zamyslíme nad tím, zda jsou v této matici všechny údaje uložené v řádku „podstatné“ (nedají se odvodit z ostatních řádků) a musíme si je všechny pamatovat. Při bližším pohledu na řádky matice zjistíme, že v prvním řádku jsou hodnoty dvakrát větší než ve třetím řádku. Informace ve formě čísel v jednom z těchto dvou řádků tedy není podstatná. Stačí si pamatovat pouze například první řádek a pak to, že ve třetím řádku jsou hodnoty dvakrát menší než v prvním řádku. Tedy že z České republiky vyjíždí na dovolenou do sledovaných zemí jen polovina turistů oproti počtu německých turistů. I druhý řádek, tedy počty rakouských turistů, si zapamatovat musíme, nelze je z jiných řádků odvodit. Druhý řádek je pro nás podstatný.

Stejnou situaci (tedy počty turistů), ale s trochu jinými daty, máme uvedenou v následující tabulce.

Počty turistů			
odkud/kam	**Chorvatsko**	**Řecko**	**Bulharska**
Německo	49	45	7
Rakousko	25	26	3
Česká republika	24	19	4

Data z tabulky si opět můžeme zapsat do matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 49 & 45 & 7 \\ 25 & 26 & 3 \\ 24 & 19 & 4 \end{pmatrix} .$$

Znovu se budeme ptát: Jsou všechny informace uložené v řádcích této matice podstatné v tom smyslu, že si je z jiných řádků nemůžeme odvodit? Při pohledu na naši matici lehce zjistíme, že první řádek je součtem druhého a třetího řádku. Tedy jinými slovy: turistů z Německa do každé ze tří sledovaných zemí - Chorvatska, Řecka a Bulharska je stejně jako z Rakouska a České republiky dohromady. V tomto případě první řádek v této matici nepřináší nové informace. Můžeme ho „nakombinovat“ z jiných řádků (v tomto případě druhého a třetího řádku). První řádek v této matici tedy není podstatný. Pokud nás zajímá v matici počet řádků nesoucích podstatnou informaci, můžeme takovýto řádek vyškrtnout. Nic podobného nemůžeme ale říci pro zbývající dva řádky. Každý z nich nese informaci, která je podstatná, kterou si nemůžeme ze zbývajících řádků odvodit.

Situace může být samozřejmě ještě daleko složitější, pokud se týká vztahu „kombinování“ řádků. Nějaký řádek může být součtem násobků více jiných řádků. Například v matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

je třetí řádek součtem pětinásobku prvního a mínus trojnásobku druhého řádku. Toto „nakombinování“ řádků ale na první pohled (jak to bylo v předchozích motivačních úvahách) v matici odhalit nemusíme.

Z uvedených příkladů vidíme, že v každé matici se mohou vyskytovat řádky, které se dají „nakombinovat“ z jiných řádků, a pak řádky, které nesou informaci, která je podstatná a z jiných řádků ji neodvodíme. A právě počet těchto podstatných řádků budeme nazývat hodností matice. Samozřejmě tento pojem musíme zavést korektně.

Ještě si položme jednu otázku. Je na některé matici při pouhém pohledu vidět počet podstatných řádků?

Podívejme se například na matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je horní trojúhelníková. Můžete si vyzkoušet, že v takovéto matici žádný z řádků nemůžeme vytvořit jako součet nějakých násobků zbylých dvou řádků. Například první řádek nikdy nevznikne jako součet určitých násobků zbylých dvou řádků. Totiž jeho první číslo (tři) prvního řádku nemohu dostat jako součet nějakých násobků prvního čísla (nuly) v druhém řádku a prvního čísla (nuly) v třetím řádku. Tedy první řádek nemohu „nakombinovat“ ze druhého a třetího řádku. Podobnou úvahou bychom zjistili i u ostatních řádků. Vidíme tedy, že například v horní trojúhelníkové matici je počet podstatných řádků stejný, jako je řád této matice.

Takže odpověď' na položenou otázku je ano. U některých matic můžeme počet řádků, které nesou podstatnou informaci, vidět hned.

Nyní je již čas, abychom se pustili do korektního zavedení pojmů užívaných v naší motivační úvaze jako „ kombinování řádků“ a „podstatné řádky“ v matici.

Definice 4.1.14. Řekneme, že matice A je v *Gaussově tvaru*, jestliže žádný řádek matice A se neskládá ze samých nul a první nenulové číslo každého řádku je zároveň poslední nenulové číslo příslušného sloupce.

Uveď'me si příklady takových matic.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 13 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Například v první uvedené matici vidíme, že v prvním řádku této matice je první nenulové číslo 2 a pod tímto číslem v prvním sloupci jsou již samé nuly. Ve druhém řádku je první nenulové číslo 3 ve třetím sloupci. Pod tímto číslem ve třetím sloupci je již jen jedna nula. Poslední řádek kontrolovat nemusíme, pod ním se již nic nenachází. Druhá zde uvedená matice je horní trojúhelníková matice (v tomto případě řádu 4). I třetí matice splňuje, že první nenulový prvek v řádku je posledním nenulovým prvkem v příslušném sloupci. Můžeme tedy říci, že každá z uvedených matic je v Gaussově tvaru.

Uveď'me ještě pro lepší pochopení příklady matic, které *nejsou* v Gaussově tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & -7 \\ 8 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 37 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 64 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

V první uvedené matici první nenulový prvek ve druhém řádku je číslo 22. Tento prvek je ve čtvrtém sloupci a není poslední nenulové číslo v tomto sloupci. Pod číslem 22 leží ve čtvrtém sloupci ještě nenulové číslo 11. Ve druhé matici první nenulové číslo v prvním řádku je číslo 7, ale není to poslední nenulové číslo prvního sloupce. Pod číslem 7 v prvním sloupci leží ještě nenulové číslo 8. Ve třetí zde uvedené matici ve druhém řádku je první nenulové číslo -5, ale to není poslední nenulové číslo ve druhém sloupci. Pod ním leží ještě číslo 64.

Definice 4.1.15. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_m$ řádky matice A typu $m \times p$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ reálná čísla. *Lineární kombinací řádků* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ matice A nazveme řádkový vektor u, který vznikne vynásobením řádků $a_1, a_2, \ldots, a_k$ reálnými čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ a následným součtem těchto násobků. Tedy $u = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_k \cdot a_k$

Definice 4.1.16. Označme $a_1, a_2, \ldots, a_m$ řádky matice A typu $m \times p$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ reálná čísla. Pokud lineární kombinace řádků $a_1, a_2, \ldots, a_k$ matice A je rovna nulovému řádkovému vektoru u, tedy $u = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_k \cdot a_k$ pouze tehdy, jestliže $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, pak tyto řádky nazveme *lineárně nezávislé*. Pokud rovnost platí i pro nějaké $\alpha_i \neq 0$, pak řádky nazýváme lineárně závislé.

Definice 4.1.17. Mějme matici A typu $m \times n$. *Hodností* $h(A)$ matice A budeme rozumět počet lineárně nezávislých řádků matice A.

Další vlastnost nás informuje, že matice v Gaussově tvaru má lineárně nezávislé řádky.

Věta 4.1.18 (Hodnost matice v Gaussově tvaru). *Mějme matici A typu $m \times n$ v Gaussově tvaru. Hodnost $h(A)$ matice A je počet řádků matice .*

Nyní již umíme v matici, která je v Gaussově tvaru, zjistit číslo (hodnost matice), které nás informuje o tom, kolik „podstatných“ řádků (nesoucích informace neodvoditelné z jiných řádků) se v matici nachází. U takovéto matice prostě jen zjistíme počet řádků. Ale jak zjistit hodnost matice u matic, které nejsou v Gaussově tvaru? U těchto matic je to trochu složitější, ale jak uvidíme, není to neřešitelný problém. Další informace, která nám pomůže rozřešit náš problém, je informace o vlastnostech hodnosti matice. Tyto vlastnosti zformulujeme do následujícího odstavce.

Věta 4.1.19 (Vlastnosti hodnosti matice). *Hodnost matice A se nezmění, jestliže v matici A provedeme následující operace:*

1. *vynásobíme nějaký řádek (sloupec) nenulovým číslem,*
2. *přičteme-li b-násobek nějakého řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), je-li $b \neq 0$,*
3. *zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců),*
4. *vynecháme-li řádek (sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (sloupců),*
5. *vynecháme-li nulový řádek (sloupec), pokud to není jediný řádek (sloupec) matice.*

Výše uvedené operace nám poskytují návod k výpočtu hodnosti matice, která není v Gaussově tvaru. Jejich užitím převedeme matici do Gaussova tvaru a odtud již snadno zjistíme hodnost matice.

Příklad 4.15

4.15. Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zadaná matice není v Gaussově tvaru. Operacemi neměnícími hodnost matice budeme postupně upravovat zadanou matici na matici v Gaussově tvaru, jejíž hodnost lehce zjistíme sečtením jejích řádků. Postupně budeme „vytvářet“ nuly ve sloupcích pod diagonálou. Abychom dodržovali jistý řád, nuly pod diagonálou budeme vytvářet pomocí operací s tolikátým řádkem, v kolikátém sloupci budujeme nuly. Tedy pokud vytváříme nuly v prvním sloupci pod diagonálou, děláme úpravy vůči prvnímu řádku. Pokud nulujeme prvky ve druhém sloupci pod diagonálou, děláme úpravy na druhý řádek atd. Úpravy s řádky matice budeme vždy naznačovat za maticí. Vidíme, že pro získání nul v prvním sloupci pod diagonálou stačí místo druhého řádku psát součet mínus dvojnásobku prvního a druhého sloupce, a místo třetího řádku psát součet mínus trojnásobku prvního a třetího sloupce. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že v prvním ani ve druhém řádku již žádnou nulu vytvářet nemusíme, a proto můžeme tyto řádky dále opsat beze změny. Ve třetím řádku je nutno získat nulu ve druhém sloupci. Tu získáme pomocí operací se druhým řádkem. Vynásobíme-li druhý řádek mínus dvěma a sečteme se třetím řádkem, získáme potřebnou nulu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ {}^{-2} \\ {}_{+} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Abychom dostali matici v Gaussově tvaru, poslední řádek samých nul jsme vynechali. Zadanou matici jsme pomocí úprav s řádky matice, které neměnily hodnost matice, převedli na matici v Gaussově tvaru. Tato matice má dva řádky, hodnost zadané matice je tedy dva.

Příklad 4.16

4.16. Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: S úpravami začneme od prvního sloupce pod diagonálou. Zadanou matici chceme změnit tak, aby v prvním sloupci místo hodnot $4, 3$ a 1 byly nuly. V prvním řádku žádnou nulu vybudovat nechceme, proto jej můžeme celý opsat beze změn. Místo hodnoty 4 ve druhém řádku a prvním sloupci dostaneme nulu tak, že první řádek vynásobíme číslem -2 (vlastnost 1) a pak do druhého řádku matice zapíšeme součet mínus dvojnásobku prvního řádku a druhého řádku (vlastnost 2).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{-2} \\ {}_{+} \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Abychom získali nulu ve třetím řádku prvního sloupce, do třetího řádku zapíšeme součet mínus trojnásobku prvního řádku s dvojnásobkem třetího řádku. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{-3} \\ \\ \mid \cdot 2 \;{}_{+} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -17 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní nám zbývá „vynulovat“ prvek ve čtvrtém řádku a prvním sloupci. Pro tuto úpravu stačí čtvrtý sloupec vynásobit číslem -2 a tento dvojnásobek čtvrtého řádku sečíst s prvním řádkem. Nově vzniklý řádek zapíšeme místo čtvrtého řádku dosavadní matice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -17 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot -2 \;{}_{+} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -17 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní jsme již dostali matici, která má pod diagonálou v prvním sloupci samé nuly. Všechny operace, které jsme k vytvoření těchto nul použili, neměnily hodnost matice. Tedy námi zatím získaná matice bude mít stejnou hodnost jako matice zadaná.

Druhým krokem bude získávání nul pod diagonálou ve druhém sloupci. Jak jsme již uváděli, nuly pod diagonálou chceme vytvořit pomocí operací na druhý řádek. Ten má ale ve druhém sloupci nulu. Abychom ve druhém řádku a druhém sloupci měli nenulové číslo, přehodíme například druhý a čtvrtý řádek.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -17 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \end{pmatrix}$$

V této matici chceme získat nulu ve druhém sloupci pod diagonálou jen v případě prvku ve třetím řádku. V prvním, druhém a čtvrtém řádku žádné nuly ve druhém sloupci již vytvářet nemusíme, a proto je opíšeme beze změny. Abychom vynulovali prvek ve třetím řádku a druhém sloupci, k pětinásobku druhého řádku přičteme mínus trojnásobek třetího řádku. Takto vzniklý řádek zapíšeme do třetího řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ {}^{5} \\ | \cdot -3 \; {}_{+} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -84 & 34 & 56 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \end{pmatrix}$$

Nakonec zbývá získat nulu již jen ve třetím sloupci pod diagonálou. To znamená, že chceme měnit jen poslední řádek tak, abychom prvek a_{43} převedli na nulu. K tomu nám poslouží, když do čtvrtého řádku matice zapíšeme součet třetího řádku a dvanáctinásobku čtvrtého řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -84 & 34 & 56 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & -13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ | \cdot 12 \; {}_{+} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -84 & 34 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & -134 & -100 \end{pmatrix}$$

Poslední matice je již matice v Gaussově tvaru. Z původní matice byla získána pomocí úprav, které neměnily hodnost matice. Proto jejich hodnosti jsou stejné. A protože výsledná matice v Gaussově tvaru má čtyři řádky, její hodnost je čtyři. Zadaná matice má tedy také hodnost rovnu čtyřem.

Ukážeme, že tento příklad jsme mohli řešit také jiným postupem. Uvedené operace nejsou jediné možné, které vedou ke stejnému výsledku. Začneme tím, že přehodíme první a čtvrtý řádek. Pak se první sloupec pod diagonálou vynuluje pomocí naznačených úprav na první řádek, neboli všechny řádky zadané matice nesou informaci, kterou nelze odvodit z jiných řádků.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} {}^{-4} & {}^{-3} & {}^{-2} \\ {}_{+} & & \\ & {}_{+} & \\ & & {}_{+} \end{array}$$

Totiž do druhého řádku napíšeme součet druhého a mínus čtyřnásobku prvního řádku, místo třetího řádku píšeme součet třetího řádku a mínus trojnásobku prvního řádku a do čtvrtého řádku zapíšeme součet čtvrtého řádku a mínus dvojnásobku prvního řádku. Dostaneme následující matici. Jak je dále naznačeno, můžeme přehodit druhý a pátý sloupec a následně druhý a čtvrtý řádek.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & -17 & -4 & -8 \\ 0 & -7 & -14 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & -12 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & -14 & 6 & -7 \\ 0 & -11 & -17 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

V této matici teď budeme vytvářet nuly ve druhém sloupci pod diagonálou. V prvních dvou řádcích žádné nuly již budovat nebudeme, a proto je můžeme opsat beze změny. Další úpravy budeme provádět vůči druhému řádku. Místo třetího řádku zapíšeme součet třetího řádku a sedminásobku druhého řádku. Do čtvrtého řádku zapíšeme součet druhého řádku a jedenáctinásobku čtvrtého řádku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & -14 & 6 & -4 \\ 0 & -11 & -17 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -94 & 41 & -25 \\ 0 & 0 & 149 & 51 & -39 \end{pmatrix}$$

Nyní zbývá již vynulovat jen jednu hodnotu pod diagonálou ve třetím sloupci. Pak již bude matice v Gaussově tvaru. V prvních třech řádcích žádnou změnu již nechceme, proto je opíšeme beze změny. Do čtvrtého řádku zapíšeme součet čtvrtého řádku, který násobíme stočtyřicetidevíti a mínus stočtyřicetišestinásobek třetího řádku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -94 & 41 & -25 \\ 0 & 0 & 149 & 51 & -39 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 149 \\ |\cdot 94 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 146 & 61 & -37 \\ 0 & 0 & 0 & 11107 & -7547 \end{pmatrix}$$

Tato matice je matice v Gaussově tvaru, má čtyři řádky, a proto je její hodnost rovna čtyřem. Tímto postupem jsme dostali jinou matici než předchozím postupem. V obou případech jsme používali jen takové úpravy, které nemění hodnost matice. A vidíme, že hodnost při obou použitých postupech vyšla stejně. Tedy hodnost matice je určena jednoznačně, ale postupů k jejímu zjištění může být mnoho.

Další zajímavou vlastnost hodnosti matice si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 4.17

4.17. Určete hodnost následující matice.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: V této matici nejprve musíme zaměnit pořadí některých dvou řádků, protože chceme nejprve nulovat první sloupec pod diagonálou, a to by se nám vůči nule na diagonále nepodařilo. Přehoďme tedy například první a třetí řádek a pak nulujme prvky pod diagonálou pomocí naznačených operací.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Po získání nul v prvním sloupci se pátý řádek celý vynuloval. Abychom převedli matici do Gaussova tvaru, tento řádek vynecháme a začneme s nulováním hodnot ve druhém sloupci pod diagonálou. Postupovat budeme podle naznačených úprav s řádky.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot 2 \\ |\cdot 2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Třetí řádek se opět vynuloval a my ho můžeme opět vynechat. Po vynechání třetího řádku matice stále není v Gaussově tvaru. Podle naznačené úpravy na čtvrtý řádek, do kterého zapíšeme součet pětinásobku čtvrtého a mínus šestinásobku třetího řádku, dostaneme matici se čtvrtým řádkem samých nul. Po jeho vynechání dostaneme matici v Gaussově tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot 5 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Toto je již matice v Gaussově tvaru (je horní trojúhelníková), která má tři řádky. Hodnost této matice je tedy 3.

Při výčtu vlastností, které operace jsou povoleny s řádky matice, aniž by se změnila hodnost matice, si nyní všimneme ještě jedné věci. Všechny vlastnosti totiž platily nejen na řádky, ale i na sloupce. A sloupce zadané matice jsou řádky matice k ní transponované. Podívejme se, jaká bude hodnost transponované matice k zadané matici. Tato matice bude mít tři řádky a šest sloupců.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

V této matici musíme zase nejprve přehodit první řádek s některým ze zbývajících řádků. My přehodíme první a třetí řádek. Následně vynulujeme první sloupec pod diagonálou pomocí naznačené úpravy na druhý řádek.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 2 & -9 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

V této matici již stačí vynulovat jen jeden prvek ve druhém sloupci pod diagonálou podle naznačených úprav na druhý řádek.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 2 & -9 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot 3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 2 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Tato matice má tři řádky a je to matice v Gaussově tvaru. Proto je její hodnost rovna třem.

V tomto příkladu jsme viděli, že hodnost matice a matice k ní transponované jsou stejné. Následující věta nás přesvědčí, že to není náhoda.

Věta 4.1.20 (Hodnost matice a matice k ní transponované). *Hodnost matice A typu $m \times n$ a hodnost matice A^T typu $n \times m$ jsou si rovny. Neboli $h(A) = h(A^T)$.*

Nyní obrátíme pozornost na čtvercové matice. Čtvercová matice, jejíž všechny řádky nesou nějakou podstatnou informaci, která se nedá odvodit z jiných řádků, dostala v matematice zvláštní jméno. To proto, že tato vlastnost některých čtvercových matic je velice důležitá.

Definice 4.1.21. Čtvercová matice A řádu n se nazývá *regulární matice*, jestliže její hodnost je rovna jejímu řádu, tj. $h(A) = n$. Každá jiná čtvercová matice se nazývá *singulární matice*.

Příklad 4.18

4.18. Rozhodněte, zda je následující matice regulární.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení: O tom, zda je matice regulární, rozhoduje hodnost této čtvercové matice. Rozhodnout, zda je matice regulární, znamená určit její hodnost a porovnat ji s řádem matice. Určeme tedy hodnost zadané matice. Pro jednodušší úpravy v zadané matici přehodíme nejprve první a třetí řádek a pak provedeme naznačené úpravy na první řádek uvedené za maticí.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 14 & 10 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Nyní budeme nulovat druhý sloupec pod diagonálou. To znamená, že budeme provádět úpravy na druhý řádek. Tyto úpravy na řádky jsou naznačené za maticí.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 14 & 10 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Tato matice obsahuje dva nulové řádky. Abychom ji převedli do Gaussova tvaru, stačí tyto řádky vynechat.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Toto je již matice v Gaussově tvaru, která má dva řádky. Proto hodnost zadané matice je dva. Řád matice je 4. Hodnost matice se nerovná řádu matice. Zadaná matice je singulární.

Naučili jsme se najít v každé matici počet podstatných řádků, ve kterých se uložená informace nedá odvodit z jiných řádků. V kapitole o soustavách lineárních rovnic uvidíme, jak hodnost matice soustavy(matice koeficientů) bude ovlivňovat počet řešení soustavy lineárních rovnic.

4.1.3 Inverzní matice a maticové rovnice

Motivační úvaha I.

Uvažujme nyní tento problém. Jistá firma, působící v Praze a Brně, se rozhodla pro zvětšení svého obratu investovat do reklamy v televizi (na místních stanicích) a v rozhlase (v regionálním vysílání). V Praze se firma rozhodla zaplatit si 8 reklamních televizních vstupů a v Brně 6 reklamních televizních vstupů. V rozhlasové reklamě se firma rozhodla pro 5 reklamních vstupů v Praze a pro 4 v Brně. Ceny za reklamu se liší podle média, ve kterém reklama probíhá, i podle toho, v jakém vysílacím čase reklama běží (v hlavním nebo vedlejším vysílacím čase). Firma dostala informaci, že při počtu požadovaných vstupů v Praze (jak v televizi, tak v rozhlase) by celkově zaplatila za reklamu $55\,000$ Kč. Kdežto ve vedlejším vysílacím čase jen $29\,000$ Kč. V Brně by firma za požadované počty vstupů jak v televizi, tak v rozhlase zaplatila v hlavním vysílacím čase $42\,000$ Kč. Ve vedlejším vysílacím čase by reklama v Brně přišla firmu na $22\,000$ Kč. Může z těchto údajů firma zjistit, jak drahé byly jednotlivé reklamní vstupy (jak televizní, tak rozhlasové) v jednotlivých městech? Pokusíme se nyní na tuto otázku odpovědět.

Již víme, jak užitečný a přehledný je zápis do matice. Pokusme se tedy známé informace zapsat právě do matic. Máme informace o počtech reklamních vstupů za jednotlivá města i za jednotlivá média. Pokud zapíšeme do matice počty reklamních vstupů, do řádků budeme psát informaci o městech a do sloupců údaje za média. Při označení měst Praha (P) a Brno (B) a médií T (televize) a R (rozhlas), matice typu 2×2 bude mít následující podobu. Do sloupců zapisujeme média, do řádků města.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} T & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Také informace o cenách, kterou by firma zaplatila za reklamu v jednotlivých městech v různých vysílacích časech, můžeme zapsat do matice se dvěma řádky a dvěma sloupci. Do řádků budeme psát informace o cenách za města, do sloupců za vysílací dobu. Hlavní vysílací čas označíme H, vedlejší V. Údaje v matici jsou uvedeny v tisících Kč.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ B \end{matrix} & \begin{pmatrix} 55 & 29 \\ 42 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

Máme zjistit, jak drahé byly jednotlivé reklamní vstupy (jak televizní, tak rozhlasové) v jednotlivých městech. Cena jednoho reklamního vstupu se liší jak podle média, tak podle vysílasí doby. Tyto naše neznámé můžeme zapsat do následující matice typu 2×2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} H & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Neznámá x_{11} je cena (v tisících Kč) jednoho reklamního vstupu v Praze v hlavním vysílacím čase. Neznámá x_{12} je cena (v tisících Kč) jednoho reklamního vstupu, která se týká Prahy a vedlejšího vysílacího času atd.

Tato matice neznámých musí splňovat následující rovnici.

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 29 \\ 42 & 22 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Pokud matice na levé straně roznásobíme, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 8x_{11} + 5x_{21} & 8x_{12} + 5x_{22} \\ 6x_{11} + 4x_{21} & 6x_{12} + 5x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 29 \\ 42 & 22 \end{pmatrix} .$$

Matice jsou si rovny, když se rovnají prvky na odpovídajících si místech v maticích. Z toho dostáváme následující soustavu čtyř lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 8x_{11} + 5x_{21} &= 55 \\ 6x_{11} + 4x_{21} &= 42 \\ 8x_{12} + 5x_{22} &= 29 \\ 6x_{12} + 5x_{22} &= 22 \end{aligned}$$

Když se podrobně podíváme na tuto soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, vidíme, že se vlastně jedná o dvě soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} 8x_{11} + 5x_{21} &= 55 \qquad\qquad & 8x_{12} + 5x_{22} &= 29 \\ 6x_{11} + 4x_{21} &= 42 & 6x_{12} + 5x_{22} &= 22 \end{aligned}$$

Tyto dvě soustavy rovnic můžeme jednoduše vyřešit pomocí dosud nám známých středoškolských metod, a to metodou eliminační nebo metodou sčítací. Zvolme třeba metodu sčítací. Každou z rovnic vynásobíme a následně sečteme, jak je naznačeno dále.

$$\begin{array}{rl|rl} 8x_{11} + 5x_{21} = 55 & |\cdot(-6) & 8x_{12} + 5x_{22} = 29 & |\cdot(-6) \\ 6x_{11} + 4x_{21} = 42 & |\cdot 8 & 6x_{12} + 4x_{22} = 22 & |\cdot 8 \\ \hline 2x_{21} = 6 \Longrightarrow x_{21} = 3 & & 2x_{22} = 2 \Longrightarrow x_{22} = 1 & \end{array}$$

Pak dosazením do prvních rovnic obou soustav dostáváme

$$\begin{aligned} 8x_{11} + 5\cdot 3 &= 55 \qquad\qquad & 8x_{12} + 5\cdot 1 &= 29 \\ 8x_{11} &= 40 \Longrightarrow x_{11} = 5 & 8x_{12} &= 24 \Longrightarrow x_{12} = 3. \end{aligned}$$

Získali jsme tedy požadované informace. Jeden televizní reklamní vstup v hlavním vysílacím čase stojí 5 000 Kč, ve vedlejším vysílacím čase stojí 3 000 Kč. Jeden rozhlasový reklamní vstup v hlavním vysílacím čase stojí 3 000 Kč, ve vedlejším vysílacím čase stojí 1 000 Kč. Výsledek můžeme zapsat do matice

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podívejme se znovu na rovnici (4.1). Tato rovnice je takzvaná *maticová rovnice*. Jak koeficienty, tak neznámá v této rovnici jsou matice. Označme matice v této rovnici

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 55 & 29 \\ 42 & 22 \end{pmatrix}.$$

Pak můžeme rovnici zapsat ve tvaru $AX = B$. Kdyby se nejednalo o matice, ale o čísla, tuto rovnici bychom lehce vyřešili podělením obou stran rovnice číslem A (pokud je nenulové). Ale jedná se o matice a *maticí nedělíme!* Ale nebyla by to matematika, aby si s tímto problémem neporadila. Uvidíme, že tento problém lze (alespoň částečně) vyřešit pomocí inverzní matice. Tento nový pojem a jeho vlastnosti si musíme korektně zavést.

Definice 4.1.22. Nechť A a X jsou čtvercové matice řádu n. Řekneme, že X je *inverzní matice* k matici A, platí-li $AX = XA = I$. Tuto inverzní matici k matici A budeme značit A^{-1}.

Z této definice vyplývá, že inverzní matice je určena jednoznačně. Navíc je stejného řádu jako matice A, protože součiny AX, XA existují jen pro čtvercové matice stejného řádu. Další vlastnosti inverzní matice jsou uvedeny dále.

Věta 4.1.23 (Existence inverzní matice). *Nechť A je čtvercová matice. K této matici existuje inverzní matice A^{-1} právě tehdy, když A je regulární matice.*

Tato vlastnost říká, že inverzní matice neexistuje ke každé matici, ale pouze k matici regulární. Uveďme další vlastnosti inverzní matice.

Věta 4.1.24 (Inverze součinu a inverze k inverzi). *Jsou-li A a B regulární matice, potom platí*

a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

b) $(A^{-1})^{-1} = A$.

Máme zadefinovánu inverzní matici A^{-1}, známe některé její vlastnosti, tak jak ji teď nalézt? Jedna z cest je spočítat inverzní matici z definice. Hledáme matici A^{-1} tak, aby platila rovnost $AA^{-1} = I$. Pro jednoduchost si tento výpočet pro obecnou matici A odvodíme v případě, že matice A je řádu 2. Pak musí platit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozepíšeme-li tento součin a porovnáme-li každý prvek matic na obou stranách rovnice, dostaneme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= 0 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Toto je soustava čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých. Problém nalezení inverzní matice je tedy převeden na problém vyřešení soustavy lineárních rovnic.

4.19. Nalezněte inverzní matici k matici A, kde $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. **Příklad 4.19**

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_{11} - 2x_{21} &= 1 \\ 5x_{11} + x_{21} &= 0 \\ 3x_{12} - 2x_{22} &= 0 \\ 5x_{12} + x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme vyřešit například eliminační a sčítací metodou, které umíme ze střední školy. (Později se naučíme i takovéto soustavy řešit elegantněji pomocí matic). Sečtením první rovnice a dvojnásobku druhé rovnice dostaneme $13x_{11} = 1$. Odtud $x_{11} = \frac{1}{13}$. Po dosazení tohoto do druhé rovnice $x_{21} = -\frac{5}{13}$. Stejně budeme postupovat i s dalšími dvěma rovnicemi. Sečtením třetí rovnice a dvojnásobku čtvrté rovnice dostaneme $13x_{12} = 2$. Odtud $x_{12} = \frac{2}{13}$. Po dosazení tohoto do čtvrté rovnice $x_{22} = \frac{3}{13}$. Hledaná inverzní matice k matici A má tedy tvar $\begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-5}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$. O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-5}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tento způsob nalezení inverzní matice je ale poměrně zdlouhavý a zvláště pro matice většího řádu než je 2 i málo přehledný. Proto si ukážeme další metodu výpočtu inverzní matice.

Idea metody je v tom, že v dané matici připíšeme za svislou čáru jednotkovou matici odpovídajícího řádu. Pak provádíme na celé řádky matice takové úpravy na řádky, které nemění hodnost matice tak, abychom dostali před čarou jednotkovou matici a matice za čarou je pak inverzní matice k zadané matici. Postupujeme tak, že nejprve vynulujeme spodní trojúhelník, pak i horní, až získáme diagonální matici. Poté již lehce získáme před čarou jednotkovou matici. Matice, kterou dostaneme za čarou, bude inverzní matice k matici A. Schematicky můžeme postup vyjádřit takto:

$$(A|I) \sim \quad \text{elementární úpravy na řádky matice} \quad \sim (I|A^{-1}).$$

(Pro větší přehlednost připomínáme Větu 4.1.19 na straně 107 uvádějící vlastnosti neměnící hodnost matice).

Úpravy neměnící hodnost matice je ale nutno provádět pouze na řádky matice, nikoli i na sloupce. A jakákoli řádková úprava matice musí být zachycena za čarou. Nelze tedy nejprve v matici například přehodit řádky a pak teprve připsat za čáru jednotkovou matici. To bychom pak našli inverzní matici k matici s již přehozenými řádky, nikoli k zadané matici. Ukažme tuto metodu na předešlém příkladu, kde výsledek již známe.

Příklad 4.20

4.20. Nalezněte inverzní matici k matici A, kde $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Za zadanou matici zapíšeme jednotkovou matici a pak začneme budovat nulu v prvním sloupci pod diagonálou.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} {}^{-5} \\ |\cdot 3 \ {}^{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Nyní máme vynulovaný spodní trojúhelník. Abychom vynulovali horní trojúhelník v matici před čarou (v našem případě jen jednu hodnotu), budeme provádět operace na první řádek matice vůči druhému řádku. V našem příkladě do prvního řádku zapíšeme součet dvojnásobku druhého řádku a třináctinásobku prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 13 \ {}^{+} \\ {}_{2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Nyní stačí první řádek vydělit 39 a druhý 13. Tím získáme před čarou jednotkovou matici. Matice za čarou je inverzní matice k zadané matici.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1/39 \\ |\cdot 1/13 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/39 & 6/39 \\ 0 & 1 & -5/13 & 3/13 \end{array}\right)$$

V inverzní matici k zadané matici stačí již jen pokrátit zlomky v prvním řádku a dostaneme stejný výsledek jako pomocí předchozího postupu výpočtu.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{-5}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Vezměme si nyní trochu složitější případ, matici řádu 3, a nalezněme k ní inverzní matici.

Příklad 4.21

4.21. Nalezněte inverzní matici k matici A, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Postup výpočtu bude mít stejnou myšlenku jako v předchozím příkladě, jen numerického počítání bude trochu více. Naše idea tedy bude nejprve získat nuly ve spodním trojúhelníku pod diagonálou, pak vybudujeme nuly v horním trojúhelníku a tím získáme diagonální matici. Pak bude stačit každý řádek podělit hodnotou stojící na diagonále matice před čarou. Tak získáme před čarou jednotkovou matici. Za čarou bude inverzní matice k matici A. Zapišme za matici A jednotkovou matici a začněme podle naznačených úprav nulovat první sloupec pod diagonálou.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} {}^{-2} \ {}^{-3} \\ {}^{+} \\ \quad {}^{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ve druhém kroku budeme nulovat druhý sloupec pod diagonálou, tzn. budeme nulovat pouze prvek ve třetím řádku a druhém sloupci.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & -3 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} {}^{-9} \\ |\cdot 7 \ {}^{+} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -9 & 7 \end{array}\right)$$

Poslední úprava bude jen vynásobení třetího řádku číslem -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -9 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot -1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -7 \end{array}\right)$$

V tuto chvíli máme vynulovaný spodní trojúhelník v matici před čarou. K budování nul v horním trojúhelníku naši práci „otočíme vzhůru nohama“. Poslední sloupec nad diagonálou budeme nulovat vůči poslednímu řádku podle zobrazených úprav.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7 & 18 & -14 \\ 0 & -7 & 0 & -14 & -35 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | \cdot -\frac{1}{7} \\ \\ \end{array}$$

Vidíme, že druhý řádek můžeme vydělit mínus sedmi (jinými slovy vynásobit mínus jednou sedminou) a pak budeme pokračovat naznačenými úpravami na druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7 & 18 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -7 \end{array}\right)$$

Vynulováním horního trojúhelníku jsme před čarou dostali rovnou jednotkovou matici. Matice za čarou je tedy inverzní matice k zadané matici.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

O správnosti našeho výpočtu se můžeme přesvědčit zkouškou.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.22

4.22. Nalezněte inverzní matici k matici A, kde $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Začneme nulovat první sloupec pod diagonálou podle naznačených úprav na první řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vidíme, že se nám vynuloval celý třetí řádek. Touto úpravou jsme dostali nuly pod diagonálou v dolním trojúhelníku. Problém v tomto příkladě ale je, že je nula i na diagonále. Je vidět, že teď se nám již nemůže povést pomocí dovolených úprav na řádky dostat na diagonálu jedničku. Inverzní matici tedy nelze vypočítat. To ale není překvapující. Zamysleme se nad hodností zadané matice. Z tvaru polední matice před čarou (po vynechání posledního nulového řádku se jedná o matici v Gaussově tvaru) vidíme, že má hodnost 2. Není to tedy matice regulární a k takovým maticím neexistuje inverzní matice.

Vraťme se v úvahách k motivačnímu příkladu v úvodu této podkapitoly. Naším úkolem bylo vypočítat matici X z rovnice $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 55 & 29 \\ 42 & 22 \end{pmatrix}.$$

My jsme matice roznásobili, porovnali matice a sestavili soustavu rovnic, kterou jsme pak vyřešili. Tuto rovnici můžeme vyřešit pomocí inverzní matice. Z definice inverzní matice víme, že $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. V rovnici $AX = B$ bychom rádi na levé straně rovnice měli samotné X. Z vlastností násobení matic a vlastností jednotkové matice víme, že $IX = X$. Stačí tedy, abychom původní rovnici pouze vynásobili inverzní maticí k matici A. Protože víme, že násobení matic není komutativní, musíme rozlišovat, ze které strany násobíme. V tomto případě je matice A nalevo od matice X. Celou rovnici budeme tedy násobit maticí A zleva. Náš postup zapíšeme do rovnic.

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}\cdot|\quad AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Matici X můžeme tedy vypočítat tak, že k matici A najdeme inverzní matici a tou pak zleva vynásobíme matici B. Vypočtěme A^{-1} již nám známým způsobem.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ \ {}^{-6} \\ |\cdot 8 \ {}^{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \end{array}\right)$$

Nyní vynulujeme horní trojúhelník podle naznačených úprav.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \ {}^{+} \\ \ \ {}^{-5} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 16 & 0 & 32 & -40 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \end{array}\right)$$

Abychom před čarou dostali jednotkovou matici, stačí první řádek vynásobit $1/16$ a druhý řádek vynásobit hodnotou $1/2$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 16 & 0 & 32 & -40 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1/16 \\ |\cdot 1/2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

Inverzní matice k matici A je $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Touto maticí vynásobíme zleva matici B.

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 55 & 29 \\ 42 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 55 + \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 42 & 2\cdot 29 + \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 22 \\ -3\cdot 55 + 4\cdot 42 & -3\cdot 29 + 4\cdot 22 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme stejný výsledek jako v motivační úloze této kapitoly.

Při řešení maticových rovnic je idea stejná jako při řešení klasických rovnic. Nejprve vše, co obsahuje neznámou, převedeme na levou stranu rovnice, vše ostatní převedeme na pravou stranu. Pak celou rovnici vynásobíme inverzní maticí k matici, kterou je násobena neznámá matice v rovnici. Násobit musíme ze stejné strany, na které stojí matice koeficientů.

Příklad 4.23

4.23. Z maticové rovnice $AX - B = 3X + C$ s neznámou maticí X a známými maticemi A a B a C řádu n vyjádřete matici X.

Řešení: Nejprve na levou stranu převedeme výrazy s maticí X, ostatní převedeme se změnou znaménka na pravou stranu rovnice. Dostaneme $AX - 3X = B + C$. Nyní na levé straně musíme vytknout matici X. Vytýkat musíme na stejnou stranu, na které se nachází, v našem případě napravo.

$$(A - 3)X = B + C$$

V této naší rovnici je ale chyba. Výraz $A - 3$ totiž nemá smysl. Nemůžeme od matice obecného řádu odečítat číslo. Když si uvědomíme, že $3X = 3IX$, matici můžeme opravit do tvaru

$$(A - 3I)X = B + C.$$

Nyní již jen stačí celou rovnici zleva vynásobit inverzní maticí k matici $A - 3I$.

$$\begin{aligned} (A - 3I)^{-1} \cdot |(A - 3I)X &= B + C \\ (A - 3I)^{-1}(A - 3I)X &= (A - 3I)^{-1}(B + C) \\ X &= (A - 3I)^{-1}(B + C) \end{aligned}$$

Jak tedy budeme postupovat při výpočtu matice X? Nejprve vypočteme matice $(A-3I)$ a $B + C$. Pak vypočteme inverzní matici $(A - 3I)^{-1}$ a nakonec vypočteme součin $(A - 3I)^{-1}(B + C)$.

Příklad 4.24

4.24. Z maticové rovnice $AXB + C = D$ s neznámou maticí X a danými maticemi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ vypočtěte neznámou matici X.

Řešení: Nejprve z dané rovnice neznámou matici X vyjádříme, pak do vztahu dosadíme. Nejprve od obou stran rovnice odečteme matici C. Dostaneme

$$AXB = D - C.$$

Následně budeme rovnici násobit inverzními maticemi k maticím A a B. Protože matice A stojí nalevo od matice X, budeme maticí A^{-1} násobit rovnici zleva. A protože matice B stojí napravo od matice X, budeme maticí B^{-1} násobit rovnici zprava.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot | \qquad AXB &= D - C \qquad | \cdot B^{-1} \\ A^{-1}AXBB^{-1} &= A^{-1}(D - C)B^{-1} \\ IXI &= A^{-1}(D - C)B^{-1} \\ X &= A^{-1}(D - C)B^{-1} \end{aligned}$$

Vyjádřili jsme matici X. Vidíme, že musíme k maticím A a B najít inverzní matice a pak jimi vynásobit rozdíl matic $D - C$ v naznačeném pořadí. Nejprve najdeme inverzní matici A^{-1} již známou metodou. Za matici zapíšeme jednotkovou matici a pak upravujeme tak, aby nám jednotková matice vznikla před čarou. Postupovat budeme podle naznačených úprav.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad {}^{-3} \\ |\cdot 2 \;{}^{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} {}^{+} \\ {}_{-1} \end{array}$$

Poslední naznačená úprava vynuluje horní trojúhelník. Pak už bude jen stačit vynásobit první řádek číslem $1/2$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot \frac{1}{2} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Vypočetli jsme $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Nyní vypočteme stejnou metodou inverzní matici B^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad {}^{-3} \\ |\cdot 7 \;{}^{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} {}^{+} \\ {}_{-2} \end{array}$$

Dále vynulujeme horní trojúhelník naznačenou úpravou za maticí. Následně vynásobíme první řádek číslem $\frac{1}{7}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & 7 & -14 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \mid \cdot \tfrac{1}{7} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right)$$

Inverzní matice k matici B je matice $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

Ještě musíme vypočítat rozdíl $D - C$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Vypočtené matice dosadíme do vztahu $X = A^{-1}(D - C)B^{-1}$ a vynásobíme.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} -12 & 26 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou stejně jako u každé jiné rovnice. Zkouška: Matici X dosadíme do levé strany zadané rovnice.

$$\begin{aligned} AXB + C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 26 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -16 & 36 \\ -20 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -24 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že levé strana rovnice se rovná pravé straně rovnice. Matice X byla vypočtena správně.

Podívejme se ještě na jeden případ. Totiž případ, kdy danou maticovou rovnici nelze řešit přímo námi ukázaným postupem.

Příklad 4.25

4.25. Z maticové rovnice $AX = B$ s neznámou maticí X a maticemi $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vypočtěte neznámou matici X.

Řešení: Nejprve si rozmyslíme, zda zadaná rovnice má smysl. Matice A je typu 3×2, matice B je typu 3×1. Aby součin AX existoval, musí mít matice X dva řádky a jeden sloupec. Připomeňme, součin matic je matice, která má stejný počet řádků jako první matice v součinu a tolik sloupců, kolik sloupců má druhá matice součinu. Protože se součin AX má rovnat matici B, která má 1 sloupec, musí matice X mít 1 sloupec. Zadaná rovnice je tedy dobře definována a hledáme matici X typu 2×1.

Kdyby matice A byla čtvercová, celou rovnici bychom násobili zleva maticí A^{-1}. Ale matice A je obdélníková a k takové matici neexistuje matice inverzní. Naše idea v tomto případě bude následující. Vynásobíme celou rovnici určitou maticí tak, aby součiny na pravé i levé straně existovaly, a navíc aby součin této matice s maticí A byl čtvercová matice. Nyní si vzpomeneme, že součin matice a matice k ní transponované vždy existuje v jakémkoli pořadí a navíc výsledná matice takového součinu je vždy matice čtvercová. Pokud bude matice regulární, bude k této matici existovat matice inverzní. Postup naznačíme schematicky.

$$\begin{aligned}
A^T| \qquad\qquad AX &= B \\
A^TAX &= A^TB \\
(A^TA)^{-1}| \qquad\qquad (A^TA)X &= A^TB \\
(A^TA)^{-1}(A^TA)X &= (A^TA)^{-1}A^TB \\
IX &= (A^TA)^{-1}A^TB \\
X &= (A^TA)^{-1}A^TB
\end{aligned}$$

Abychom vypočetli neznámou matici X, musíme nejprve vypočítat součin A^TA, k této matici nalezneme inverzní matici a touto inverzní maticí vynásobíme součin A^TB. Transponovaná matice k matici A je $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 29 \\ 29 & 19 \end{pmatrix}$$

Toto je čtvercová regulární matice, ke které existuje inverzní matice. Nyní tuto inverzní matici najdeme.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 45 & 29 & 1 & 0 \\ 29 & 19 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rceil^{-29} \\ \hookleftarrow_{+} \quad | \cdot 45 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 45 & 29 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -29 & 45 \end{array}\right)$$

V dalším kroku vynulujeme horní trojúhelník.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 45 & 29 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -29 & 45 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot 14 \hookleftarrow^{+} \\ \rfloor_{-29} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 630 & 0 & 855 & -1305 \\ 0 & 14 & -29 & 45 \end{array}\right)$$

Po provedení vynásobení prvního řádku číslem $1/45$ a po vykrácení dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 630 & 0 & 855 & -1305 \\ 0 & 14 & -29 & 45 \end{array}\right) \; | \cdot \tfrac{1}{45} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 19 & -29 \\ 0 & 14 & -29 & 45 \end{array}\right).$$

Tato matice před čarou je čtrnáctinásobek jednotkové matice. Inverzní matice k matici A^TA má tvar $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 19 & -29 \\ -29 & 45 \end{pmatrix}$. Nyní vypočteme součin A^TB. Tento součin je matice typu 2×4.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Nakonec vypočteme součin $(A^TA)^{-1}A^TB$.

$$\begin{aligned}
(A^TA)^{-1}A^TB &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 19 & -29 \\ -29 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix} \\
(A^TA)^{-1}A^TB &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 42 \\ -56 \end{pmatrix} \\
X &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

O správnosti výsledku se přesvědčíme provedením zkoušky.

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = B$$

Dostali jsme, že levá strana se rovná pravé straně.

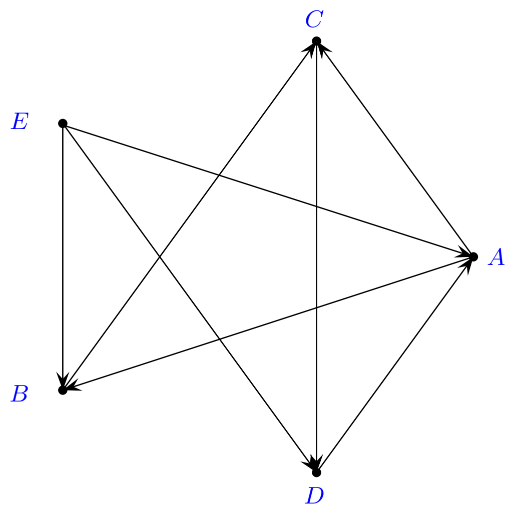
Poznamenejme, že v tomto způsobu řešení maticové rovnice, ve které je neznámá matice X násobena obdélníkovou maticí, není vynásobení transponovanou maticí ekvivalentní úprava. Proto je v takovýchto úlohách vždy nutné udělat zkoušku.

4.1.4 Aplikační úlohy

V předešlé podkapitole jsme si zavedli pojem matice a naučili jsme se s maticemi provádět jisté operace. Konkrétně již umíme matice sečíst, umíme každou matici transponovat a umíme matice vynásobit, umíme najít inverzní matici (pokud existuje). Nyní si ukážeme, jak tyto znalosti můžeme použít.

Příklad 4.26

4.26. Mějme pět měst, mezi kterými existuje jednosměrné letecké spojení pro převoz zboží. Pro přehlednost těchto pět měst označme A, B, C, D, E. Jednosměrným leteckým spojením myslíme například, že se převáží letecky zboží z města A do města B, ale neznamená to, že se automaticky zboží dopravuje také z města B do města A. V tomto příkladě se z města A dopravuje zboží do měst B a C, z města B se dopravuje zboží do města C, z města C se dopravuje zboží do města D, z města D se dopravuje zboží do města A a z města E se dopravuje zboží do měst A, B a D. Celou situaci si můžeme zachytit pomocí orientovaného grafu na Obrázku 4.1. Směr, odkud kam se zboží dopravuje, je tady zachycen směrem šipky.



Obrázek 4.1: Rozvážka zboží mezi městy

Přepravu mezi městy můžeme zachytit také pomocí matice. Řádky této matice budou města, *ze* kterých se bude uskutečňovat přeprava zboží a sloupce budou města, *do* kterých se zboží bude dopravovat. Prvky matice budou čísla 0 nebo 1. Pokud se bude uskutečňovat přeprava zboží z města v řádku a do města ve sloupci, bude mít tento prvek v určitém řádku (odkud) a sloupci (kam) hodnotu 1. V opačném případě bude mít prvek hodnotu 0.

$$\begin{array}{cc} & \text{kam} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \text{odkud} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Například v prvním řádku (město A) této matice jsou jedničky ve druhém sloupci (město B) a třetím sloupci (město C), protože z města A se zboží přepravuje do měst B a C. Je jasné, že tato matice bude mít na diagonále jedničky, protože z určitého města do téhož města není zboží letecky dopravováno. Takovéto matici se říká matice sousednosti a my ji označíme S.

Interpretujte matice $S^2, S^3, S+S^2$ a $S+S^2+S^3$.

Řešení: Protože matice S je matice čtvercová, její mocniny mají smysl. Spočtěme matici $S^2 = S \cdot S$.

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní se zamysleme nad tím, co vyjadřují hodnoty prvků v matici S^2. Jednotlivé řádky a sloupce budou představovat opět jednotlivá města. První řádek i sloupec se bude vztahovat k městu A, druhý řádek i sloupec k městu B atd. Například prvek ve čtvrtém řádku a druhém sloupci bude nějakým způsobem dávat do vztahu města D a B. A co znamená, že tento prvek má hodnotu 1? Hodnotu prvku ve čtvrtém řádku a druhém sloupci v matici S^2 jsme vypočetli tak, že jsme „vynásobili“ čtvrtý řádek matice S se druhým sloupcem matice S. Řádek se sloupcem se násobí tak, že se vynásobí hodnoty na prvních místech v příslušném řádku a sloupci a přičtou se k součinu hodnot na druhých místech, na třetích místech atd. Hodnoty jednotlivých součinů mohou být buď 0 (když se násobí $0 \cdot 0$ nebo $0 \cdot 1$, případně $1 \cdot 0$), nebo 1 (když se násobí $1 \cdot 1$). Hodnota 1 ve čtvrtém řádku a druhém sloupci matice S^2 znamená, že se pouze jednou na stejných místech v čtvrtém řádku matice S a druhém sloupci matice S násobily jedničky. V tomto případě to byly jedničky na prvních místech ve čtvrtém řádku a druhém sloupci. Jednička ve čtvrtém řádku a prvním sloupci matice S vyjadřovala, že je letecká přeprava zboží z města D do města A. Jednička na prvním místě druhého sloupce matice S, tedy v prvním řádku a druhém sloupci, znamená přepravu zboží z města A do města B. Jednička ve čtvrtém řádku a druhém sloupci matice S^2 bude tedy značit, že z města D do města B bude existovat jedna možnost přepravy zboží s jedním překladem („přestupem“), a to konkrétně v tomto případě ve městě A. Co tedy znamená dvojka v pátém řádku a třetím sloupci matice S^2? Vyjadřuje, že existují dvě možnosti přepravy zboží z města E do města C s jedním překladem zboží. V tomto případě buď v městě A, nebo ve městě B.

Dále spočtěme matici $S^3 = S \cdot S^2$.

$$S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi není potřeba již v tomto případě podrobně rozepisovat úvahu o tom, co znamenají hodnoty v matici S^3. Pokud zachováme, že řádky budou značit města *odkud* a sloupce města *kam* budeme zboží dopravovat, pak se bude jednat o dopravu se dvěma překlady. V této matici S^3 se poprvé objevily nenulové hodnoty na diagonále.

Konkrétně v prvním řádku a prvním sloupci, ve třetím řádku a třetím sloupci a ve čtvrtém řádku a čtvrtém sloupci. Například jednička ve třetím řádku a třetím sloupci znamená, že z města C se dá zboží dopravit zpět do města C se dvěma překlady. V tomto případě ve městech D a A.

V orientovaném grafu na Obrázku 4.1 je tedy jakási „kružnice“ spojující města C, D a A.

Výpočet matice $S + S^2$ je jednoduchý.

$$S + S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prvky této matice vyjadřují počet existujících cest z města v příslušném řádku do města v příslušném sloupci. A to cest buď přímých, nebo s jedním překladem. Prvky matice

$$S+S^2+S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

budou vyjadřovat, kolik existuje možností přepravy z města v příslušném řádku do města v příslušném sloupci. A přeprava může být buď přímá, s jedním překladem, nebo se dvěma překlady.

Rozmyslete si, proč v tomto příkladě mají všechny spočtené matice nulový poslední pátý sloupec. Jakou situaci to vyjadřuje? Může se stát, že v některé mocnině matice S (vyšší než třetí) se některé hodnoty pátého sloupce stanou nenulové?

Příklad 4.27

4.27. Tři kamarádi Petr, Ludva a Martin se domluvili na společné oslavě, na kterou si každý ještě může přivést další známé. Petr pozval Hanu a Sabinu, Ludva pozval Danielu a Gabrielu a Martin přivedl Janu. Jana zná i Petra. Hana, Sabina, Daniela a Gabriela na párty znají jen toho, kdo je přivedl a i navzájem se seznámili až na oslavě. Zapište tyto vztahy do matice A. Co bude vyjadřovat matice A^T a součiny $A \cdot A^T$ a $A^T \cdot A$?

Řešení: Matice, ve které můžeme zachytit vztahy známosti (přátelství), bude čtvercová matice (teoreticky se může znát každý s každým) řádu 8 (na oslavě je 8 účastníků). Prvky této matice budou mít pouze hodnotu 0 nebo 1. Každý řádek a sloupec bude představovat jednoho účastníka párty. Jak do řádků, tak do sloupců přiřadíme jména ve stejném pořadí, a to postupně: Petr, Ludva, Martin, Hana, Sabina, Daniela, Gabriela a Jana. Do řádků píšeme *kdo* zná a do sloupců *koho* zná (Myslí se před oslavou). Hodnota 0 znamená, že osoba v řádku a ve sloupci se před oslavou neznali. Hodnota 1 vyjadřuje, že osoby v řádku a sloupci se znali před párty.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{koho} \\ & & \begin{array}{cccccccc} P & L & M & H & S & D & G & J \end{array} \\ \text{kdo} & \begin{array}{r} Petr \\ Ludva \\ Martin \\ Hana \\ Sabina \\ Daniela \\ Gabriela \\ Jana \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nepřekvapí nás, že je tato matice symetrická, a tedy $A = A^T$. Vždyť i vztah známosti mezi dvěma osobami je symetrický: jestliže *X* zná *Y*, pak i *Y* zná *X*. Na diagonále matice A píšeme nuly, protože vztah známosti může být jen mezi dvěma různými lidmi. V matici A^T v řádcích máme uvedeny osoby *koho* zná osoba uvedená ve sloupci *kdo*. Součin $A \cdot A^T = A \cdot A = A^2$ bude existovat a výsledek bude čtvercová matice řádu 8.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hodnota ve druhém řádku a druhém sloupci, bude hodnota, která se bude týkat Ludvy. Tato hodnota vznikla vynásobením druhého řádku matice A, ve kterém jsou pomocí nul a jedniček zachyceny vztahy známosti Ludvy se všemi účastníky oslavy, a druhého sloupce matice A^T, kde je zachyceno, kdo z přítomných znal Ludvu před oslavou. Hodnota 4 ve druhém řádku a druhém sloupci bude tedy počet osob, které znal Ludva ještě před párty. Obecně diagonální prvky matice $A \cdot A^T$ vyjadřují, kolik osob na párty znala osoba v řádku (i sloupci) před oslavou. A co vyjadřují ostatní prvky matice $A \cdot A^T$? Uvažujme například prvek ve třetím řádku a prvním sloupci matice $A \cdot A^T$. Tento prvek vznikl vynásobením třetího řádku (týkajícího se Martina) s prvním sloupcem (vypovídajícím o tom, kdo z přítomných znal před oslavou Petra). Tato hodnota nese informaci mezi Martinem a Petrem. Martin a Petr se před oslavou znali a prvek ve třetím řádku a prvním sloupci matice $A \cdot A^T$ má hodnotu 2, která vznikla součtem dvou nenulových součinů na druhém a osmém místě třetího řádku matice A a prvního sloupce matice A^T. Druhá hodnota (jednička) ve třetím řádku matice A uvádí, že Martin znal Ludvu a druhá hodnota ve prvním sloupci matice A^T říká, že Ludva znal Petra. Osmá hodnota (jednička) ve třetím řádku matice A uvádí, že Martin znal Janu a osmá hodnota ve prvním sloupci matice A^T udává, že Jana znala Petra. Martin a Petr měli tedy na oslavě dva společné známé, Ludvu a Janu. Obecně jakékoli prvky mimo diagonálu matice $A \cdot A^T$ uvádějí, kolik společných známých měla osoba uvedená v řádku na oslavě s osobou uvedenou ve sloupci. A pokud osoba uvedená v řádku matice a osoba uvedená ve sloupci matice se před oslavou neznali, pak číslo v daném řádku a sloupci představuje počet osob, kterými mohli být na oslavě představeny.

Z důvodu symetrie matice A platí $A \cdot A^T = A \cdot A = A^2 = A^T \cdot A$. Součin $A^T \cdot A$ bude mít tedy stejnou interpretaci jako matice $A \cdot A^T$.

4.28. Pět spolužáků ze střední školy (Jan, Marie, Pavel, Lucie a Petra) se v maturitním ročníku rozhodlo jít studovat medicínu na stejnou fakultu. Přijímací zkoušky skládali z biologie, chemie, fyziky a všeobecných studijních předpokladů. Testy z biologie, chemie, fyziky tvořilo 25 otázek, test všeobecných studijních předpokladů měl 30 otázek. V následující matici jsou uvedeny správné odpovědi jednotlivých spolužáků z jednotlivých částí přijímací zkoušky. **Příklad 4.28**

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} B & Ch & F & Vsp \end{array} \\ \begin{array}{r} Jan \\ Marie \\ Pavel \\ Lucie \\ Petra \end{array} & \begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 & 10 \\ 19 & 17 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \\ 15 & 13 & 16 & 8 \\ 20 & 17 & 14 & 16 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Za každou správně zodpovězenou otázku z biologie, chemie, fyziky získal každý dva body a za každou správnou odpověď v testu všeobecných studijních předpokladů získal každý tři body. Pomocí maticového násobení zadané matice s jinou maticí zjistěte počet bodů z jednotlivých testů každého z pěti spolužáků, počet všech získaných bodů každého z pěti spolužáků, počet správně zodpovězených otázek z jednotlivých testů v celé skupině spolužáků, průměrný počet dobře zodpovězených otázek u každého z pěti spolužáků, průměrný počet získaných bodů každého z pěti spolužáků, průměrný počet dobře zodpovězených otázek u každého ze čtyř různých testů, průměrný počet získaných bodů u každého ze čtyř různých testů.

Řešení: Pokud máme zjistit počet bodů z jednotlivých testů každého z pěti spolužáků, musíme matici s informací o správně zodpovězených otázkách násobit zprava, protože výsledná matice musí mít stejný počet řádků jako původní matice, ve které každý řádek matice znamenal informace o správně zodpovězených otázkách každého z pěti spolužáků. Tedy první řádek se týkal Jana, druhý Marie atd. A protože ve výsledku chceme matici stejného typu, jako byla zadaná matice, budeme matici správně zodpovězených otázek násobit zprava maticí 4×4. V každém řádku musí být první tři hodnoty násobeny dvěma (2 body ze správně zodpovězenou otázku z Bi, Ch, a Fy) a poslední hodnota třemi (za správnou odpověď z testu všeobecných studijních předpokladů získá student 3 body). Tato matice 4×4 bude tedy diagonální matice s třemi dvojkami a jednou trojkou na diagonále.

$$\begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 & 10 \\ 19 & 17 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \\ 15 & 13 & 16 & 8 \\ 20 & 17 & 14 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 36 & 26 & 30 \\ 38 & 34 & 30 & 45 \\ 36 & 40 & 26 & 51 \\ 30 & 26 & 32 & 24 \\ 40 & 34 & 28 & 48 \end{pmatrix}$$

Ve výsledné matici jsou uvedeny získané body každého ze spolužáků z každého z testů. Pokud chceme zjistit celkový počet bodů získaných v přijímacích zkouškách u každého z pěti spolužáků, budeme postupovat následovně. Výsledná matice musí nést informaci za každého ze spolužáků, násobit budeme tedy zprava. Nyní nám bude stačit pro každého ze spolužáků (řádků) jedna informace. Proto budeme matici správně zodpovězených otázek násobit zprava maticí typu 4×1. V tomto jednom sloupci musí být první tři hodnoty dvojky a poslední hodnota bude trojka.

$$\begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 & 10 \\ 19 & 17 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \\ 15 & 13 & 16 & 8 \\ 20 & 17 & 14 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134 \\ 147 \\ 153 \\ 112 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Jiný způsob výpočtu je

$$\begin{pmatrix} 42 & 36 & 26 & 30 \\ 38 & 34 & 30 & 45 \\ 36 & 40 & 26 & 51 \\ 30 & 26 & 32 & 24 \\ 40 & 34 & 28 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134 \\ 147 \\ 153 \\ 112 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Z obou postupů dostáváme, že nejvíce bodů u přijímacích zkoušek získal Pavel. Jeho bodové skóre je 153 bodů. Petra získala 150 bodů. Třetí v pořadí úspěšnosti byla Marie, která získala 147 bodů, Jan získal 134 bodů a nejméně bodů získala Lucie (112 bodů).

Nyní si představme situaci, že pedagogy ze střední školy, kde tito studenti studovali, bude zajímat, ze kterého předmětu studenti u přijímacích zkoušek dopadli nejlépe. To zjistíme tím, že určíme počty správně zodpovězených otázek z každého předmětu. Při zjišťování počtu správně zodpovězených otázek získaných z testů různých předmětů v celé skupině spolužáků, chceme mít výslednou informaci (celkový počet správně zodpovězených otázek) uvedenou pro testy z biologie, chemie, fyziky a testu všeobecných studijních předpokladů. Tyto údaje jsou uloženy ve sloupcích. Proto budeme zadanou matici násobit zleva. Za každý sloupec nám stačí jen jedna informace. V každém sloupci jsou informace od pěti lidí. Proto budeme násobit maticí typu 1×5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 & 10 \\ 19 & 17 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \\ 15 & 13 & 16 & 8 \\ 20 & 17 & 14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 & 85 & 71 & 66 \end{pmatrix}$$

Z výsledku hned vidíme, že nejlépe byli spolužáci připraveni na test z biologie a nejtěžší byl pro ně test všeobecných studijních předpokladů.

Při výpočtu průměrného počtu dobře zodpovězených otázek u každého ze čtyř různých testů musíme zadanou matici správně zodpovězených otázek násobit zleva, a to maticí typu 1×5.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 & 10 \\ 19 & 17 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \\ 15 & 13 & 16 & 8 \\ 20 & 17 & 14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{93}{5} & \frac{85}{5} & \frac{71}{5} & \frac{66}{5} \end{pmatrix}$$

Z biologie průměrně každý žák zodpověděl správně průměrně $18,6$ otázek, z chemie 17 otázek, z fyziky každý z pěti spolužáků zodpověděl správně průměrně $16,2$ otázek a z testu všeobecných studijních předpokladů zodpověděl každý průměrně $13,2$.

Pro získání odpovědi na průměrný počet dobře zodpovězených otázek u každého z pěti spolužáků budeme matici dobře zodpovězených otázek násobit zprava, protože ve výsledku chceme informaci za každý řádek. A tato informace za každý řádek bude stačit jedna. Matici dobře zodpovězených otázek budeme tedy násobit zprava maticí typu 4×1. Počet správně zodpovězených otázek u každého z testů nemá ale pro získání průměrného počtu správně zodpovězených otázek stejnou váhu. Otázek z biologie, chemie a fyziky bylo po 25, test všeobecných studijních předpokladů měl 30 otázek. Celkem studenti odpovídali na 105 otázek. Podíl otázek z biologie, chemie a fyziky byl $\frac{25}{105} = \frac{5}{21}$, podíl otázek z testu všeobecných studijních předpokladů byl $\frac{30}{105} = \frac{6}{21}$. A proto

$$\begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 & 10 \\ 19 & 17 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \\ 15 & 13 & 16 & 8 \\ 20 & 17 & 14 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/21 \\ 5/21 \\ 5/21 \\ 6/21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320/21 \\ 345/21 \\ 357/21 \\ 268/21 \\ 351/21 \end{pmatrix}.$$

Z výsledku ve tvaru sloupce vidíme, že průměrný počet správně odpovězených otázek u Jana byl $320/21 = 15,24$, u Marie $345/21 = 16,43$, u Pavla $357/21 = 17$, u Lucie byl $268/21 = 12,76$ a u Petry $351/21 = 16,71$. Při výpočtu průměrného počtu získaných bodů pro každého z pěti spolužáků musíme vzít v úvahu, že v testech bylo možné získat celkem 240 bodů. Vyjdeme z matice získaných bodů a počty bodů z testu každého předmětu vynásobíme příslušnou vahou.

$$\begin{pmatrix} 42 & 36 & 26 & 30 \\ 38 & 34 & 30 & 45 \\ 36 & 40 & 26 & 51 \\ 30 & 26 & 32 & 24 \\ 40 & 34 & 28 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50/240 \\ 50/240 \\ 50/240 \\ 90/240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 790/24 \\ 915/24 \\ 969/24 \\ 656/24 \\ 942/24 \end{pmatrix}.$$

K výpočtu průměrného počtu získaných bodů na studenta u každého ze čtyř různých testů využijeme opět násobení zleva. A protože nám stačí jedna informace za každý sloupec a v každém sloupci je pět údajů, budeme zadanou matici s informacemi o správně zodpovězených otázkách násobit zleva maticí typu 1×5. Tentokrát však musíme zahrnout i přepočítání na získané body.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 18 & 13 & 10 \\ 19 & 17 & 15 & 15 \\ 18 & 20 & 13 & 17 \\ 15 & 13 & 16 & 8 \\ 20 & 17 & 14 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{186}{5} & \frac{170}{5} & \frac{142}{5} & \frac{198}{5} \end{pmatrix}$$

Z tohoto výpočtu vidíme, že průměrný počet bodů z biologie na jednoho z pětice studentů je $\frac{186}{5} = 37,2$, průměrný počet bodů z chemie na jednoho z pětice studentů je $\frac{170}{5} = 34$, průměrný počet bodů z fyziky na jednoho z pětice studentů je $\frac{142}{5} = 28,4$ a průměrný počet bodů získaných z testu všeobecných studijních předpokladů na jednoho z pětice studentů je $\frac{198}{5} = 39,6$.

Příklad 4.29

4.29. Firma vyrábějící pět různých modelů motorových pil (pro jednoduchost modely označme A, B, C, D, E) je dodává do tří obchodních řetězců. Označme pro jednoduchost tyto řetězce $1, 2, 3$. Každý z těchto řetězců může prodávat jak za maloobchodní, tak velkoobchodní ceny. V následující matici W jsou uvedeny počty jednotlivých prodaných modelů motorových pil v jednom dni. V matici Z jsou uvedeny maloobchodní a velkoobchodní ceny jednotlivých modelů motorových pil.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ W = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 & 10 \\ 15 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathit{Mal} & \mathit{Vel} \end{array} \\ Z = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 2\,400 & 2\,000 \\ 5\,700 & 5\,100 \\ 4\,500 & 3\,900 \\ 6\,800 & 6\,300 \\ 3\,300 & 2\,900 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vypočtěte:

a) celkovou denní tržbu z maloobchodních cen všech prodaných motorových pil modelu C,

b) celkovou denní tržbu z velkoobchodních cen motorových pil prodaných druhým obchodním řetězcem,

c) vypočtěte součiny ZW a WZ (pokud existují) a interpretujte je.

Řešení:

ad a) Z matice W vybereme informace týkající se počtu kusů motorových pil modelu C prodaných postupně ve všech třech obchodních řetězcích. Tyto údaje jsou uloženy ve třetím sloupci matice W. Informaci potřebujeme souhrnnou (za celý sloupec), a proto hodnoty ve třetím sloupci matice W sečteme, $5 + 5 + 1 = 11$. Maloobchodní cena modelu C je $4\,500$ Kč. Celkovou maloobchodní cenu všech prodaných motorových pil modelu C vypočteme jako součin

$$11 \cdot 4\,500 = 49\,500.$$

ad b) Pokud budeme počítat celkovou denní tržbu z velkoobchodních cen prodaných motorových pil druhým obchodním řetězcem, informace jsou uloženy ve druhém řádku matice Z. Velkoobchodní ceny jednotlivých modelů motorových pil jsou uloženy ve druhém sloupci matice W. Pro hledanou informaci musíme tedy vynásobit druhý řádek matice Z s druhým sloupcem matice W. Tento součin bude mít smysl, protože druhý řádek matice Z je vlastně matice typu 1×5 a druhý sloupec matice W je vlastně matice typu 5×1. Výsledkem součinu bude matice typu 1×1, neboli jedna hodnota.

$$\begin{pmatrix} 15 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 5\,100 \\ 3\,900 \\ 6\,300 \\ 2\,900 \end{pmatrix} = 94\,800$$

Můžeme tedy odpovědět, že celková denní tržba z velkoobchodních cen prodaných motorových pil druhým obchodním řetězcem je 94 800Kč.

ad c) Nakonec máme vypočítat součiny ZW a WZ (pokud existují) a interpretovat je. Matice Z je matice typu 3×5, matice W je typu 5×2. Součin ZW existovat bude, protože první matice má pět sloupců a druhá pět řádků. Výsledná matice bude matice typu 3×2. Vypočtěme ji.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 & 10 \\ 15 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,400 & 2\,000 \\ 5\,700 & 5\,100 \\ 4\,500 & 3\,900 \\ 6\,800 & 6\,300 \\ 3\,300 & 2\,900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87\,500 & 77\,700 \\ 109\,000 & 94\,800 \\ 56\,900 & 50\,900 \end{pmatrix}$$

Uvědomíme si, že jsme násobili řádky matice Z, ve kterých jsou uloženy informace o prodeji za každý ze tří obchodních řetězců, a sloupce matice W, ve kterých jsou uloženy různé druhy cen. Ve výsledné matici součinu ZW budou uloženy maloobchodní a velkoobchodní ceny všech prodaných modelů motorových pil.

Součin WZ existovat nebude, protože první matice má dva sloupce a druhá tři řádky.

V dalším příkladu si ukážeme, že regulární matici lze použít k zašifrování zprávy.

4.30. Zašifrujte zprávu „Matice jsou užitečné.“ pomocí matice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **Příklad 4.30**

Řešení: Prvním krokem při šifrování zpráv pomocí matic je převedení zprávy do číselného kódu. Každému písmenu v abecedě přiřadíme číselnou hodnotu. Zprávu budeme pro zjednodušení šifrovat bez diakritiky a vynecháme i písmenko ch, které se dá ve slově pokrýt z písmenek c a h. Toto zjednodušení nezpůsobí nejednoznačnost zprávy. Znakem „–“ je myšlena mezera v textu.

–	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	24	26

Naše zpráva (bez diakritiky) zapsaná v takto přiřazených číslech bude následující.

13 1 20 9 3 5 0 10 19 15 21 0 21 26 9 20 5 3 14 5

Abychom zprávu mohli zašifrovat zadanou maticí, musíme ji zapsat tak, aby součin existoval. Šifrovací klíč je matice řádu 3. My s ním budeme násobit zleva, a proto naši zprávu převedenou do čísel musíme zapsat do matice, která má tři řádky. Zapisovat naši číselnou zprávu budeme po sloupcích. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 13 & 9 & 0 & 15 & 21 & 20 & 14 \\ 1 & 3 & 10 & 21 & 26 & 5 & 5 \\ 20 & 5 & 19 & 0 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kde se vzala nula v posledním sloupci? Zpráva nebyla tak dlouhá, aby se dala přesně zapsat do matice o třech řádcích. Pamatujte si, že pokud je zpráva kratší, zbytek sloupce doplníme nulami. Nyní již provedeme násobení.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 9 & 0 & 15 & 21 & 20 & 14 \\ 1 & 3 & 10 & 21 & 26 & 5 & 5 \\ 20 & 5 & 19 & 0 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 47 & 26 & 29 & 51 & 77 & 48 & 33 \\ 95 & 55 & 68 & 123 & 180 & 101 & 71 \\ 66 & 28 & 38 & 30 & 60 & 46 & 28 \end{pmatrix}$$

Takto zašifrovanou zprávu musíme přepsat z matice po sloupcích do řádku.

$$47 \quad 95 \quad 66 \quad 26 \quad 55 \quad 28 \quad 29 \quad 68 \quad 38 \quad 51 \quad 123$$

A zpráva pokračuje

$$30 \quad 77 \quad 180 \quad 60 \quad 48 \quad 101 \quad 46 \quad 33 \quad 71 \quad 28.$$

Takto zašifrovanou zprávu můžeme odeslat.

V dalším příkladu ukážeme, jak můžeme odšifrovat zprávu, když známe klíč.

Příklad 4.31

4.31. Odšifrujte zprávu

$$41 \quad 55 \quad 70 \quad 95 \quad 41 \quad 55 \quad 78 \quad 107 \quad 35 \quad 47 \quad 20 \quad 30 \quad 15 \quad 20$$

a dále

$$69 \quad 98 \quad 41 \quad 61 \quad 44 \quad 59,$$

která byla zašifrována pomocí matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: Nejprve musíme zprávu zapsat do matice. Protože klíč je matice řádu dvě, budeme zprávu zapisovat do matice s dvěma řádky.

$$\begin{pmatrix} 41 & 70 & 41 & 78 & 35 & 20 & 15 & 69 & 41 & 44 \\ 55 & 95 & 55 & 107 & 47 & 30 & 20 & 98 & 61 & 59 \end{pmatrix}$$

Abychom odšifrovali tuto zprávu zapsanou do matice, musíme mít odemykací klíč. Klíč je matice řádu dva, odemykací klíč je inverzní matice k matici, která je zamykacím klíčem. Nalezněme ji.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ |\,3 \; + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Dále vynulujeme horní trojúhelník.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Nyní stačí již jen vynásobit první řádek hodnotou $1/3$ a následně pokrátit.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\,\frac{1}{3} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Odemykací klíč je matice $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Touto maticí vynásobíme zleva matici, do které jsme zapsali zprávu.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 41 & 70 & 41 & 78 & 35 & 20 & 15 & 69 & 41 & 44 \\ 55 & 95 & 55 & 107 & 47 & 30 & 20 & 98 & 61 & 59 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 20 & 13 & 20 & 11 & 0 & 5 & 11 & 1 & 14 \\ 1 & 5 & 1 & 9 & 1 & 10 & 0 & 18 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní zprávu přepíšeme z matice po sloupcích do řádku.

$$13 \quad 1 \quad 20 \quad 5 \quad 13 \quad 1 \quad 20 \quad 9 \quad 11 \quad 1$$

A dále

$$0 \quad 10 \quad 5 \quad 0 \quad 11 \quad 18 \quad 1 \quad 19 \quad 14 \quad 1.$$

Zbývá připomenout, jak se přiřazují číslům písmena.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
–	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	24	26
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Znakem „–“ myslíme mezeru. Nyní přiřadíme číslům v odemčené zprávě písmena.

13	1	20	5	13	1	20	9	11	1
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A

A dále

0	10	5	0	11	18	1	19	14	1
–	J	E	–	K	R	A	S	N	A

Přidáme diakritiku a můžeme psát odšifrovanou zprávu: *Matematika je krásná.*

Pro ověření, že jste tuto úlohu pochopili a umíte již odšifrovat každou zprávu, když znáte klíč, zkuste odšifrovat zašifrovanou zprávu z předchozího příkladu. V tomto případě výsledek (zprávu) znáte.

4.32. Do tanečního kroužku chodí tři dívky, Jana, Pavla a Lucka, a tři chlapci, Tomáš, Daniel a Filip. V tanečním kroužku tancují v párech a nacvičují různé taneční kreace s různými partnery. Jana tančí s Tomášem tři různé tance, s Danem jeden a s Filipem má Jana nacvičeny dvě taneční sestavy. Pavla s Tomášem trénuje dvě taneční sestavy a s Danem čtyři. Lucka nacvičuje s Tomášem a Danem po jedné taneční sestavě a s Filipem dvě. Zapište počty tanečních sestav každého tanečníka s tanečnicí do matice a dále pomocí maticového násobení s touto maticí zachyťte situace, kdy **Příklad 4.32**

a) trenér vymění všechny taneční sestavy Danovi s Tomášem,

b) trenér vymění všechny taneční sestavy Pavle s Luckou,

c) trenér vymění všechny taneční sestavy Jany a Pavly a pak Dana a Filipa. Kolik tanečních sestav pak bude mít Jana a Filip?

Řešení: Nejprve se pokusíme zapsat do matice počty tanečních sestav všech párů. Do řádků takové matice budeme zapisovat dívky v pořadí Jana (J), Pavla (P) a Lucka (L). Do sloupců budeme zapisovat chlapce z kroužku v pořadí Tomáš (T), Dan (D) a Filip (F). Pak taková matice bude čtvercová matice řádu tři.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{chlapci} \\ & & \begin{array}{ccc} T & D & F \end{array} \\ \text{dívky} & \begin{array}{c} J \\ P \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ad a) Pokud máme zapsat pomocí násobení matic situaci, že trenér vymění všechny taneční sestavy Danovi s Tomášem, pak to znamená, že chceme pomocí maticového násobení zapsat prohození prvního a druhého sloupce naší matice. Počty Tomášových tanečních sestav se všemi partnerkami jsou zapsané v prvním sloupci a Danových tanečních sestav se všemi partnerkami jsou zapsané v druhém sloupci. A pokud chceme působit na sloupce, již víme, že musíme původní matici počtů tanečních sestav různých dvojic násobit zprava. Chceme, aby se při násobení nezměnily hodnoty, ale aby došlo k prohození dvou sloupců (prvního a druhého). Třetí sloupec zůstane beze změny. Také již víme, že pokud jsme jakoukoli matici násobili maticí jednotkovou, výsledkem byla původní matice. Proto hledaná matice bude mít třetí řádek stejný jako jednotková matice. A její první a druhý řádek budou prohozené řádky jednotkové matice. Tedy hledaná matice bude

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ověříme vynásobením, že došlo k prohození prvního a druhého sloupce.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Prohození sloupců jsme zapsali pomocí maticového násobení.

ad b) Nyní máme pomocí maticového násobení zapsat výměnu všech tanečních sestav Pavly s Luckou. Všechny počty tanečních sestav Pavly s různými tanečníky jsou zapsány ve druhém řádku, všechny počty tanečních sestav Lucky s různými tanečníky jsou zapsány ve třetím řádku. Výměnu všech tanečních sestav Pavly s Luckou pak znamená prohození druhého a třetího řádku. Chceme působit na řádky, pak budeme původní matici násobit zleva. Z předešlé úvahy víme, že budeme zleva násobit maticí řádu tři, která bude mít první řádek stejný jako jednotková matice a druhý a třetí řádek budou budou prohozené řádky(druhý a třetí) jednotkové matice. Hledaná matice bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provedením násobení se přesvědčíme, že došlo k přehození druhého a třetího řádku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ad c) Nakonec máme zapsat pomocí maticového násobení situaci, kdy trenér vymění všechny taneční sestavy Jany a Pavly a pak Dana a Filipa. A následně máme zjistit, kolik tanečních sestav pak bude mít Jana a Filip.

Již víme, že prohození počtu tanečních sestav Jany a Pavly znamená prohodit první a druhý řádek. Prohození řádků lze zachytit násobením matice počtu sestav maticí, která má oproti jednotkové matici prohozené první dva řádky. Tato matice bude $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Abychom prohazovali řádky a ne sloupce budeme touto maticí násobit zleva. Dále trenér vyměnil všechny taneční sestavy Dana a Filipa. To znamená prohození druhého a třetího sloupce. Již víme, že prohození sloupců znamená násobení zprava. Násobit budeme maticí, která bude mít oproti jednotkové matici přehozen druhý a třetí sloupec. Bude to matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tyto operace na řádky a sloupce můžeme zapsat pomocí maticového násobení takto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zbývá nám tedy odpovědět na otázku, kolik tanečních sestav po změnách bude mít Jana a Filip. Tuto informaci nalezneme v prvním řádku a třetím sloupci. Prvek na tomto místě v matici má hodnotu 4. Můžeme odpovědět, že po změnách budou Jana a Filip spolu tančit čtyři taneční sestavy.

Matice, které pomocí násobení přehazovaly v násobené matici řádky nebo sloupce, se nazývají permutační matice a mají zajímavé vlastnosti, které si uvedeme.

Definice 4.1.25. Symetrická matice P, která má v každém řádku a každém sloupci jeden prvek roven jedné a ostatní prvky rovny nule, se nazývá *permutační matice*.

Věta 4.1.26 (Vlastnosti permutačních matic). *Jestliže P je permutační matice, pak platí*

1. $P^2 = I$
2. $P^{-1} = P$

4.33. Občané jistého státu *X* mohou investovat do nákupu půdy, dluhopisů nebo akcií (označme postupně a_1, a_2 a a_3). Během roku čekají zemi volby, ve kterých zvítězí jedna ze dvou kandidujících stran, a to buď strana *K*, nebo strana *L*. Označme možnou situaci postupně s_1 a s_2. Hodnota investice po uplynutí jisté doby (například po roce) bude záviset na tom, která z těchto situací v průběhu roku nastane. Například vládnutí strany *L* může v důsledku vést ke snižování ceny půdy a zvyšování hodnoty akcií. Vládnutí strany *K* může mít opačný účinek. Předpokládejme, že známe roční výnos z investice do jedné jednotky aktiva a_i, kde $(i = 1, 2, 3)$, za předpokladu, že nastane situace s_j, kde $(j = 1, 2)$. Ekonomové odhadují, že v případě volebního vítězství strany K (situace s_1) tyto hodnoty postupně budou $1{,}05$, $1{,}05$ a $1{,}37$. V případě vítězství strany L (situace s_2) tyto hodnoty postupně budou $0{,}95$, $1{,}05$ a $1{,}42$. Dva investoři (označme je **Y** a **Z**) chtějí do jednotlivých aktiv investovat. Investor **Y** chce do půdy investovat 500\$, do dluhopisů 10 000\$ a do akcií 1 000\$. Druhý investor si chce půjčit u banky 2 000\$, ty chce pak rovným dílem investovat do nákupu půdy a akcií. Ve volbách se investoři rozhodnou pro tu stranu, jejíž vítězství bude pro ně znamenat vyšší zhodnocení jejich investic. Spočtěte hodnoty portfolia obou investorů po roce v obou situacích, které mohou nastat, a na základě toho určete, kterou ze stran budou investoři volit. **Příklad 4.33**

Řešení: Nejprve si uvědomme, že hodnoty ročních výnosů z investice do jedné jednotky aktiva a_i, kde $(i = 1, 2, 3)$, jestliže situace s_j, kde $(j = 1, 2)$ nastane, můžeme uložit do matice. Řádky této matice značí postupně aktiva: investice do půdy (P), investice do dluhopisů (D) a investice do akcií (A). Sloupce budou zachycovat postupně situace vítězství stran *K* a *L*. Tato matice $\mathbf{V} = (v_{ij})$, kterou označíme $\mathbf{V}$, bude matice typu 3×2 a budeme ji nazývat *výnosová matice*. Výnosová matice pro občany státu *X* (z předchozího textu) je $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1{,}05 & 0{,}95 \\ 1{,}05 & 1{,}05 \\ 1{,}37 & 1{,}42 \end{pmatrix}$. I hodnoty jednotlivých investic jednotlivých investorů (jejich portfolio) můžeme zapsat do matic typu 1×3. Portfolio pro investora **Y** bude $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 500 & 10\,000 & 1\,000 \end{pmatrix}$. Druhý investor investor si půjčil z banky. Druhá hodnota matice jeho portfolia bude tedy záporná. Portfolio druhého investora je $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1\,000 & -2\,000 & 1\,000 \end{pmatrix}$. Abychom vypočítali hodnoty portfolia obou investorů po roce v obou situacích, které mohou nastat, musíme spočítat součiny $\mathbf{YV}$ a $\mathbf{ZV}$. Než vypočítáme součin $\mathbf{YV}$, rozmyslíme si, jakého typu bude výsledná matice. $\mathbf{Y}$ je matice typu 1×3, matice $\mathbf{V}$ je typu 3×2. Součin $\mathbf{YV}$ bude existovat a výsledná matice je typu 1×2.

$$\begin{aligned} \mathbf{YV} &= \begin{pmatrix} 500 & 10\,000 & 1\,000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}05 & 0{,}95 \\ 1{,}05 & 1{,}05 \\ 1{,}37 & 1{,}42 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12\,395 & 12\,395 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vidíme, že obě složky výsledné matice jsou stejné. To znamená, že výsledná hodnota portfolia je stejná, bez ohledu na to, jaká situace u voleb během roku nastane. Takové portfolio má název *bezrizikové portfolio*.

Portfolio druhého investota má druhou složku zápornou. Znamená to, že druhý investor si vypůjčil $-2\,000$\$ a tuto částku se stejným dílem rozhodl investovat do nákupu půdy a nákupu akcií. Tato situace vyjadřuje, že součet hodnot jeho portfolia je roven nule. Spočtěme hodnotu portfolia druhého investora po roce pro obě možné situace po volbách.

$$\mathbf{ZV} = \begin{pmatrix} 1\,000 & -2\,000 & 1\,000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,05 & 0,95 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,37 & 1,42 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 320 & 270 \end{pmatrix}.$$

Uvědomte si, že v tomto případě druhý investor po roce sice bude dlužit bance více (totiž $-2\,000 \cdot 1,05 = 2\,100\$$ v obou možných situacích) a v obou možných situacích, které po volbách mohou nastat, druhý investor vydělá. A jelikož jeho zisk bude v případě vítězství strany K vyšší, bude preferovat vítězství této strany ve volbách.

Portfolio, které má nulovou hodnotu a nemůže být ztrátové a alespoň v jedné situaci, které mohou nastat, je ziskové (má kladnou hodnotu), se nazývá *arbitrážní portfolio*.

Věta 4.1.27. *Pro arbitážní portfolio* $\mathbf{Y} = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)$ *platí* $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$ *a* $y_i \geq 0$ *pro* $i = 1, 2, \dots, n$ *a alespoň pro jedno* i*, kde* $i = 1, 2, \dots, n$*, je* $y_i > 0$.

4.2 Cvičení

4.2.1. Vypočtěte matici C zadanou vztahem $C = 2A - 5B$, kde jsou zadané matice $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2.2. Vypočtěte matici C zadanou vztahem $C = B - 4A$, kde jsou zadané matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2.3. Vypočtěte matici C zadanou vztahem $C = 2(A + B)$, kde jsou zadané matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -13 \\ -5 & -8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

4.2.4. Vypočtěte matici $B = A + 4I$, kde $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4.2.5. Vypočtěte neznámé x, y, z, když víte, že platí rovnost matic $B = A$, kde matice $A = \begin{pmatrix} 3x & 2 - z \\ 7y - 2 & -3 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} 5 - 2x & z + 5 \\ 3 - y & -3 \end{pmatrix}$.

4.2.6. K matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ zapište matici A^T.

Vypočtěte součiny následujících matic

4.2.7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.8. $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.9. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.10. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4.2.11. $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

4.2.12. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.13. $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4.2.14. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

4.2.15. Vypočtěte součiny AA^T a A^TA , kde $A = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2.16. Ověřte, zda platí $(AB)^T = B^TA^T$, kde matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ a matice $B = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4.2.17. Vypočtěte matici $C = AB - BA$, kde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Vypočtěte součiny AB a BA, pokud existují.

4.2.18. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 11 & 5 & 8 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 12 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

4.2.19. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}$

4.2.20. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 11 & 5 & 8 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 12 & 2 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

4.2.21. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 7 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

4.2.22. Vypočtěte A^2 , kde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \\ 11 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4.2.23. Nalezněte prvky matice A tak, aby součin AB, kde $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, byl roven nulové matici řádu dva.

4.2.24. Matice A je typu 3×4 a matice D je typu 5×4. Určete typ matice B, jestliže víte, že platí $BA = D$.

4.2.25. Matice A je typu 2×4 a matice D je typu 2×3. Určete typ matic B a C, jestliže víte, že platí $AB - 3C = D$.

4.2.26. Matice A je typu 5×2 a matice D je typu 3×5. Určete typ matice B, jestliže víte, že platí $(AB)^T = D$.

4.2.27. Matice A je typu 2×3 a matice C je typu 4×5. Určete typ matic B a D, jestliže víte, že platí $ABC = D$.

4.2.28. Matice A je typu 5×3 a matice D je typu 2×4. Určete typ matic B a C, jestliže víte, že platí $AB = CD$.

Určete hodnosti následujících matic.

4.2.29. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

4.2.30. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \\ -5 & 17 & -4 & 37 \end{pmatrix}$

4.2.31. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4.2.32. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -12 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

4.2.33. $\begin{pmatrix} -8 & -4 & -4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

4.2.34. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.2.35. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

4.2.36. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4.2.37. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.38. $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

4.2.39. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.40. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

4.2.41. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

4.2.42. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

4.2.43. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.44. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

Určete, zda následující matice jsou regulární či singulární.

4.2.45. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -4 & 2 \\ -10 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

4.2.46. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.47. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.48. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 11 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

4.2.49. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.50. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.51. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 13 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ -6 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.52. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4.2.53. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.2.54. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -7 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.55. Nalezněte inverzní matici k matici $A = (-5)$.

Nalezněte inverzní matice k následujícím maticím.

4.2.56. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

4.2.57. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

4.2.58. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

4.2.59. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

4.2.60. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

4.2.61. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Nalezněte inverzní matice k následujícím maticím.

4.2.62. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.63. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

4.2.64. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.2.65. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.66. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.67. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.68. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.69. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.70. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.71. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

4.2.72. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

4.2.73. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.74. Pro matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ vypočtěte součin $B^{-1}A^{-1}$. Dále vypočtěte $(AB)^{-1}$ a oba výsledky porovnejte.

4.2.75. Vypočtěte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 6 & -10 \end{pmatrix}$.

4.2.76. Přesvědčte se, že platí $(A^{-1})^{-1} = A$, kde $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2.77. Nalezněte matici B, pro kterou platí $BA = I$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2.78. Z rovnice $XA = B + C$ vyjádřete matici X.

4.2.79. Z rovnice $BXA = B + CA$ vyjádřete matici X.

4.2.80. Z rovnice $BX + 2X = C$ vyjádřete matici X.

4.2.81. Z rovnice $BX + B^2 = AC$ vyjádřete matici X.

4.2.82. Nalezněte matici X, která vyhovuje rovnici $BX = BAC$, kde známé matice jsou $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4.2.83. Nalezněte matici X, která vyhovuje rovnici $BXA = C$, kde matice A, B, C jsou $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2.84. Nalezněte matici X, která vyhovuje rovnici $XA = B$, kde matice A, B jsou $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.2.85. Nalezněte matici X, která vyhovuje rovnici $A^TXB = C$, kde matice A, B, C jsou $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

4.2.86. Nalezněte matici X, která vyhovuje rovnici $XA = B - 3I$, kde matice A, B jsou $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2.87. Nalezněte matici X, která vyhovuje rovnici $AX = B$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4.2.88. Zašifrujte zprávu „lineární algebra“ pomocí matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

4.2.89. Pomocí matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ zašifrujte zprávu „Matice je v Gaussově tvaru“.

4.2.90. Pomocí matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ byla zašifrována zpráva do tvaru: 126 127 93 116 85 97 108 64 93 83 75 61 87 51 77 16 17 13. Odšifrujte tuto zprávu.

4.2.91. Pomocí matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ byla zašifrována zpráva do tvaru: 74 87 64 125 140 168 64 97 52 39 82 65 30 54 10 25 40 65 72 54 38 46 90 141 74 59 64 97. Odšifrujte tuto zprávu.

4.2.92. Předpokládejme, že investor může investovat do tří různých aktiv a mohou nastat tři možné situace vývoje investic. Nechť výnosová matice je

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,9 & 1,0 \\ 1,1 & 1,1 & 1,1 \\ 1,2 & 1,15 & 1,25 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že matice $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1\,000 & -5\,000 & 4\,000 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & -5\,000 & 5\,000 \end{pmatrix}$ jsou arbitrážní portfolia. Které z těchto dvou portfolií zajistí vyšší výnosy investorům?

4.2.93. Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Nalezněte permutační matici P a součin matice A s touto permutační maticí P tak, aby součin byla matice, ve které první a čtvrtý sloupec jsou stejné jako v matici A a druhý a třetí sloupec jsou s maticí A prohozené.

4.2.94. Bezpečnostní službou jistého státu byla vytvořena síť tajných agentů. Tito agenti se vzájemně neznají, zprávy si nechávají na předem domluvených místech. Pět agentů pro jednoduchost označme A, B, C, D, E. Agent A předává zprávy agentu B a E. Agent B nechává zprávy agentům C a D. Agent C dodává zprávy agentu A. Agent D předává informace agentu B a agent E dodává informace agentu D. Zapište vztahy mezi agenty maticí X s prvky 1 (agent v řádku předává informace agentu ve sloupci) a 0 (agent v řádku nedodává informace agentu ve sloupci). Vypočtěte a interpretujte matice $X^2, X + X^2, X^3$.

Výsledky cvičení

4.2.1 $C = \begin{pmatrix} -30 & 43 & 7 \\ -21 & 16 & 16 \end{pmatrix}$ **4.2.2** Součin neexistuje, počet sloupců první matice není stejný jako počet řádků druhé matice. **4.2.3** $\begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 4 & -22 \\ -20 & -16 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ **4.2.4** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2.5 $x = 1, y = \frac{5}{8}, z = -\frac{3}{2}$. **4.2.6** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

4.2.7 $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **4.2.8** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **4.2.9** $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -13 & 2 \\ -5 & -10 \\ -1 & 1 \\ -14 & 3 \end{pmatrix}$

4.2.10 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 8 \\ -3 & -2 & -8 & 4 \\ 2 & -10 & -6 & 20 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ **4.2.11** $\begin{pmatrix} 3 & -37 \\ -9 & 55 \end{pmatrix}$

4.2.12 $\begin{pmatrix} 1 & -14 & -14 & 65 & 25 \\ -5 & 0 & 35 & -10 & -20 \\ -3 & -8 & 17 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ **4.2.13** $\begin{pmatrix} -10 & 10 & 10 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 35 \\ 8 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

4.2.14 $\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 10 & -2 \\ 24 & -14 \end{pmatrix}$ **4.2.15** $AA^T = \begin{pmatrix} 66 & 3 \\ 3 & 102 \end{pmatrix}$,

$A^TA = \begin{pmatrix} 50 & 1 & 8 & -27 \\ 1 & 37 & -48 & -10 \\ 8 & -48 & 64 & 8 \\ -27 & -10 & 8 & 17 \end{pmatrix}$ **4.2.16** Rovnost platí.

4.2.17 $C = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -25 & 5 \end{pmatrix}$ **4.2.18** $AB = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 99 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, součin matic BA neexistuje.

4.2.19 $AB = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -65 & -25 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -15 \\ -26 & -25 \end{pmatrix}$ **4.2.20** Součin matic AB neexistuje, $BA = \begin{pmatrix} 31 & 13 & 22 & 25 \\ -5 & 22 & 41 & 30 \\ 70 & -31 & 53 & 59 \end{pmatrix}$. **4.2.21** $AB = \begin{pmatrix} -41 & 29 \\ -90 & 31 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -15 & 12 & 42 \\ -21 & 7 & 28 \\ -26 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. **4.2.22**$A^2 = \begin{pmatrix} 40 & 3 & -14 \\ 27 & -3 & -26 \\ -49 & 8 & 55 \end{pmatrix}$ **4.2.23**$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.2.24 Matice B je typu 5×3. **4.2.25** Matice B je typu 4×3, C je typu 2×3. **4.2.26** Matice B je typu 2×3. **4.2.27** Matice B je typu 3×4, matice D je typu 2×5. **4.2.28** Matice B je typu 3×4, matice C je typu 5×2. **4.2.29** $h = 2$ **4.2.30** $h = 2$ **4.2.31** $h = 2$ **4.2.32** $h = 1$ **4.2.33** $h = 1$ **4.2.34** $h = 3$ **4.2.35** $h = 3$ **4.2.36** $h = 4$ **4.2.37** $h = 4$ **4.2.38** $h = 6$ **4.2.39** $h = 2$ **4.2.40** $h = 3$ **4.2.41** $h = 3$ **4.2.42** $h = 2$ **4.2.43** $h = 4$ **4.2.44** $h = 3$ **4.2.45** singulání **4.2.46** singulání **4.2.47** regulání **4.2.48** singulání **4.2.49** singulání **4.2.50** regulární **4.2.51** singulání**4.2.52** regulání **4.2.53** regulání **4.2.54** regulání **4.2.55** $A^{-1} = -\frac{1}{5}$ **4.2.56** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **4.2.57** $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

4.2.58 $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **4.2.59** Inverzní matice neexistuje, protože daná matice není regulární. **4.2.60** $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **4.2.61** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ **4.2.62** $A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -12 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & -6 \\ 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **4.2.63** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4.2.64** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.2.65** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4.2.66 $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **4.2.67** $A^{-1} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 12 & 1 & 7 \\ 16 & 5 & -9 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ **4.2.68** $A^{-1} = -\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -11 & -6 & 13 \\ -2 & 1 & -6 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ **4.2.69** $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

4.2.70 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ **4.2.71** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

4.2.72 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **4.2.73** $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.74 $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 & 15 & 13 \\ -7 & -6 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.2.75 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **4.2.76** Rovnost platí pro jakoukoli matici, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -11 \\ 3 & 7 & 18 \\ -5 & -15 & -35 \end{pmatrix}$ **4.2.77** $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4.2.78 $X = (B+C)A^{-1}$ **4.2.79** $X = B^{-1}(B+C)A^{-1} = A^{-1} + B^{-1}C$
4.2.80 $X = (B+2I)^{-1}C$ **4.2.81** $X = B^{-1}(AC - B^2) = B^{-1}AC - B$
4.2.82 $X = AC = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$ **4.2.83** Hledaná matice je $X = B^{-1}CA^{-1}$, $X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$. **4.2.84** Hledaná matice je $X = BA^{-1}$, $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
4.2.85 Hledaná matice je $X = (A^T)^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **4.2.86** $X = (B - 3I)A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$ **4.2.87** $X = (A^TA)^{-1}A^TB = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$ **4.2.88** Zašifrovaná zpráva je: $-2 \quad -15 \quad 39 \quad -13 \quad -9 \quad -34 \quad 14 \quad -19 \quad 87 \quad -6 \quad 10 \quad 42 \quad -13 \quad -8 \quad -29 \quad 1 \quad -2 \quad 3$. **4.2.89** Zašifrovaná zpráva je: 20 47 −5 25 26 10 5 15 15 22 22 44 1 36 −12 61 72 42 71 49 32 81 63 63 75 57 60 **4.2.90** Odšifrovaná zpráva zní: singulární matice. **4.2.91** Odšifrovaná zpráva zní: inverzní matice je regulární.
4.2.92 Protože portfolio $\mathbf{Y}$ má nulový součet hodnot a součin $\mathbf{YV} = \begin{pmatrix} 250 & 0 & 500 \end{pmatrix}$, má všechny hodnoty nezáporné a alespoň jednu kladnou, je $\mathbf{Y}$ arbitrážní portfolio. Stejně portfolio $\mathbf{Z}$ má součet všech hodnot nula. Protože součin $\mathbf{ZV} = \begin{pmatrix} 500 & 250 & 750 \end{pmatrix}$ má dokonce všechny hodnoty kladné, je $\mathbf{Z}$ také arbitrážní portfolio. A protože každá ze složek vektoru $\mathbf{ZV}$ je větší než odpovídající složka vektoru $\mathbf{YV}$, investor s portfoliem $\mathbf{Z}$ bude mít vyšší výnosy. **4.2.93** Matice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, součin AP. **4.2.94** Matice X je následující:

$$\begin{array}{rc} & \text{zprávy komu} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \text{zprávy od koho} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretace: V matici X^2 nenulová hodnota značí počet možností, kterými má agent v řádku možnost předat zprávu agentu ve sloupci přes jiného agenta. V matici X^3 nenulová hodnota značí počet možností, kterými má agent v řádku možnost předat zprávu agentu ve sloupci postupně přes dva jiné agenty. Nenulové diagonální prvky značí počty možností, kterými může agent obdržet odpověď na svou zprávu odeslanou ještě přes jednoho agenta.

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Determinant matice

4.3.1 Permutace, determinanty

V této kapitole se dozvíme, že v každé čtvercové matici je ukryté ještě jiné číslo než jen hodnost matice. Toto číslo budeme nazývat determinant matice. Jedná se spíše o teoretický pojem, a proto konkrétní aplikační úvahu pro odvození tohoto čísla v této kapitole vynecháme. Jak ale později uvidíme, bude nám tento teoretický pojem užitečný i k řešení konkrétnějších úloh. Determinant matice nám například prozradí, zda je matice regulární nebo singulární, poslouží nám k nalezení řešení jistého typu soustav lineárních rovnic, naučíme se pomocí determinantu matice vypočítat inverzní matici. Než zavedeme pojem determinant matice, zopakujeme si pojmy, které se v jeho definici vyskytují. Jsou to pojmy: permutace, inverze permutace a znaménko permutace.

Definice 4.3.1. *Permutací* množiny čísel $\{1,\,2,\,\ldots,\,n\}$ budeme rozumět každou uspořádanou n-tici $\big(p(1),p(2),\ldots,p(n)\big)$ z čísel $1,\,2,\,\ldots,\,n$, kde se žádné z čísel neopakuje. *Inverzí permutace* p budeme rozumět každou dvojici $i,\,j$ přirozených čísel z množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, pro kterou platí $i<j$ a $p(i)>p(j)$. Permutaci budeme nazývat *lichou*, jestliže počet všech jejích inverzí je liché číslo. Permutaci budeme nazývat *sudou*, jestliže počet všech jejích inverzí je sudé číslo. *Znaménkem permutace* p budeme rozumět číslo $\operatorname{sign}(p)=(-1)^{\mathrm{inv(p)}}$, kde symbolem $\mathrm{inv(p)}$ značíme počet všech inverzí permutace p.

Často používáme pro permutaci následující zápis

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Počet všech permutací z n prvků je roven $n!$ a množinu všech permutací množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ budeme značit symbolem P_n. Počet všech inverzí permutace p budeme značit $\mathrm{inv(p)}$. Je-li tedy permutace lichá, její znaménko je $(-1)^{\mathrm{inv(p)}}=-1$. Je-li permutace sudá, její znaménko je $(-1)^{\mathrm{inv(p)}}=1$.

Příklad 4.34

4.34. Zjistěte znaménko permutace

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vypišme všechny dvojice i,j přirozených čísel z množiny $\{1,2,3,4\}$, pro které platí $i<j$ a k nim odpovídající $p(i),p(j)$

- $\{i,j\}$ $\{p(i),p(j)\}$,
- $\{1,2\}$ $\{4,3\}$, protože $4>3$, toto je inverze,
- $\{1,3\}$ $\{4,2\}$, protože $4>2$, toto je inverze,
- $\{1,4\}$ $\{4,1\}$, protože $4>1$, toto je inverze,
- $\{2,3\}$ $\{3,2\}$, protože $3>2$, toto je inverze,
- $\{2,4\}$ $\{3,1\}$, protože $3>1$, toto je inverze,
- $\{3,4\}$ $\{2,1\}$, protože $2>1$, toto je inverze.

Daná permutace má šest inverzí, je tedy sudá a její znaménko je 1.

Definice 4.3.2. *Determinantem* n-tého řádu čtvercové matice A řádu n budeme rozumět výraz

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p \in P_n} \operatorname{sign}(p) \cdot a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}.$$

Z každého řádku a každého sloupce vybereme vždy jeden prvek, tyto prvky mezi sebou vynásobíme a vynásobíme je ještě znaménkem permutace na sloupce. Determinant čtvercové matice je pak číslo, které dostaneme jako součet všech takových součinů přes všechny možné permutace na sloupce.

Z této definice plyne, že pokud má matice celý jeden řádek resp. sloupec nulový, je determinant takové matice roven nule. V takovém případě je alespoň jeden prvek v součinech $a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$ nulový a pak je nulový i součin takových prvků. Nakonec součet nulových hodnot je nula. Navíc si uvědomte, že čtvercová matice, která má jeden řádek, resp. sloupec, celý nulový, je singulární matice.

Rozeberme postupně případy výpočtu determinantu matice, ve kterých budeme postupně zvětšovat řád matice n.

Výpočet determinantu matice řádu $n = 1$

Jestliže $n = 1$, tj. $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, má matice jeden sloupec a permutace na sloupce existuje jediná.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tato permutace má znaménko 1. Z toho plyne, že determinant matice řádu 1 je roven hodnotě a_{11}. Jinak $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

Pozor!
Při označení determinantu matice řádu 1, tj. $|a_{11}|$, si neplet'te značení determinantu s absolutní hodnotou čísla a_{11}.

Výpočet determinantu matice řádu $n = 2$

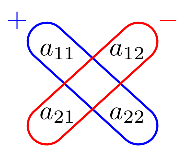
Jestliže $n = 2$, tj. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, má matice dva sloupce a permutace na sloupce existují dvě (2!).

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

První permutace nemá žádnou inverzi, její znaménko je $\operatorname{sign}(p_1) = (-1)^0 = 1$. Druhá permutace má jednu inverzi, její znaménko je $\operatorname{sign}(p_2) = (-1)^1 = -1$. Podle definice máme

$$\det A = 1 \cdot a_{11}a_{22} + (-1) \cdot a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pro výpočet determinantu matice řádu dvě stačí vypočítat rozdíl součinu prvků na hlavní diagonále a součinu prvků na vedlejší diagonále. Toto pravidlo budeme nazývat *křížové pravidlo*. Názorně si můžeme v matici řádu dva křížové pravidlo zobrazit následovně.



Příklad 4.35

4.35. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Podle křížového pravidla je $\det A = 3 \cdot (-2) - (-5) \cdot 1 = -6 + 5 = -1$.

Výpočet determinantu matice řádu $n = 3$

Jestliže $n = 3$, tj. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, potom má matice tři sloupce a permutací na sloupce existuje šest (3!).

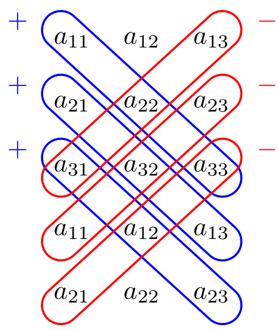
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

První tři permutace mají sudý počet inverzí, jejich znaménko je 1. Druhé tři permutace mají lichý počet inverzí, jejich znaménko je -1. Podle definice máme

$$\begin{aligned} \det A =& 1 \cdot a_{11}a_{22}a_{33} + 1 \cdot a_{21}a_{32}a_{13} + 1 \cdot a_{31}a_{12}a_{23} + \\ &+ (-1) \cdot a_{31}a_{22}a_{13} + (-1) \cdot a_{11}a_{32}a_{23} + (-1) \cdot a_{21}a_{12}a_{33} \\ =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

Toto pravidlo budeme nazývat *Sarrusovo pravidlo*. Schematicky si můžeme Sarrusovo pravidlo zobrazit na následujícím obrázku. Pod matici sepíšeme první dva řádky a pak sčítáme součiny prvků na hlavní diagonále a dalších dvou diagonálách pod ní a od toho odečítáme součiny na třech diagonálách pod sebou v opačném směru.



Příklad 4.36

4.36. Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: K výpočtu tohoto determinantu matice řádu tři použijeme Sarrusova pravidla. Opíšeme pod matici první dva řádky a budeme sčítat součiny modrých prvků na diagonálách a od toho odečítat součiny červených prvků na diagonálách v opačném směru.

$$\begin{array}{rrr} \color{blue}{2} & 0 & -3 \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{-1} & 4 \\ \color{blue}{5} & \color{blue}{6} & \color{blue}{3} \\ 2 & \color{blue}{0} & \color{blue}{-3} \\ 1 & -1 & \color{blue}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 2 & 0 & \color{red}{-3} \\ 1 & \color{red}{-1} & \color{red}{4} \\ \color{red}{5} & \color{red}{6} & \color{red}{3} \\ \color{red}{2} & \color{red}{0} & -3 \\ \color{red}{1} & -1 & 4 \end{array}$$

Tím dostaneme následující rovnosti.

$$\begin{aligned}\det A &= 2\cdot(-1)\cdot 3 + 1\cdot 6\cdot(-3) + 5\cdot 0\cdot 4 - 5\cdot(-1)\cdot(-3) - 2\cdot 6\cdot 4 - 1\cdot 0\cdot 3\\ &= -6 - 18 + 0 - 15 - 48 - 0\\ &= -87\end{aligned}$$

Výpočet determinantu matice řádu $n \geq 4$

Jestliže řád matice je $n \geq 4$ nepočítáme determinant podle definice a z toho odvozeného nějakého jednoduchého pravidla. Jen pro matice řádu $n = 4$ je permutací všech čtyř sloupců $4! = 24$, pro matice řádu $n = 5$ je permutací všech pěti sloupců $5! = 120$ atd. V těchto případech (pro matice vyšších řádů než 3) počítáme determinanty matic s využitím vlastností determinantů. Uveď me tyto vlastnosti.

Věta 4.3.3 (Vlastnosti determinantů matic)**.** *Nechť A je čtvercová matice, pak platí*

1) *je-li A horní trojúhelníková matice, determinant matice A je roven součinu prvků na diagonále,*
2) $\det A^T = \det A$*; (A^T je transponovaná matice k matici A),*
3) *jestliže matice B vznikne z matice A přičtením jistého $r-$násobku některého řádku (sloupce) ($r \neq 0$) k řádku (sloupci) jinému, pak* $\det B = \det A$*,*
4) *jestliže matice B vznikne z matice A vynásobením nějakého řádku (sloupce) číslem r, pak* $\det B = r\cdot\det A$*,*
5) *jestliže matice B vznikne z matice A záměnou dvou řádků (sloupců), pak platí* $\det B = -\det A$*,*
6) $\det A = 0$ *právě, když je matice A singulární.*

Ukažme na následujících příkladech, jak můžeme použít těchto vlastností k výpočtu determinantu matice většího řádu než tři.

Příklad 4.37

4.37. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Řešení: Zadaná matice je horní trojúhelníková matice. Podle první vlastnosti v uvedené větě můžeme determinant této matice spočítat jako součin prvků na hlavní diagonále.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)\cdot 3\cdot 4 = 24$$

Příklad 4.38

4.38. Vypočtěte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -3\\ 2 & -1 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

Řešení: Na matici A budeme provádět takové úpravy, abychom ji upravili na matici horní trojúhelníkovou. Používat budeme jen úpravy uvedené v předešlé větě, abychom nezměnili hodnotu determinantu matice A. Již z příkladů, ve kterých jsme převáděli matice na matice v Gaussově tvaru, víme, že je výhodné mít v prvním řádku a prvním sloupci jedničku. Toho v zadané matici docílíme například tím, že vyměníme první a třetí řádek. Tato operace by však změnila znaménko determinantu. Proto před determinant matice s přehozenými řádky zapíšeme mínus.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Nyní již bude jednoduché v prvním sloupci pod diagonálou vytvořit nuly. Stačí k druhému řádku přičíst mínus dvojnásobek prvního řádku, ke třetímu řádku přičíst mínus trojnásobek prvního řádku a ke čtvrtému řádku mínus dvojnásobek prvního řádku. Všechny tyto operace nemění hodnotu determinantu matice.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Dále pro nás bude výhodné vyměnit druhý a čtvrtý sloupec. Tím se opět změní znaménko determinantu. Poté začneme nulovat druhý sloupec pod diagonálou pomocí naznačené úpravy za determinantem.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -17 & 38 \end{vmatrix}$$

Nyní stačí provést takovou úpravu, aby se z prvku ve třetím sloupci pod diagonálou stala nula. K tomu potřebujeme nejprve čtvrtý sloupec vynásobit pěti a pak k pětinásobku čtvrtého řádku přičíst sedmnáctinásobek třetího řádku. Vynásobíme-li řádek, ve kterém budujeme nulu pěti, determinant takto vzniklé matice bude pětkrát větší (vlastnost 4). Abychom neměli determinant pětkrát větší, determinant nově vzniklé matice vynásobíme jednou pětinou.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & -17 & 38 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ | \cdot 5 \end{matrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \end{vmatrix}$$

Získali jsme horní trojúhelníkovou matici, jejíž determinant spočítáme jako součin prvků na diagonále.

$$\det A = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 54 = 54$$

Na závěr poznamenejme, že posloupnost úprav, kterými jsme z dané matice získali horní trojúhelníkovou matici, není dána jednoznačně. Mohli jsme například úpravy začít tím, že bychom přehodili první a druhý sloupec, abychom v prvním řádku a prvním sloupci získali jedničku a teprve pak jsme mohli začít vhodnými úpravami získávat pod diagonálou nuly. Tedy cest, kterými lze získat horní trojúhelníkovou matici, je mnoho. Hodnota determinantu je však určena jednoznačně.

Příklad 4.39

4.39. Pomocí determinantu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ zjistěte, zda je matice A regulární.

Řešení: Podle šesté vlastnosti předchozí věty víme, že pokud bude determinant zadané matice nulový, je daná matice singulární. V opačném případě je zadaná matice regulární. Výpočet determinantu zadané matice začneme přehozením prvního a druhého řádku. Tím dostaneme do prvního řádku a prvního sloupce číslo jedna, aby se ale nezměnila hodnota determinantu, musíme před determimant matice s přehozenými řádky psát mínus.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Pro vynulování prvního sloupce pod diagonálou budeme postupovat podle naznačených úprav na řádky matice. Tyto úpravy nemění hodnotu determinantu matice.

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Pro vynulování druhého sloupce pod diagonálou provedeme naznačené úpravy na druhý řádek.

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tato matice má dokonce dva nulové řádky a determinant takové matice je roven nule. Pomocí determinantu matice jsme zjistili, že zadaná matice je singulární.

V tomto případě jsme mohli danou úlohu vyřešit ještě jinak. Stačilo si všimnout, že prvky ve čtvrtém sloupci jsou všechny násobky dvou. Pak podle čtvrté vlastnosti determinantů matic můžeme číslo 2 z matice vytknout. Platí

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nyní vidíme, že ve vzniklé matici je druhý sloupec mínus jednanásobek čtvrtého sloupce. Taková matice je singulární a její determinant je roven nule. Pak je roven nule i deteminant zadané matice a zadaná matice je tady singulární.

Než uvedeme další vlastnost determinantů, zavedeme značení. Symbolem A_{ij} budeme označovat matici, která vznikne z matice A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce. Tedy pokud matice A je čtvercová matice řádu n, tak A_{ij} je matice řádu $n-1$.

Definice 4.3.4. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. *Algebraický doplněk* a^*_{ij} prvku a_{ij} budeme nazývat číslo $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$, kde matice A_{ij} je matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta 4.3.5 (Rozvoj determinantu podle řádku resp. sloupce)**.** *Nechť A je čtvercová matice řádu n, pak platí*

a) (rozvoj podle $i-$tého řádku matice A)

$\det A = a_{i1}a^*_{i1} + a_{i2}a^*_{i2} + \cdots + a_{in}a^*_{in},$

neboli

$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\det A_{in}$

b) (rozvoj podle $j-$tého sloupce matice A)

$\det A = a_{1j}a^*_{1j} + a_{2j}a^*_{2j} + \cdots + a_{nj}a^*_{nj},$

neboli

$\det A = (-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}\det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det A_{nj}$

Z této vlastnosti plyne, že determinant matice řádu n můžeme spočítat jako součet jistých násobků n determinantů matic řádu $n-1$. Ukažme si použití této vlastnosti na dalším příkladě.

Příklad 4.40

4.40. Pomocí rozvoje podle prvního sloupce vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: K výpočtu determinantu tentokrát použijeme uvedenou vlastnost. Rozvíjet budeme podle prvního sloupce. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{4+1} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Determinant matice řádu 4 jsme rozepsali na součet čtyř jistých násobků determinantů matic řádu 3. Každý z těchto determinantů můžeme spočítat Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= (-2) \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &\quad - 0 \cdot 2 \cdot 0 - (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \cdot 3 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) \\ &\quad - 0 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot 0 \\ &\quad - 0 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \cdot 0 \\ &\quad - (-2) \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \cdot (-1) \\ &= -5 \end{aligned}$$

Dosadíme-li všechny vypočtené hodnoty determinantů matic řádu tři do rozvoje determinantu zadané matice, dostaneme

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot(-4) + (-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot 21 \\ &\quad + (-1)^{3+1}\cdot 3\cdot 19 + (-1)^{4+1}\cdot(-2)\cdot(-5) \\ &= -8+21+57-10 \\ &= 60.\end{aligned}$$

Kdybychom tento determinant počítali jakoukoli jinou metodou nebo rozvojem podle jiného řádku nebo sloupce, musíme dostat samozřejmě stejnou hodnotu. Z příkladu je vidět, že je k výpočtu determinantu rozvojem podle určitého řádku či sloupce výhodné vybrat řádek či sloupec, který obsahuje nejvíce nulových prvků. Pokud v determinantu žádné nulové prvky nejsou, bývá výhodné si nejprve v určitém řádku nebo sloupci nulové prvky nejprve „vyrobit“ a pak teprve počítat determinant pomocí rozvoje podle tohoto řádku či sloupce. Ukažme tento postup v následujícím příkladě. Budeme počítat determinant stejné matice.

4.41. Vypočtěte determinant matice **Příklad 4.41**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: V matici nejprve přehodíme první a druhý řádek a pak podle naznačených úprav vynulujeme první sloupec pod diagonálou.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \;\; \cdot 3 \;\; \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

Tento determinant nyní můžeme vypočítat rozvojem podle prvního sloupce.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{4+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ -8 & 5 & -1 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Z tohoto zápisu je vidět, že musíme vypočítat pouze první determinant matice řádu tři. Ostatní sčítance v tomto rozvoji budou nulové.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -8 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0$$
$$\begin{aligned} &= -\,[(-3) \cdot 5 \cdot 3 + (-8) \cdot (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) \cdot 4 \\ &\quad - 4 \cdot 5 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-3) \cdot (-1) - (-8) \cdot 5 \cdot 3] \\ &= -\,60 \end{aligned}$$

Na závěr dostaneme

$$\det A = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -(-60) = 60.$$

Příklad 4.42

4.42. Určete, pro kterou hodnotu reálného parametru t je matice

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 & t \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

singulární.

Řešení: Singulární matice je právě tehdy, když je její determinant roven nule. Pak pro neznámou t musíme vyřešit rovnici

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 & t \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hodnotu determinantu vypočteme rozvojem podle čtvrtého řádku.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 & t \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)^{4+3} 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$\begin{aligned} &+ (-1)^{4+4}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & t \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^7[(-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot t \\ &\quad - 1 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \cdot t - 0 \cdot 1 \cdot (-1)] \\ &\quad + (-1)^8(-1)[(-1) \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot t + 1 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &\quad - 1 \cdot 1 \cdot t - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 0] \\ &= 1 - t \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici $1 - t = 0$, jejímž řešením je $t = 1$. Zjistili jsme, že daná matice má determimant roven nule pro $t = 1$. Protože víme, že nulový determinant mají jedině singulární matice, můžeme také odpovědět na otázku, pro jakou hodnotu reálného parametru t je daná matice $A(t)$ singulární. Matice $A(t)$ je singulární pro $t = 1$.

V následující části ještě uvedeme, jak je možno využít determimantů k výpočtu inverzní matice.

4.3.2 Výpočet inverzní matice pomocí determinantů, adjungovaná matice

Než si uvedeme vlastnost, kterou můžeme užít k určování inverzní matice, zavedeme některé pojmy.

Definice 4.3.6. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. *Adjungovanou maticí* k matici A budeme nazývat matici $\mathrm{Adj}\, A = (a^*_{ij})^n_{ij=1}$, kde a^*_{ij} jsou algebraické doplňky prvků a_{ij}.

Věta 4.3.7 (Výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je regulární čtvercová matice řádu n. Potom platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\mathrm{Adj}\, A)^T .$$

Ukažme použití uvedené vlastnosti pro výpočet inverzní matice na následujícím příkladě.

Příklad 4.43

4.43. Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: K určení inverzní matice k matici A použijeme právě uvedenou vlastnost. Nejprve vyjádříme adjungovanou matici k matici A. Ze zadané matice řádu tři budeme postupně vynechávat určitý řádek a sloupec, čímž vzniknou matice řádu dva. Vynecháváme vždy ten řádek a sloupec, ve kterém leží prvek matice A. Determinanty takto vzniklých matic ještě vynásobíme znaménkem (totiž výraz $(-1)^{i+j}$ má hodnotu buď 1, nebo -1).

$$\begin{aligned}\mathrm{Adj}\, A &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Každý prvek adjungované matice $\mathrm{Adj}\, A$ jsme vypočítali křížovým pravidlem. Ještě zbývá spočítat determinant matice A. Protože matice A je matice řádu 3, můžeme její determinant spočítat Sarrusovým pravidlem.

$$\det A = 2 \cdot 9 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \cdot 4 - 1 \cdot 9 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 7 \cdot 3 = -3$$

Nyní už můžeme psát inverzní matici k matici A

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

O správnosti výsledku se samozřejmě můžeme přesvědčit zkouškou.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4.3.3 Charakteristická (vlastní) čísla matice

V této podkapitole uvedeme pojem ještě jednoho čísla, které souvisí se čtvercovou maticí a determinantem matice z matice A odvozené.

Definice 4.3.8. Nechť $A = (a_{i,j})$ je čtvercová matice řádu n. *Charakteristickým (vlastním) číslem* matice A budeme nazývat každé (i komplexní) číslo λ, které vyhovuje rovnici $\det(A-\lambda I) = 0$. Rovnice $\det(A-\lambda I) = 0$ se nazývá *charakteristická rovnice* matice A.

Příklad 4.44

4.44. Nalezněte charakteristická čísla matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Nejprve vyjádříme matici $A - \lambda I$.

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & -6 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determinant této matice 2×2 vypočteme křížovým pravidlem a položíme ho roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (-6)\cdot(-1) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Toto je kvadratická rovnice, která má kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 4$. Charakteristická čísla dané matice A jsou $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 4$.

Příklad 4.45

4.45. Nalezněte charakteristická čísla matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Řešení: Vypočteme matici $A - \lambda I$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

Determinant této matice spočteme rozvojem podle třetího řádku. Nejdříve ale provedeme úpravy na řádky a sloupce matice, pomocí nichž získáme ve třetím řádku nuly.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ \longleftarrow \quad |+ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

Víme, že v determinantu můžeme provádět úpravy i na sloupce. Místo druhého sloupce budeme psát součet druhého a třetího sloupce. Tato úprava matice hodnotu determinantu nezmění. Touto úpravou jsme získali matici, jejíž determinant lehce spočteme rozvojem podle třetího řádku.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -9 & -15 \\ 1 & -2-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (-1)^{3+1}(1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -9 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left[-8 + 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 9\right]\cdot(1-\lambda) \\ &= \left[1 - 2\lambda + \lambda^2\right]\cdot(1-\lambda) = (1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (1-\lambda)^3 = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = 1$$

Hledaná matice má pouze jeden trojnásobný kořen charakteristické rovnice, a to $\lambda = 1$. Daná matice A má jedno trojnásobné vlastní číslo $\lambda = 1$.

4.4 Cvičení

Vypočítejte následující determinanty.

4.4.1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ **4.4.2.** $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ **4.4.3.** $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ **4.4.4.** $\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Vypočítejte následující determinanty.

4.4.5. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$ **4.4.6.** $\begin{vmatrix} 1-x & x \\ x & 1+x \end{vmatrix}$ **4.4.7.** $\begin{vmatrix} \log x & -3 \\ \log y & 2 \end{vmatrix}$

Vypočítejte následující determinanty.

4.4.8. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.4.10.** $\begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 8 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ **4.4.12.** $\begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

4.4.9. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 6 & -6 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \end{vmatrix}$ **4.4.11.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ **4.4.13.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Vypočítejte následující determinanty.

4.4.14. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

4.4.15. $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{vmatrix}$

Vypočítejte následující determinanty.

4.4.16. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **4.4.21.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

4.4.17. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ **4.4.22.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & -4 \\ 4 & 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

4.4.18. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ **4.4.23.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

4.4.19. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ **4.4.24.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4.4.20. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ **4.4.25.** $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

4.4.26. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

4.4.27. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

4.4.28. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4.4.29. $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$

4.4.30. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

4.4.31. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & -3 & 9 \end{vmatrix}$

Pomocí determinantů rozhodněte, která z následujících matic je regulární a která singulární.

4.4.32. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4.4.33. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

4.4.34. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.4.35. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

4.4.36. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4.4.37. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$

4.4.38. Vypočítejte determinant matice $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{pmatrix}$

4.4.39. Rozhodněte, pro které λ má matice A nenulový determinant, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

K následujícím maticí nalezněte inverzní matice pomocí determinantů.

4.4.40. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

4.4.41. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

4.4.42. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4.4.43. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

4.4.44. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4.4.45. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

4.4.46. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

4.4.47. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.4.48. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

U následujících matic nalezněte charakteristická čísla.

4.4.49. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

4.4.50. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

4.4.51. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

4.4.52. $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

U následujících matic nalezněte charakteristická čísla.

4.4.53. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ **4.4.54.** $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ **4.4.55.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Výsledky cvičení

4.4.1 41 **4.4.2** 41 **4.4.3** 29 **4.4.4** 23 **4.4.5** 1 **4.4.6** $1-2x^2$ **4.4.7** $\log(x^2y^3)$ **4.4.8** 28 **4.4.9** -64 **4.4.10** -85 **4.4.11** -18 **4.4.12** 103 **4.4.13** -24 **4.4.14** $a^3+b^3+c^3-3abc$ **4.4.15** 1 **4.4.16** 158 **4.4.17** -8 **4.4.18** 231 **4.4.19** 234 **4.4.20** 20 **4.4.21** 119 **4.4.22** 23 **4.4.23** -22 **4.4.24** -69 **4.4.25** 150 **4.4.26** -10 **4.4.27** -6 **4.4.28** -3 **4.4.29** 10 **4.4.30** 27 **4.4.31** 674 **4.4.32** regulární **4.4.33** regulární **4.4.34** regulární **4.4.35** singulární **4.4.36** regulární **4.4.37** singulární **4.4.38** $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **4.4.39** pro žádné λ, matice je pro každé λ singulární **4.4.40** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ **4.4.41** $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **4.4.42** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **4.4.43** $\frac{1}{39}\begin{pmatrix} -2 & 11 & 25 \\ 11 & -2 & -1 \\ -5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ **4.4.44** $-\frac{1}{85}\begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 7 & -12 & -46 \\ -6 & -14 & 3 \end{pmatrix}$ **4.4.45** $-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7 & 1 & -9 \\ -9 & -2 & -5 \\ -10 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ **4.4.46** K této matici neexistuje inverzní matice, matice je singulární. **4.4.47** $-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -4 \\ -16 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ **4.4.48** $\begin{pmatrix} -3 & -10 & 2 \\ 5 & 16 & -3 \\ -3 & -9 & 2 \end{pmatrix}$ **4.4.49** $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$ **4.4.50** $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-2$ **4.4.51** $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=4$ **4.4.52** $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=8$ **4.4.53** $\lambda_{1,2,3}=-2$, **4.4.54** $\lambda_{1,2,3}=-3$, **4.4.55** $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$

4.5 Soustavy lineárních algebraických rovnic

Motivační úvaha I.

Uvažujme jednoduchý následující problém. V malé firmě se vyrábí tři typy výrobků (označme je A, B, C) a každý výrobek musí projít postupně třemi výrobními linkami (označme je I., II., III.). V následující tabulce máme uveden počet výrobních hodin potřebných pro práci na každém typu výrobku na každé z výrobních linek. Dále máme k dispozici informace o celkovém počtu výrobních hodin na každé výrobní lince. Na výrobní lince I. je to 380 hodin za týden, na výrobní lince II. je to 330 hodin za týden a na výrobní lince III. je to 120 hodin za týden.

	Druhy výrobků		
Výrobní linka	**A**	**B**	**C**
I.	0,5	1,0	1,5
II.	0,6	0,9	1,2
III.	0,2	0,3	0,5

Naším úkolem je zjistit, kolik výrobků každého z typů je možno týdně vyrobit, abychom využili maximálního počtu výrobních hodin na každé z výrobních linek.

Označme si počet výrobků typu A, které je možno týdně vyrobit, neznámou x_1, počet výrobků typu B vyrobených týdně x_2 a počet výrobků typu C x_3. Na výrobní lince I. počet hodin pro výrobu x_1 výrobků pak bude $0,5x_1$, pro výrobu x_2 výrobků bude $1,0x_2$ a pro výrobu x_3 výrobků bude $1,5x_3$. Obdobně budeme uvažovat i v případě dalších dvou výrobních linek. Vztahy, ze kterých můžeme určit naše neznámé pro každou z výrobních linek, jsou následující.

$$\begin{aligned} 0,5x_1 + 1,0x_2 + 1,5x_3 &= 380 \\ 0,6x_1 + 0,9x_2 + 1,2x_3 &= 330 \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 &= 120 \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Ze střední školy známe dvě možné metody řešení, a to metodu eliminační a metodu sčítací. K vyřešení naší soustavy použijeme druhou ze zmíněných metod. Nejprve si každou z rovnic vynásobíme deseti, abychom dostali celočíselné koeficienty před neznámými. Pak podle naznačených úprav za každou rovnicí budeme každou z rovnic násobit a následně sčítat. Násobky jsou voleny tak, aby ve druhé a třetí rovnici vypadla proměnná x_1. Tedy místo druhé rovnice píšeme součet mínus šestinásobku první rovnice a pětinásobku druhé rovnice. A místo třetí rovnice píšeme součet mínus dvojnásobku první rovnice a pětinásobku třetí rovnice.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 &= 3800 && |\cdot(-6)|\cdot(-2) \\ 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 &= 3300 && |\cdot 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1200 && |\cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 &= 3800 \\ -15x_2 - 30x_3 &= -6300 \\ -5x_2 - 5x_3 &= -1600 && |\cdot(-3) \end{aligned}$$

Nakonec stačí mínus trojnásobek třetí rovnice přičíst ke druhé rovnici a dostaneme soustavu rovnic, kde ze třetí rovnice velice jednoduše vypočteme neznámou x_3. Její hodnotu dosadíme do druhé rovnice a získáme rovnici pro jednu neznámou, totiž x_2. Nakonec známé hodnoty x_2 a x_3 dosadíme do první rovnice a dostaneme rovnici o jedné neznámé x_1 a tu jednoduše vyřešíme.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 &= 3800 \\ -15x_2 - 30x_3 &= -6300 \\ -15x_3 &= -1500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -15x_3 &= -1500 \Longrightarrow x_3 = 100 \\ -15x_2 - 30\cdot 100 &= -6300 \Longrightarrow -15x_2 = -3300 \Longrightarrow x_2 = 220 \\ 5x_1 + 10\cdot 220 + 15\cdot 100 &= 3800 \Longrightarrow 5x_1 = 100 \Longrightarrow x_1 = 20 \end{aligned}$$

Daná soustava rovnic měla právě jedno řešení: $x_1 = 20, x_2 = 220, x_3 = 100$. Vypočítali jsme, že pro využití maximálního počtu výrobních hodin na každé z výrobních linek budeme výrobků typu A vyrábět 20 týdně, výrobků typu B 220 týdně a výrobků typu C budeme vyrábět 100 týdně.

Zamysleme se teď nad řešením dané úlohy znovu. Zpětně se podíváme, jak jsme upravovali sčítací metodou danou soustavu rovnic. Jednotlivé rovnice jsme násobili a následně sčítali levé a pravé strany rovnic. Vše jsme dělali tak, aby po součtu násobků vždy dvou rovnic nově vzniklá rovnice měla o jednu neznámou méně. Všimněme si, že jsme vlastně pracovali pouze s koeficienty u neznámých. Samozřejmě, pokud jsme sčítali rovnice, sčítaly se koeficienty u stejných neznámých. Danou soustavu lineárních algebraických rovnic bychom mohli řešit také tak, že bychom pracovali pouze s koeficienty příslušných rovnic. Koeficienty si uspořádáme tak, že v jednom řádku budou koeficienty z jedné rovnice a v jednotlivých sloupcích budou koeficienty stojící vždy u stejné neznámé. Neboli koeficienty zapíšeme do matice, ve které řádky budou značit jednotlivé rovnice a sloupce budou jednotlivé neznámé v dané soustavě rovnic. Při sčítací metodě se měnily hodnoty i na pravé straně rovnic, proto budeme muset pracovat i s pravou stranou. Soustavy lineárních rovnic se naučíme řešit pomocí matic.

Motivační úvaha II.

Uveďme ještě jednu úvahu. Řešme teď následující soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešme tuto soustavu rovnic opět sčítací metodou. Podle naznačených úprav první rovnici budeme násobit mínus třemi a přičteme ji ke druhé rovnici a pak první rovnici budeme násobit mínus dvěma a přičteme ji ke třetí rovnici.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 | \cdot (-3) | \cdot (-2) \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_2 - 14x_3 &= 0 \\ -7x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Pokud nyní druhou rovnici vynásobíme mínus sedmi a třetí rovnici čtyřmi, dostaneme rovnici pouze s neznámou x_3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_2 - 14x_3 &= 0 | \cdot (-7) \\ -7x_2 - 3x_3 &= 0 | \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_2 - 14x_3 &= 0 \\ 86x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nyní stejně jako v předchozím případě vyřešením poslední rovnice dostaneme $x_3 = 0$. Dosazením této hodnoty do druhé rovnice dostaneme, že i $x_2 = 0$. Známé hodnoty neznámých x_2 a x_3 dosadíme nakonec do první rovnice. Odtud dostaneme, že i $x_1 = 0$. Zadaná soustava lineárních algebraických rovnic má jediné řešení $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$.

Znovu se podívejme na naši soustavu rovnic a její řešení. Oproti předchozímu příkladu tato soustava rovnic měla vždy pravou stranu nulovou. Když jsme pak při sčítací metodě rovnice různě násobili reálnými čísly a sčítali, měnily se koeficienty před neznámými v upravovaných rovnicích. Pravá strana se však v tomto případě neměnila. Pokud tedy budeme řešit soustavu rovnic, ve které má každá rovnice pravou stranu nulovou, můžeme pracovat pouze s koeficienty před neznámými. Dostali jsme řešení naší soustavy rovnic, ve kterém všechny neznámé jsou nulové. Když se podíváme na zadání, mohli jsme vlastně toto řešení odvodit již ze zadání. Všimněte si, že jakákoli soustava rovnic, ve které pravé strany každé z rovnic jsou nulové, bude mít toto řešení. Ale některé takovéto soustavy budou mít kromě tohoto řešení samých nul ještě jiná řešení. To znamená, že takovéto soustavy rovnic budou vždy řešitelné.

4.5.1 Homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

Homogenní soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých budeme rozumět soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ se nazývají koeficienty soustavy.

Tuto soustavu můžeme zapsat pomocí matice do tvaru $A\mathbf{x} = \theta$, kde je postupně označeno

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je matice typu $m \times n$.

Uvědomme si, že prvky matice soustavy uložené ve sloupcích jsou koeficienty před stejnou neznámou v jednotlivých rovnicích.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Definice 4.5.1. Nechť A je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{x}$ je vektor z $\mathbb{R}^n$. *Homogenní soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých* budeme rozumět rovnici $A\mathbf{x} = \theta$, kde θ je nulový vektor. Matice A se nazývá *matice soustavy* a vektor $\mathbf{x}$ nazýváme *řešením soustavy*. *Hodností matice soustavy* budeme rozumět hodnost matice A. Množinu všech řešení označíme W_A.

Věta 4.5.2 (Počet parametrů k vyjádření řešení)**.** *Jestliže $A\mathbf{x} = \theta$ je homogenní soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých a hodnost soustavy je h, pak všechna řešení této soustavy můžeme zapsat pomocí $n - h$ parametrů.*

Pokud bude platit, že $n = h$, tj. když hodnost soustavy bude n, pak množina W_A je jednoprvková množina obsahující tzv. *triviální řešení*. Triviální řešení je řešení, kde všechny neznámé jsou nulové. Tuto úvahu můžeme zformulovat do následující věty.

Věta 4.5.3 (Existence triviálního řešení)**.** *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak homogenní soustava $A\mathbf{x} = \theta$ má pouze triviální řešení právě tehdy, když* $\det A \neq 0$.

Z toho, co právě bylo napsáno, plyne, že homogenní soustava lineárních algebraických rovnic je *vždy řešitelná*.

Připomeňme ještě některé vlastnosti homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic.

Definice 4.5.4. Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $k \times n$. Pak homogenní soustavy $A\mathbf{x} = \theta$ a $B\mathbf{x} = \theta$ se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení $W_A = W_B$.

Věta 4.5.5 (Postačující podmínka ekvivalence soustav rovnic)**.** *Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $k \times n$, která vznikne z matice A pomocí úprav na řádky neměnících hodnost matice. Pak platí, že homogenní soustavy $A\boldsymbol{x} = \theta$ a $B\boldsymbol{x} = \theta$ jsou ekvivalentní.*

Popíšeme zde metodu řešení soustav lineárních algebraických rovnic, která se nazývá *Gaussova eliminační metoda*. Její myšlenka založená na právě uvedených vlastnostech je velice jednoduchá. Matici soustavy upravíme postupně na matici v Gaussově tvaru, aniž bychom přitom změnili hodnost matice. Nově vzniklá soustava s maticí v Gaussově tvaru má podle právě uvedené vlastnosti stejnou množinu řešení, protože matice soustavy v Gaussově tvaru je ekvivalentní s původní soustavou.

Z kapitoly o maticích víme, jaké úpravy můžeme používat, aniž by se změnila hodnost matice. Raději si je ale připomeňme.

Věta 4.5.6 (Vlastnosti hodnosti matice)**.** *Hodnost matice A se nezmění, jestliže v matici A:*

1. *vynásobíme nějaký řádek (sloupec) nenulovým číslem,*
2. *přičteme-li b-násobek nějakého řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci), je-li $b \neq 0$,*
3. *zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců),*
4. *vynecháme-li řádek (sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (sloupců),*
5. *vynecháme-li nulový řádek (sloupec), pokud to není jediný řádek (sloupec) matice.*

Úpravy neměnící hodnost matice můžeme provádět jak na řádky, tak na sloupce matice. Pokud ovšem pracujeme s maticí soustavy, je doporučeno raději provádět pouze operace na řádky. Operace na sloupce (např. přehození sloupců) je možné provádět, ale je nutno si pak pamatovat, k jaké neznámé patří prvky ve sloupcích takto upravené matice soustavy.

Homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí soustavy v Gaussově tvaru pak vyřešíme již velice jednoduše tzv. zpětným chodem. Tuto soustavu budeme řešit od poslední rovnice k první. Z poslední rovnice vyjádříme poslední neznámou, tu dosadíme do předposlední rovnice a z té pak vyjádříme předposlední neznámou atd. Ukažme tuto metodu na následujících příkladech.

4.46. Nalezněte všechna řešení soustavy **Příklad 4.46**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení: Zapíšeme matici soustavy, a aniž bychom změnili její hodnost, převedeme ji na matici, která je horní trojúhelníková. Postupovat budeme pomocí úprav na řádky naznačených za maticí.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot(-2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Hodnost soustavy je 4, počet neznámých je 4. Matice soustavy je regulární a zadaná soustava má pouze triviální řešení $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 4.47

4.47. Nalezněte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení: Koeficienty rovnic před neznámými zapíšeme do matice a úpravami naznačenými za maticí, které nemění její hodnost, ji převedeme na matici v Gaussově tvaru.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \quad -2 \quad -4 \quad -7 \\ |\cdot(3) \; + \\ |\cdot(3) \; + \\ |\cdot(3) \; + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -34 & 38 & -40 \end{pmatrix}$$

V této matici je třetí řádek mínus jednonásobek druhého řádku a čtvrtý řádek je dvojnásobek druhého řádku. Matici soustavy můžeme naznačenými úpravami převést na matici s pouze dvěma nenulovými řádky.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -34 & 38 & -40 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \quad 1 \quad -2 \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost této matice je 2, počet neznámých je 4. Z uvedených vlastností soustav homogenních lineárních rovnic plyne, že zadaná soustava má nekonečně mnoho řešení, které můžeme vyjádřit pomocí $4-2=2$ parametrů. Zvolme například $x_3 = t \in \mathbb{R}$ a $x_4 = s \in \mathbb{R}$. Ekvivalentní soustava rovnic je

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ -17x_2 + 19x_3 - 20x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme $x_2 = \frac{19t-20s}{17}$. Za neznámé x_1, x_2 a x_3 dosadíme parametry do první rovnice této soustavy a dostaneme rovnici

$$3x_1 + 4\frac{19t-20s}{17} - 5t + 7s = 0.$$

Její řešení je $x_1 = \frac{3t-13s}{17}$. Nekonečně mnoho řešení dané soustavy lineárních rovnic můžeme tedy zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = \left(\frac{3t-13s}{17}, \frac{19t-20s}{17}, t, s\right)^T$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$.

V tomto příkladu jsme k vyjádření nekonečně mnoha řešení potřebovali dva parametry. My jsme zvolili třetí a čtvrtou složku řešení libovolně (parametry) a první dvě složky řešení jsme pomocí těchto složek dopočítali. Jako reálné parametry jsme ale mohli volit jakékoli dvě složky řešení. V následujícím příkladě uvidíme, že tomu tak nemusí být vždy.

4.48. Nalezněte všechna řešení soustavy **Příklad 4.48**

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení: Nejdříve se zamyslíme nad zadanou soustavou rovnic. Jedná se o soustavu čtyř rovnic s pěti neznámými. Matice soustavy je typu 4×5. Její hodnost je maximálně 4, to je méně než počet neznámých. Již ze zadání plyne, že tato soustava rovnic bude mít nekonečně mnoho řešení. Musíme zjistit, kolik parametrů potřebujeme pro vyjádření nekonečně mnoha řešení a pomocí těchto parametrů tato řešení vyjádřit. Upravíme matici soustavy na matici v Gaussově tvaru.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 9 & -3 & 5 \\ 6 & 5 & 9 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & -2 & 7 \\ 6 & 7 & 9 & -3 & 5 \\ 6 & 5 & 9 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

Pozor! Tato matice ještě není v Gaussově tvaru.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je tři. Počet parametrů, pomocí kterých vyjádříme nekonečně mnoho řešení zadané soustavy rovnic, je $n - h = 5 - 3 = 2$. Ekvivalentní soustava rovnic je

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 7x_5 &= 0 \\ x_2 - x_5 &= 0 \\ -6x_5 &= 0. \end{aligned}$$

V této soustavě rovnic ale nemůžeme položit jakoukoli složku řešení rovnu libovolnému reálnému parametru. Z poslední rovnice této soustavy rovnic plyne, že $x_5 = 0$. Pátou složku řešení tedy nemůžeme volit jako libovolný reálný parametr. Ze druhé rovnice vidíme, že pokud hodnotu $x_5 = 0$ dosadíme do druhé rovnice, dostaneme, že i $x_2 = 0$. Ani tuto složku tedy nemůžeme zvolit jako libovolný reálný parametr. Pokud ale třetí a čtvrtou složku řešení zvolíme jako libovolné parametry, $x_4 = t$, $x_3 = s$, $s, t \in \mathbb{R}$, z první rovnice ekvivalentní soustavy rovnic vyjádříme první složku řešení x_1 pomocí těchto parametrů.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5 \cdot 0 + 6s - 2t + 7 \cdot 0 &= 0 \\ x_1 &= \frac{-6s + 2t}{4} \\ x_1 &= \frac{-3s + t}{2}. \end{aligned}$$

Všech nekonečně mnoho řešení řešení můžeme zapsat ve tvaru $\left(\frac{-3s+t}{2}, 0, s, t, 0\right)^T$.

Uvědomte si, že pokud například soustava čtyř rovnic pro pět neznámých má nekonečně mnoho řešení, pak to neznamená, že libovolná pětice reálných čísel je řešením této soustavy rovnic. V našem příkladě jsme mohli jako libovolná reálná čísla volit třetí a čtvrtou neznámou $x_4 = t$, $x_3 = s$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. První neznámá již ale byla pevně dána v závislosti na třetí a čtvrté neznámé.

4.5.2 Nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

Nehomogenní soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých budeme rozumět soustavu

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde se čísla $a_{ij} \in \mathbb{R}$ nazývají koeficienty soustavy.

Tato soustava nehomogenních lineárních rovnic můžeme být zapsána jako maticová rovnice

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ a $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
je matice typu $m \times n$.

Definice 4.5.7. Nechť A je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{x}$ je vektor z $\mathbb{R}^n$. *Nehomogenní soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých* budeme rozumět rovnici $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Matice A se nazývá *matice soustavy* a vektor $\mathbf{x}$ nazýváme *řešením soustavy*. Vektor $\mathbf{b}$ se nazývá *vektor pravých stran*. Matice $A' = (A|b)$ se nazývá *rozšířená matice soustavy* (k matici A je přidán navíc sloupec pravých stran $\mathbf{b}$). *Hodností soustavy* (**h**) budeme rozumět hodnost matice A, *hodností rozšířené matice soustavy* (**h'**) budeme rozumět hodnost matice A'. Soustava rovnic $A\mathbf{x} = \theta$ se nazývá homogenní soustava příslušná soustavě $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Věta 4.5.8 (Frobeniova věta o řešitelnosti nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic)**.** *Nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde A je matice typu $m \times n$ a $\boldsymbol{x}$ je vektor z $\mathbb{R}^n$, je řešitelná právě tehdy, když hodnost soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Neboli pokud $h \neq h'$ soustava lineárních algebraických rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení, pokud $h = h' = n$ soustava lineárních algebraických rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má právě jedno řešení, pokud $h = h' < n$ soustava lineárních algebraických rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má nekonečně mnoho řešení a $n - h$ je počet parametrů potřebných k vyjádření nekonečně mnoha řešení.

Důsledkem uvedené vlastnosti je úvaha o řešitelnosti soustavy nehomogenních rovnic se čtvercovou maticí soustavy.

Věta 4.5.9 (Vztah determinantu čtvercové matice soustavy s počtem řešení soustavy nehomogenních lineárních rovnic)**.** *Čtvercová matice A má $\det A \neq 0$ právě tehdy, když nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má právě jedno řešení. Čtvercová matice A má $\det A = 0$ právě tehdy, když nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má buď nekonečně mnoho řešení, nebo soustava nemá řešení.*

Pro nalezení nehomogenní soustavy lineárních rovnic použijeme Gaussovu eliminační metodu aplikovanou tentokrát na rozšířenou matici soustavy. Neboli zapíšeme matici soustavy a upravíme ji pomocí úprav, které nemění hodnost matice na matici v Gaussově tvaru. Porovnáním hodností matice soustavy a rozšířené matice soustavy určíme, zda je soustava řešitelná a pokud ano, zda existuje právě jedno, či nekonečně mnoho řešení. V případě, že je soustava řešitelná, přepíšeme ekvivalentní soustavu rovnic s maticí soustavy v Gaussově tvaru a vyřešíme ji zpětným chodem. Opět z poslední rovnice vyjádříme poslední neznámou, tu dosadíme do předposlední rovnice a z té vyjádříme předposlední neznámou a takto pokračujeme, až z první rovnice určíme první neznámou. Všechny tři případy, které mohou při řešení nehomogenní soustavy rovnic nastat, si nyní ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 4.49

4.49. Nalezněte všechna řešení nehomogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Řešení: Z předchozích úvah plyne, že o řešitelnosti, případně počtu řešení rozhodneme podle hodnosti matice soustavy a hodnosti rozšířené matice soustavy. Rozšířenou matici soustavy budeme podle naznačených úprav na řádky matice převádět postupně do Gaussova tvaru. Začneme budováním nul v prvním sloupci pod diagonálou.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Došlo k vynulování i druhého sloupce pod diagonálou. Budeme pokračovat naznačenými úpravami na druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zbývá vynulovat prvek ve čtvrtém řádku a čtvrtém sloupci. K poslednímu řádku přičteme dvojnásobek třetího řádku.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Vidíme, že hodnost matice soustavy je $h = 3$ a hodnost rozšířené matice soustavy je $h' = 4$. Protože tyto dvě hodnosti jsou různé, tato soustava lineárních rovnic nemá řešení. Kdybychom si zapsali soustavu rovnic s touto upravenou maticí soustavy, dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= 0 \\ -2x_4 &= -2 \\ 0 &= -4 \end{aligned}$$

Poslední rovnost této soustavy neplatí, a tudíž soustava nemá řešení.

Podívejme se znovu na zadanou soustavu rovnic. Rovnou ze zadání vidíme, že tato soustava nemůže mít právě jedno řešení. Počet neznámých je 5, kdežto hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy může být maximálně 4. Z toho plyne, že tato soustava buď není řešitelná, nebo má nekonečně mnoho řešení. V tomto případě jsme vyšetřili, že platí první možnost.

Příklad 4.50

4.50. Nalezněte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8. \end{aligned}$$

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladu nejprve zapíšeme rozšířenou matici soustavy a zjistíme hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a začneme úpravami na první řádek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3 \quad -3 \quad -7 \quad -4 \\ |\cdot 8 \\ |\cdot 8 \\ |\cdot 8 \\ |\cdot 8 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 22 & -7 & 2 & 57 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -11 \quad 10 \quad 4 \\ |\cdot 3 \\ |\cdot 6 \\ |\cdot 3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 & 17 \\ 0 & 0 & -32 & -16 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 40 & 32 & 152 & 152 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 8 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |4 \quad 5 \quad 1 \\ \\ |3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -32 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 528 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -32 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 528 \end{array}\right)$$

Získali jsme matici v Gaussově tvaru. Hodnost matice soustavy je 4, hodnost rozšířené matice soustavy je také 4. Protože se obě hodnosti rovnají, víme z Frobeniovy věty, že tato soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení. K jeho výpočtu si přepíšeme ekvivalentní soustavu s trojúhelníkovou maticí a vyřešíme ji zpětným chodem.

$$\begin{aligned}8x_1+6x_2+5x_3+2x_4 &= 21\\ 6x_2+x_3+2x_4 &= 17\\ -32x_3-16x_4 &= -16\\ 48x_4 &= 528\end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostaneme, že $x_4=\frac{528}{48}=11$. Tuto hodnotu dosadíme za x_4 do třetí rovnice a z té vyjádříme x_3.

$$\begin{aligned}-32x_3-16\cdot 11 &= -16\\ -32x_3 &= 160\\ x_3 &= -5\end{aligned}$$

Vypočtené hodnoty dosadíme za x_3 a x_4 do druhé rovnice a vypočteme x_2.

$$\begin{aligned}6x_2-5+2\cdot 11 &= 17\\ 6x_2 &= 0\\ x_2 &= 0\end{aligned}$$

A nakonec zjištěné hodnoty dosadíme za x_2, x_3 a x_4 do první rovnice.

$$\begin{aligned}8x_1+6\cdot 0+5\cdot(-5)+2\cdot 11 &= 21\\ 8x_1 &= 24\\ x_1 &= 3\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení $\mathbf{x}=(3,0,-5,11)^T$.

Než si ukážeme další příklad, uvedeme ještě jednu vlastnost řešení nehomogenních soustav lineárních rovnic. Tu také k vyjádření všech řešení soustavy lineárních rovnic v dalším příkladě můžeme využít.

Věta 4.5.10 (Tvar řešení soustavy lineárních rovnic)**.** *Nechť $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ je libovolné řešení soustavy lineárních algebraických rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ a vektor $\boldsymbol{y}$ je řešení homogenní soustavy rovnic $A\boldsymbol{x}=\theta$. Pak všechna řešení soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ lze vyjádřit jako součet vektorů $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$.*

Na dalších dvou příkladech ukážeme, jak vyjádřit nekonečně mnoho řešení nehomogenní soustavy rovnic dokonce dvojím způsobem. Začneme jednoduchým příkladem.

4.51. Nalezněte všechna řešení soustavy **Příklad 4.51**

$$\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3 &= 3\\ x_1+x_2+2x_3 &= 0\\ x_1-x_2 &= 2.\end{aligned}$$

Řešení: Přepišme rozšířenou matici soustavy a určeme hodnosti h a h'. Začneme výměnou prvního a druhého řádku a následně úpravami na první řádek matice, abychom vynulovali první sloupec pod diagonálou.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\1&1&2&0\\1&-1&0&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\2&-1&1&3\\1&-1&0&2\end{array}\right)\sim$$

Naznačenými úpravami na druhý řádek dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&-3&-3&3\\0&-2&-2&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&-3&-3&3\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Dostali jsme $h = h' = 2$ a z toho plyne, že zadaná soustava lineárních rovnic má nekonečně mnoho řešení a k jeho vyjádření potřebujeme $n - h = 3 - 2 = 1$ parametr. Přepišme ekvivalentní soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Třetí neznámou zvolíme libovolně jako reálný parametr $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$. Ze druhé rovnice pak v závislosti na tomto parametru vyjádříme neznámou x_2.

$$-3x_2 - 3 \cdot t = 3 \Longrightarrow x_2 = -1 - t$$

Dosazením do první rovnice dostaneme vyjádřenou neznámou x_1 v závislosti na parametru.

$$x_1 + (-1 - t) + 2t = 0 \Longrightarrow x_1 = 1 - t$$

Vektor řešení, který popisuje nekonečně mnoho řešení zadané soustavy rovnic je

$$\mathbf{x} = (1 - t, -1 - t, t)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nekonečně mnoho řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic můžeme vyjádřit i jako součet jednoho konkrétního řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic a obecného řešení příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic vyjádřeného pomocí parametru. Nalezneme nejprve konkrétní řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic, a to takové, že budeme volit $x_3 = 0$. Ze druhé rovnice pak dostaneme neznámou x_2.

$$-3x_2 - 3 \cdot 0 = 3 \Longrightarrow x_2 = -1$$

Dosazením této vypočtené hodnoty do první rovnice vypočteme neznámou x_1.

$$x_1 + (-1) + 2 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$$

Vektor řešení je tvaru $\mathbf{x} = (1, -1, 0)^T$. Homogenní soustava příslušná zadané nehomogenní soustavě je tvaru

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Pro nalezení všech nekonečně mnoha řešení této soustavy lineárních rovnic třetí neznámou zvolíme jako reálný parametr $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Pak ze druhé rovnice vyjádříme neznámou x_2.

$$-3x_2 - 3 \cdot t = 0 \Longrightarrow x_2 = -t$$

Nakonec z první rovnice vyjádříme neznámou x_1.

$$x_1 + (-t) + 2 \cdot t = 0 \Longrightarrow x_1 = -t$$

Vektor řešení této soustavy rovnic je tvaru $\mathbf{y} = (-t, -t, t)^T = t \cdot (-1, -1, 1)^T$. Všech nekonečně mnoho řešení zadané nehomogenní soustavy rovnic pak můžeme zapsat jako součet

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, -1, 0)^T + t \cdot (-1, -1, 1)^T, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Uvědomte si, že oba výsledky jsou totožné. Platí

$$(1, -1, 0)^T + t \cdot (-1, -1, 1)^T = (1 - t, -1 - t, t)^T.$$

Nalezení nekonečně mnoha řešení soustavy nehomogenních lineárních rovnic si ukážeme ještě na jednom, ne již tak triviálním příkladě.

4.52. Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

Příklad 4.52

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4\\
3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 5\\
x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 &= 11\\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 6.
\end{aligned}
$$

Řešení: Ze zadání úlohy je opět zřejmé, že daná soustava lineárních rovnic nemůže mít právě jedno řešení. Soustava má čtyři rovnice a pět neznámých. Matice soustavy je typu 4×5, rozšířená matice soustavy je typu 4×6. Hodnosti obou matic mohou mít hodnotu maximálně 4 a počet neznámých je 5. Z toho plyne, že tato soustava buď nemá řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení. Zjistěme hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy. Začneme nulovat první sloupec pod diagonálou podle naznačených úprav na řádky matice.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4\\
3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 5\\
1 & 2 & 7 & -4 & 1 & 11\\
2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 6
\end{array}\right)
\begin{array}{c} -3 \quad -1 \quad -2 \\ + \\ + \\ + \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4\\
0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -7\\
0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7\\
0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2
\end{array}\right)
$$

Je vidět, že druhý řádek nově vzniklé matice je (-1) násobek třetího řádku a můžeme ho tedy vynechat. Vzniklá matice ještě není v Gaussově tvaru. Sečtením druhého a třetího řádku dostaneme matici, která je již v Gaussově tvaru.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4\\
0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7\\
0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ 1 \\ + \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4\\
0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5
\end{array}\right)
$$

Hodnost matice soustavy je $h = 3$, hodnost rozšířené matice soustavy je také $h' = 3$. Protože $h = h' = 3 < n = 5$, má podle Frobeniovy věty tato soustava nekonečně mnoho řešení. K jeho vyjádření budeme potřebovat $n - h = 5 - 3 = 2$ parametry. Naučíme se vyjadřovat všech nekonečně mnoho řešení soustavy lineárních rovnic dvojím způsobem. Zapíšeme ekvivalentní soustavu lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4\\
4x_3 - 2x_4 &= 7\\
-x_4 + x_5 &= 5.
\end{aligned}
$$

K vyjádření nekonečně mnoha řešení musíme zvolit dva parametry a ostatní tři neznámé pomocí ekvivalentní soustavy rovnic dopočítat a vyjádřit pomocí těchto parametrů. Z poslední rovnice vidíme, že v této soustavě rovnic nemůžeme zvolit jako libovolné parametry neznámé x_5 a zároveň x_4. Z předposlední rovnice je zřejmé, že ani neznámé x_3 a x_4 nemůžeme volit zároveň jako parametry. V obou případech se součet jistých násobků neznámých musí rovnat konkrétní hodnotě. V případě první rovnice pěti, v případě druhé rovnice sedmi. Pokud budeme jako reálný parametr volit neznámou x_5, neznámou x_4 z poslední rovnice pomocí tohoto parametru vyjádříme. Dosadíme tento vztah do druhé rovnice a vyjádříme neznámou x_3 v závislosti na zvoleném parametru. Pokud do první rovnice dosadíme za neznámé x_3,x_4 a x_5 vypočtené vztahy a pokud některou z neznámých x_1 nebo x_2 zvolíme jako druhý libovolný parametr, zbývající neznámou z první rovnice vyjádříme v závislosti na obou reálných parametrech. Zvolme například $x_5 = t$ a $x_2 = s$, kde $t, s \in \mathbb{R}$. Ze třetí rovnice dostaneme

$$-x_4 + t = 5 \Longrightarrow x_4 = t - 5.$$

Tento vztah dosadíme do druhé rovnice a píšeme

$$
\begin{aligned}
4x_3 - 2(t-5) &= 7\\
4x_3 - 2t + 10 &= 7\\
x_3 &= -\frac{3}{4} + \frac{t}{2}.
\end{aligned}
$$

Vyjádřené neznámé x_5, x_4 a x_3 pomocí parametru t a reálný parametr s za neznámou x_2 dosadíme do první rovnice a vyjádříme neznámou x_1.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2s + 3\left(-\frac{3}{4} + \frac{t}{2}\right) - 2(t-5) + t &= 4 \\
x_1 + 2s - \frac{9}{4} + \frac{3t}{2} - 2t + 10 + t &= 4 \\
x_1 &= 4 - 2s + \frac{9}{4} - \frac{3t}{2} + 2t - 10 - t \\
x_1 &= -\frac{15}{4} - 2s - \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

Nekonečně mnoho řešení zadané soustavy rovnic můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \left(-\frac{15}{4} - 2s - \frac{t}{2}, s, -\frac{3}{4} + \frac{t}{2}, t-5, t\right)^T, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ukažme si nyní další způsob vyjádření nekonečně mnoha řešení. Nekonečně mnoho řešení zadané soustavy lineárních rovnic vyjádříme ve tvaru $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, kde $\mathbf{x}$ je jedno konkrétní řešení nehomogenní soustavy rovnic a $\mathbf{y}$ je tvar nekonečně mnoha řešení příslušné homogenní soustavy rovnic. Nejprve nalezneme $\mathbf{x}$. Jak jsme již vyšetřili, soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4 \\
4x_3 - 2x_4 &= 7 \\
-x_4 + x_5 &= 5
\end{aligned}$$

má nekonečně mnoho řešení, kde druhou a pátou složku můžeme volit libovolně. My hledáme jedno konkrétní řešení, volme tedy $x_5 = 0$ a $x_2 = 0$. Ze třetí rovnice dostaneme $-x_4 + 0 = 5 \Longrightarrow x_4 = -5$. Dosazením těchto hodnot do druhé rovnice dostaneme neznámou x_3.

$$4x_3 - 2\cdot(-5) = 7 \Longrightarrow x_3 = -\frac{3}{4}$$

Nakonec z první rovnice vypočteme neznámou x_1.

$$x_1 + 2\cdot 0 + 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\cdot(-5) + 0 = 4 \Longrightarrow x_1 = -\frac{15}{4}$$

Můžeme psát $\mathbf{x} = \left(-\frac{15}{4}, 0, -\frac{3}{4}, -5, 0\right)^T$.
Nyní vyjádříme nekonečně mnoho řešení příslušné homogenní soustavy rovnic. Ta je tvaru

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\
4x_3 - 2x_4 &= 0 \\
-x_4 + x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Z předešlého víme, že soustava má nekonečně mnoho řešení a k jejímu vyjádření budeme potřebovat dva parametry. Volme $x_5 = t$ a $x_2 = s$, $t, s \in \mathbb{R}$. Ze třetí rovnice dostaneme $-x_4 + t = 0 \Longrightarrow x_4 = t$. Dosazením do druhé rovnice vyjádříme neznámou x_3.

$$4x_3 - 2\cdot t = 0 \Longrightarrow x_3 = \frac{2t}{4} = \frac{t}{2}$$

Nakonec neznámou x_1 vyjádříme z první rovnice.

$$x_1 + 2\cdot s + 3\cdot\frac{t}{2} - 2\cdot t + t = 0 \Longrightarrow x_1 = -2s - \frac{t}{2}$$

Můžeme psát $\mathbf{y} = \left(-2s - \frac{t}{2}, s, \frac{t}{2}, t, t\right)^T$. Uvědomme si, že platí

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \left(-2s - \frac{t}{2}, s, \frac{t}{2}, t, t\right)^T = \left(-\frac{t}{2}, 0, \frac{t}{2}, t, t\right)^T + (-2s, s, 0, 0, 0)^T \\ &= t \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\right)^T + s \cdot (-2, 1, 0, 0, 0)^T .\end{aligned}$$

Všech nekonečně mnoho řešení zadané nehomogenní soustavy rovnic můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \left(-\frac{15}{4}, 0, -\frac{3}{4}, -5, 0\right)^T + t \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\right)^T + s \cdot (-2, 1, 0, 0, 0)^T ,$$

kde $t, s \in \mathbb{R}$. Uvědomte si, že takto vyjádřené nekonečně mnoho řešení je naprosto shodné s vyjádřeným řešením získaným prvním způsobem. Totiž platí

$$\left(-\frac{15}{4} - 2s - \frac{t}{2}, s, -\frac{3}{4} + \frac{t}{2}, t - 5, t\right)^T =$$

$$\left(-\frac{15}{4}, 0, -\frac{3}{4}, -5, 0\right)^T + t \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\right)^T + s \cdot (-2, 1, 0, 0, 0)^T .$$

4.6 Další metody řešení nehomogenních soustav lineárních algebraických rovnic

V této kapitole si ukážeme některé z dalších metod řešení nehomogenních soustav lineárních algebraických rovnic, ve kterých bude matice soustavy regulární matice. Než si tyto metody představíme, začneme s motivačními úvahami.

Motivační úvaha I.

Mějme dílnu vyrábějící dva druhy výrobku. Označme je A a B. V následující tabulce jsou uvedeny ceny práce a materiálu (uvedené v Kč) potřebné ke zhotovení jednoho výrobku každého z druhů.

ceny na jeden výrobek		
druh výrobku	**cena práce**	**cena materiálu**
A	30	20
B	40	30

Máme k dispozici 3 000 Kč týdně na výrobu obou druhů výrobku. V následující tabulce jsou uvedena rozvržení této celkové sumy mezi práci a materiál pro následující tři týdny.

finanční prostředky v jednotlivých týdnech			
	první týden	**druhý týden**	**třetí týden**
práce	1 800	1 750	1 720
materiál	1 200	1 250	1 280

Naším úkolem je zjistit, kolik kusů každého z druhů výrobku můžeme v každém týdnu vyrobit. Když se zamyslíme, zjistíme, že náš problém se dá převést na problém vyřešení tří soustav lineárních rovnic. Označíme x_1 počet výrobků typu A, který je potřeba vyrobit v jednotlivých týdnech a x_2 počet výrobků typu B, který je potřeba vyrobit v jednotlivých týdnech. Porovnáme-li cenu práce, kterou máme v dílně na oba druhy výrobků, dostaneme první rovnici. Druhou rovnici odvodíme porovnáním cen za materiál, který je v dílně k dispozici na výrobu x_1 a x_2 kusů výrobků. Pak určit tyto neznámé pro první týden znamená vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p &: 30x_1 + 40x_2 = 1\,800 \\ m &: 20x_1 + 30x_2 = 1\,200. \end{aligned}$$

Pro druhý a třetí týden dostaneme soustavy rovnic

$$\begin{aligned} p &: 30x_1 + 40x_2 = 1\,750 \\ m &: 20x_1 + 30x_2 = 1\,250 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &: 30x_1 + 40x_2 = 1\,720 \\ m &: 20x_1 + 30x_2 = 1\,280. \end{aligned}$$

Náš problém jsme převedli na problém vyřešení tří soustav rovnic, ve kterých matice soustavy je stejná a mění se pouze pravá strana. V Gaussově eliminaci, kterou již umíme použít k řešení soustavy rovnic, pracujeme s rozšířenou maticí soustavy. A ta je ve všech třech případech pro jednotlivé týdny různá. V této kapitole si ukážeme metody, ve kterých tuto vlastnost využijeme. Provedeme výpočty s maticí soustavy, která je pro všechny tři soustavy stejná, a pak tuto upravenou matici použijeme k nalezení řešení jednotlivých soustav s různými pravými stranami.

Motivační úvaha II.

Máme za úkol připravit jídlo ze tří základních potravin, označme je A,B,C. Toto jídlo musí obsahovat přesně daný počet jednotek tří látek, a to vápníku, železa a vitamínu A. Konkrétně musí obsahovat přesně 340 jednotek vápníku, 180 jednotek železa a 220 jednotek vitamínu A. V následující tabulce je uveden počet jednotek každé z látek na jeden dekagram každé z potravin.

počet jednotek v jednom dkg			
	potravina A	**potravina B**	**potravina C**
vápník	30	10	20
železo	10	10	20
vitamín A	10	30	20

Máme za úkol zjistit kolik dekagramů potraviny B musí být při přípravě jídla užito, aby přesně vyhovovalo požadavku na přesnou dávku vápníku, železa a vitamínu A v jídle.

Označme x_1 množství dekagramů potraviny A, x_2 množství dekagramů potraviny B a x_1 množství dekagramů potraviny C potřebná ke zhotovení jídla s danými obsahy vápníku, železa a vitamínu A. Porovnáním celkového množství vápníku nutného v jídle a množství obsaženého ve třech druzích potravin A, B, C dostaneme rovnost

$$30x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 340.$$

Porovnáním předepsaného množství železa a množství v jednotlivých potravinách máme $10x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 180$ a pro vitamín A platí vztah $10x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 220$. Dostáváme soustavu tří rovnic pro tři neznámé.

$$\begin{aligned} 30x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 340 \\ 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 180 \\ 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 &= 220 \end{aligned}$$

Naším úkolem je zjistit x_2. Umíme tuto soustavu rovnic vyřešit pomocí Gaussovy eliminační metody a vypočítat všechny tři neznámé x_1, x_2 a x_3. V této podkapitole se dozvíme, že existuje metoda, pomocí níž můžeme z této soustavy rovnic vypočítat jen neznámou x_2. V této metodě využijeme determinantů.

Uvedeme další čtyři metody k řešení soustavy rovnic, které mohou být v jistých situacích (jako například v naznačených motivačních úvahách) výhodnější než Gaussova eliminační metoda.

Jordanova eliminační metoda

Jordanova eliminační metoda má podobnou ideu jako Gaussova eliminační metoda. V Jordanově metodě nepřevedeme matici soustavy na horní trojúhelníkovou matici (předpokládáme regularitu matice soustavy), ale přímo na diagonální matici. Neboli vynulujeme prvky i v horním trojúhelníku matice soustavy. (Takto jsme již postupovali, když jsme se učili hledat inverzní matici pomocí eliminace.) Soustava rovnic s diagonální maticí soustavy je pak ještě jednodušeji řešitelná. Ukažme si vše na příkladě.

Příklad 4.53

4.53. Jordanovou metodou nalezněte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2\\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3\\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Řešení: Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a matici soustavy postupně převedeme na diagonální tvar pomocí úprav naznačených za maticí. Začneme přehozením prvního a druhého řádku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim$$

V dalším kroku podle naznačených úprav na první řádek vynulujeme první sloupec pod diagonálou.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Pokračujeme v nulování prvků v druhém sloupci pod diagonálou podle naznačených úprav na druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Zbývá vynulovat prvek ve čtvrtém řádku a třetím sloupci podle naznačené úpravy na třetí řádek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid\cdot -3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

Nyní vidíme, že hodnost matice soustavy je $h = 4$ a hodnost matice soustavy je $h' = 4$. Protože se obě hodnosti rovnají, víme, že zadaná soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení. V Gaussově eliminační metodě bychom nyní s úpravou rozšířené matice soustavy skončili a zapsali bychom ekvivalentní soustavu lineárních rovnic a tu zpětným chodem (od poslední rovnice k první) vyřešili. V Jordanově metodě budeme s úpravou rozšířené matice soustavy pokračovat. A začneme naznačeným způsobem, v rámci zjednodušení vydělíme poslední řádek -7. Pokračujeme v nulování prvku nad diagonálou. Začneme nulováním posledního sloupce nad diagonánou. Úpravy děláme vůči poslednímu sloupci.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid\cdot -\frac{1}{7} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Pokračujeme v nulování prvku nad diagonálou. Začneme nulováním posledního sloupce nad diagonálou. Úpravy děláme vůči poslednímu sloupci.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Pokračujeme nulováním prvků ve třetím sloupci nad diagonálou pomocí naznačených úprav na druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 6 \\ |\cdot 6 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Zbývá vynulovat prvek ve druhém sloupci a prvním řádku pomocí naznačené úpravy na druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Matici soustavy jsme upravili na diagonální matici a ekvivalentní soustava lineárních rovnic bude velmi lehce řešitelná.

$$\begin{aligned} 6x_1 &= -12 \\ 6x_2 &= 0 \\ -6x_3 &= -6 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Z této soustavy okamžitě dostáváme řešení $\mathbf{x} = (-2, 0, 1. -1)$.

Výpočet řešení soustavy rovnic pomocí inverzní matice

Další metoda, kterou lze řešit soustavu lineárních rovnic s regulární maticí soustavy, je *metoda pomocí inverzní matice*. Tato metoda je vlastně řešení maticové rovnice. Soustavu rovnic zapíšeme v maticovém tvaru $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a tuto maticovou rovnici vyřešíme.

$$\begin{aligned} A^{-1}\cdot | \qquad A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I\,\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

V této metodě nalezneme inverzní matici k matici soustavy a v naznačeném pořadí ji vynásobíme vektorem pravých stran. Ukažme použití této metody v následujícím příkladu.

Příklad 4.54

4.54. Pomocí inverzní matice k matici soustavy nalezněte všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení: K matici soustavy $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nejprve nalezneme inverzní matici. Již jsme se naučili dvě metody pro nalezení inverzní matice. Jedna využívá determinantů (pomocí adjungované matice) a druhá je založena na myšlence zachytit všechny úpravy dané matice v převodu na jednotkovou matici. V této metodě si za čarou k dané matici zapíšeme jednotkovou matici a pomocí dovolených úprav pouze na řádky této prodloužené matice postupně získáme před čarou jednotkovou matici. Matice vzniklá za čarou je inverzní matice k zadané matici. Tuto metodu použijeme nyní k nalezení inverzní matice k matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad {}^{-3} \quad {}^{-2} \\ \mid \cdot 2 \ \ {}_{+} \\ \qquad\quad {}_{+} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nejprve přehodíme druhý a třetí řádek a dále nulujeme druhý sloupec pod diagonálou podle naznačených úprav na druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -19 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -19 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {}^{-5} \\ {}_{+} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

Vzniklá matice před čarou je horní trojúhelníková. Dále budeme nulovat prvky v horním trojúhelníku. Začneme nulováním třetího sloupce nad diagonálou podle naznačených úprav na třetí řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \qquad\qquad {}^{2} \\ \mid \cdot 6 \ \ {}^{+} \\ \qquad {}_{5} \quad {}_{+} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 0 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & 23 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

Nyní k získání diagonální matice před čarou stačí jen sečíst mínus trojnásobek prvního řádku a druhý řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 0 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & 23 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 23 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 23 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \frac{1}{12} \\ \mid \frac{1}{6} \\ \mid \frac{1}{6} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{12} & \frac{4}{12} & \frac{-4}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{6} & \frac{10}{6} & \frac{-19}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{2}{6} & \frac{-5}{6} \end{array}\right)$$

Po zkrácení tří zlomků v prvním řádku dostaneme inverzní matici k matici soustavy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{2}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{23}{6} & \frac{10}{6} & \frac{-19}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{2}{6} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 23 & 10 & -19 \\ 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Řešení zadané soustavy rovnic dostaneme již jen vynásobením inverzní matice a vektoru pravých stran $\mathbf{A^{-1}b}$ v tomto pořadí.

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 23 & 10 & -19 \\ 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zadaná soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení $\mathbf{x} = (1, 2, 1)^T$, což lze jednoduše ověřit zkouškou.

Tato metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic s regulární maticí soustavy je využívána i v input-output analýze v další kapitole. Metoda je také vhodná k řešení soustav rovnic, které byly naznačeny v motivační úvaze I. Tedy v situaci, kdy máme řešit více soustav rovnic se stejnou maticí soustavy a různými pravými stranami. Vyřešme touto metodou úlohu z motivační úlohy I. V této úloze jsme zadanou úlohu převedli na problém vyřešení tří soustav lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,800 \\ 20x_1 + 30x_2 &= 1\,200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,750 \\ 20x_1 + 30x_2 &= 1\,250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,720 \\ 20x_1 + 30x_2 &= 1\,280 \end{aligned}$$

Každá ze soustav lineárních rovnic byla sestavena pro tři pracovní týdny. První rovnice v soustavách popisují cenu práce, druhé cenu materiálu. Všechny tři soustavy mají stejnou matici soustavy a liší se pouze pravými stranami. Neznámá x_1 je počet výrobků typu A, který je potřeba vyrobit v jednotlivých týdnech a x_2 počet výrobků typu B, který je potřeba vyrobit v jednotlivých týdnech. Výhoda této metody spočívá v tom, že inverzní matici nalezneme jen jednu a řešení jednotlivých soustav nalezneme vynásobením pravých stran touto inverzní maticí. Inverzní matici v tomto případě nalezneme pomocí adjungované matice. Připomeneme, že $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{Adj } A)^T$. Determinant matice soustavy vypočteme křížovým pravidlem.

$$\begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 20 & 30 \end{pmatrix} = 30\cdot 30 - 40\cdot 20 = 100$$

Adjungovaná matice má tvar

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} (-1)^2\cdot 30 & (-1)^3\cdot 20 \\ (-1)^3\cdot 40 & (-1)^4\cdot 30 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 30 & -40 \\ -20 & 30 \end{pmatrix}.$$

Potom pro inverzní matici platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{Adj } A)^T = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 30 & -40 \\ -20 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Řešení první soustavy rovnic bude

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\,800 \\ 1\,200 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3\cdot 1\,800 + (-0,4)\cdot 1\,200 \\ -0,2\cdot 1\,800 + 0,3\cdot 1\,200 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pro druhou rovnici máme

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,750 \\ 1\,250 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,3 \cdot 1\,750 + (-0,4) \cdot 1\,250 \\ -0,2 \cdot 1\,750 + 0,3 \cdot 1\,250 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vyřešením třetí soustavy dostaneme

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,720 \\ 1\,280 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,3 \cdot 1\,720 + (-0,4) \cdot 1\,280 \\ -0,2 \cdot 1\,720 + 0,3 \cdot 1\,280 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ 40 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dostali jsme, že v prvním týdnu je nutno vyrobit 60 kusů výrobku typu A a žádný výrobek typu B, ve druhém týdnu je třeba vyrobit 25 kusů obou typů výrobků a ve třetím týdnu je třeba vyrobit 4 kusy výrobků typu A a 40 kusů výrobků druhu B.

Při řešení soustav lineárních rovnic popisujících nějakou reálnou situaci je třeba mít na mysli i jistá omezení neznámých související s reálným problémem. V našem případě se jedná o podmínku, že neznámé $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$.

Metoda LU rozkladu

Další metoda, která je výhodná v podobných úlohách jako předchozí metoda, se nazývá *metoda LU rozkladu*. Idea metody vychází ze skutečnosti, že řešit soustavu rovnic s trojúhelníkovou maticí je velmi jednoduché. Jedná se vlastně o zpětný chod v Gaussově eliminační metodě. Proto v této metodě matici soustavy rozložíme na součin dvou trojúhelníkových matic a následně řešíme dvě soustavy s trojúhelníkovou maticí. Řešíme-li soustavu lineárních rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s regulární maticí soustavy A, pak tuto matici rozložíme na součin dvou trojúhelníkových matic L a U, kde matice L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a matice U je horní trojúhelníková matice. Platí $A = LU$. Soustavu rovnic pak můžeme zapsat pomocí tohoto vztahu $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Zavedeme substituci a položíme $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$. Zadanou soustavu rovnic pak můžeme zapsat $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Toto je soustava s trojúhelníkou maticí soustavy a tedy její řešení $\mathbf{y}$ nalezneme velice rychle. Vypočtené $\mathbf{y}$ pak dosadíme do substituce a řešíme soustavu rovnic $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ s trojúhelníkovou maticí soustavy, jejíž řešení je opět velmi jednoduché. Ukažme si opět tuto metodu na příkladu.

4.55. Pomocí metody LU rozkladu nalezněte všechna řešení soustavy lineárních rovnic **Příklad 4.55**

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11.
\end{aligned}
$$

Řešení: Nejprve nalezneme matice L a U. Dosadíme do rovnosti $A = L \cdot U$. Prvky matice L označíme l_{ij} a prvky matice U označíme u_{ij}. Některé prvky těchto matic máme dané z definice (trojúhelníkové matice mají jisté prvky nulové)

$$
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.
$$

Nyní roznásobíme matice na pravé straně

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{11}\cdot l_{21} & u_{12}\cdot l_{21}+u_{22} & u_{13}\cdot l_{21}+u_{23} \\ u_{11}\cdot l_{31} & u_{12}\cdot l_{31}+u_{22}\cdot l_{32} & u_{13}\cdot l_{31}+u_{23}\cdot l_{32}+u_{33} \end{pmatrix}.$$

Víme, že matice se rovnají, pokud se rovnají prvky na odpovídajících místech. Porovnáním prvků na stejných místech těchto dvou matic dostaneme následující soustavu rovnic. Máme devět prvků, dostaneme devět rovnic.

$$\begin{aligned} u_{11} &= 3 \\ u_{12} &= 2 \\ u_{13} &= 1 \\ u_{11}\cdot l_{21} &= 2 \\ u_{12}\cdot l_{21}+u_{22} &= 3 \\ u_{13}\cdot l_{21}+u_{23} &= 1 \\ u_{11}\cdot l_{31} &= 2 \\ l_{31}\cdot u_{12}+u_{22}\cdot l_{32} &= 1 \\ u_{13}\cdot l_{31}+u_{23}\cdot l_{32}+u_{33} &= 3 \end{aligned}$$

Vyřešení této soustavy rovnic není příliš náročné. První tři rovnice jsou vyřešené. Každou následující rovnici řešíme tak, že do ní dosazujeme postupně vše, co jsme již zjistili. Z první rovnice dosadíme za $u_{11} = 3$ do čtvrté rovnice a vypočteme l_{21}. Dostáváme $l_{21} = \frac{2}{3}$. Tuto hodnotu dosadíme do páté rovnice a vypočteme u_{22}

$$2\frac{2}{3} + u_{22} = 3 \Longrightarrow u_{22} = \frac{5}{3}.$$

Ze šesté rovnice dostaneme u_{23}, $u_{23} = 1 - 1\cdot\frac{2}{3} \Longrightarrow u_{23} = \frac{1}{3}$. Do sedmé rovnice dosadíme za $u_{11} = 3$ a vypočteme l_{31}, $3l_{31} = 2 \Longrightarrow l_{31} = \frac{2}{3}$. Prvek l_{32} vypočteme z osmé rovnice, do které jsme dosadili již vypočtené hodnoty $l_{31} = \frac{2}{3}$,$u_{12} = 2$ a $u_{22} = \frac{5}{3}$, vypočteme l_{32}, $\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{5}{3}\cdot l_{32} = 1 \Longrightarrow l_{32} = -\frac{1}{5}$. A konečně z poslední rovnice vypočteme $u_{33} = 3 - 1\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{5}) = \frac{12}{5}$.

Našli jsme hledané matice $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$. Nyní vyřešíme soustavu $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ s vektorem neznámých $\mathbf{y}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Roznásobením dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 \\ \frac{2}{3}y_1 + y_2 &= 1 \\ \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{5}y_2 + y_3 &= 11. \end{aligned}$$

Vyřešit tuto soustavu je jednoduché. Neznámou y_1 z první rovnice dosadíme do druhé rovnice a vypočteme y_2.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\cdot 5 + y_2 &= 1 \\ y_2 &= -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Vypočtenou hodnotu y_2 dosadíme do třetí rovnice a vypočteme y_3.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}5 - \frac{1}{5}\left(-\frac{7}{3}\right) + y_3 &= 11 \\ y_3 &= \frac{36}{5} \end{aligned}$$

Máme $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{36}{5} \end{pmatrix}$. Nakonec nám zbývá vyřešit soustavu $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{36}{5} \end{pmatrix}$$

Soustava je tvaru

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -\frac{7}{3} \\ \frac{12}{5}x_3 &= \frac{36}{5}. \end{aligned}$$

Vyřešení této soustavy je opět velmi jednoduché. Tady postupujeme od třetí rovnice k první a postupně dosazujeme vypočtené složky řešení do další rovnice. Tak postupně dostaneme $x_3 = 3, x_2 = -2, x_1 = 2$. Hledaný vektor řešení je $\mathbf{x} = (2, -2, 3)^T$.

V této metodě je nejobtížnějším krokem nalezení matic L a U. Řešení obou soustav $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ je již jednoduchá záležitost, protože obě matice soustavy jsou trojúhelníkové matice. Tuto metodu řešení soustav lineárních rovnic volíme tedy především tehdy, když musíme vyřešit více soustav rovnic, které se liší pouze pravou stranou, ale matice soustav jsou stejné. V takovém případě se najdou matice L a U pouze jednou a pro každou soustavu se pouze řeší soustavy $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ a $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Toto je právě situace popsaná v naší první motivační úloze. Vyřešme znovu naši motivační úlohu tentokrát metodou LU rozkladu. Zadanou úlohu jsme převedli na problém vyřešení tří soustav lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,800 \\ 20x_1 + 30x_2 &= 1\,200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,750 \\ 20x_1 + 30x_2 &= 1\,250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,720 \\ 20x_1 + 30x_2 &= 1\,280 \end{aligned}$$

Matice soustavy všech tří soustav rovnic je stejná $\begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}$. Tuto matici rozložíme na součin dolní a horní trojúhelníkové matice.

$$\begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 20 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{11} \cdot l_{21} & l_{21}u_{12} + u_{22} \end{pmatrix}$$

Porovnáním prvků dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 30 &= u_{11} \\ 40 &= u_{12} \\ 20 &= u_{11} \cdot l_{21} \\ 30 &= l_{21}u_{12} + u_{22}. \end{aligned}$$

Dosadíme hodnotu u_{11} z první rovnice do třetí a dostaneme $20 = 30 \cdot l_{21} \Longrightarrow l_{21} = \frac{2}{3}$. Hodnotu $\frac{2}{3}$ dosadíme za l_{21} do čtvrté rovnice a máme $30 = \frac{2}{3}40 + u_{22} \Longrightarrow u_{22} = \frac{10}{3}$. Nalezli jsme hledané matice.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Nyní budeme pro každou pravou stranu hledat řešení dvou soustav lineárních rovnic s troúhelníkovou maticí.

$$Ly = b$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,800 \\ 1\,200 \end{pmatrix}$$

Tuto maticovou rovnici můžeme rozepsat na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} y_1 &= 1\,800 \\ \frac{2}{3}y_1 + y_2 &= 1\,200 \end{aligned}$$

Dozazením hodnoty $y_1 = 1\,800$ do poslední rovnice dostaneme $y_2 = 0$. Toto řešení dosadíme jako pravou stranu soustavy rovnic.

$$Ux = y$$
$$\begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tuto maticovou rovnici rozepíšeme na následující soustavu rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,800 \\ \frac{10}{3}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostaneme $x_2 = 0$. Dosazením této hodnoty do předposlední rovnice dostaneme $x_1 = 60$.

Podobně tak pro $b = \begin{pmatrix} 1\,750 \\ 1\,250 \end{pmatrix}$ rozepíšeme maticovou rovnici $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ do tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= 1\,750 \\ \frac{2}{3}y_1 + y_2 &= 1\,250 \end{aligned}$$

Dosazením za $y_1 = 1\,750$ do první rovnice vypočteme $y_2 = \frac{250}{3}$. Tyto hodnoty dosadíme do pravé strany maticové rovnice $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,750 \\ \frac{10}{3}x_2 &= \frac{250}{3}. \end{aligned}$$

Ze druhé rovnice této soustavy dostaneme $x_2 = 25$. Dosazením této hodnoty do první rovnice vypočteme $x_1 = 25$.

Pro poslední případ, kdy pravá strana je rovna $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1\,720 \\ 1\,280 \end{pmatrix}$, rozepíšeme maticovou rovnici s maticí soustavy L do tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= 1\,720 \\ \frac{2}{3}y_1 + y_2 &= 1\,280. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic je $y_1 = 1\,720$ a $y_2 = \frac{400}{3}$. Pro získání neznámé $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 30x_1 + 40x_2 &= 1\,720 \\ \frac{10}{3}x_2 &= \frac{400}{3}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic je $x_2 = 40$ a $x_1 = 4$. Výsledky jsou samozřejmě stejné jako při použití metody pomocí inverzní matice.

Cramerovo pravidlo

Další metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic regulární maticí využívá determinantů a nazývá se *Cramerovo pravidlo*.

Věta 4.6.1 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť A je regulární matice řádu n a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava lineárních rovnic. Označme A_i, $i = 1, \ldots, n$ matice, které vzniknou z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran $\mathbf{b}$. Pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

V Cramerově pravidle musíme pro získání n složek vektoru řešení spočítat $n + 1$ determinantů. Proto nebudeme asi volit tuto metodu k výpočtu řešení velké soustavy lineárních rovnic. Pokud nás ale bude zajímat jen několik málo složek vektoru řešení, může být výhodná. Nebo ji zvolíme k výpočtu řešení malé soustavy lineárních rovnic (matice soustavy je typu 2×2 nebo 3×3), kde koeficienty soustavy nejsou celá čísla. V takovém případě je totiž jednodušší násobení a sčítání (pouze tyto operace se používají v jednoduchých pravidlech pro výpočet determinantů takového typu matic) takovýchto čísel, než hledání vhodné lineární kombinace. Ukažme si použití této metody na následujícím příkladu.

4.56. Pomocí Cramerova pravidla nalezněte všechna řešení soustavy lineárních rovnic **Příklad 4.56**

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Řešení: Matice soustavy zadané soustavy rovnic je

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A_i , kde $i = 1, 2, 3$ vytvoříme z matice soustavy tak, že postupně první, druhý a nakonec třetí sloupec zaměníme za vektor pravých stran.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinanty těchto matic postupně spočteme Sarrusovým pravidlem.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot1-3\cdot2\cdot1-1\cdot1\cdot1 = -2$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot1\cdot1+3\cdot2\cdot1+4\cdot1\cdot1-4\cdot1\cdot1-4\cdot2\cdot1-3\cdot1\cdot1 = -1$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 4\cdot 1 = -2$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 4 = -3$$

Podle Cramerova pravidla dostáváme

$$x_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{-2}{-2} = 1, \qquad x_3 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Vraťme se nyní k motivační úloze II na začátku této podkapitoly. Úvahou jsme došli k tomu, že je nutno vyřešit soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 30x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 340 \\ 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 180 \\ 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 &= 220. \end{aligned}$$

Naším úkolem bylo zjistit neznámou x_2, která představovala množství dekagramů potraviny B obsažené v jídle pro dosažení správného obsahu tří látek (vápníku, železa a vitamínu A) v tomto jídle. K vyřešení této soustavy rovnic, a tedy zjištění neznámé x_2, můžeme použít jakékoli zde uvedené metody.

V metodách, jako je Gaussova eliminace, Gauss-Jordanova eliminace, metoda pomocí inverzní matice, metoda L-U rozkladu, bychom vypočetli všechny neznámé. Pomocí Cramerova pravidla však můžeme vypočítat přímo neznámou x_2. K tomu stačí vypočítat dva determinanty matice řádu 3.

Vypočteme determinant matice soustavy a determinant matice, ve které druhý sloupec je vektor pravých stran. Obě matice jsou matice řádu tři a jejich determinanty můžeme spočítat Sarrusovým pravidlem. Dříve, než začneme determinanty těchto matic počítat, si uvědomíme, že můžeme v obou maticích z každého řádku vytknout deset.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 20 \\ 10 & 30 & 20 \end{vmatrix} &= 10\cdot 10\cdot 10\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1\,000\cdot \big(3\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 1 \\ &\quad - 1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 2\big) \\ &= -8\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 30 & 340 & 20 \\ 10 & 180 & 20 \\ 10 & 220 & 20 \end{vmatrix} &= 10\cdot 10\cdot 10\cdot \begin{vmatrix} 3 & 34 & 2 \\ 1 & 18 & 2 \\ 1 & 22 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1\,000\cdot \big(3\cdot 18\cdot 2 + 1\cdot 22\cdot 2 + 34\cdot 2\cdot 1 \\ &\quad -1\cdot 18\cdot 2 - 3\cdot 22\cdot 2 - 1\cdot 34\cdot 2\big) \\ &= -16\,000 \end{aligned}$$

Pak hledaná neznámá je dána podílem $x_2 = \frac{-16\,000}{-8\,000} = 2$. Zjistili jsme, že druhé potraviny smí v jídle být 2 dkg, aby byla dodržena požadovaná množství vápníku, železa a vitamínu A. Cramerovo pravidlo nám umožnilo ze soustavy rovnic řešit přímo neznámou x_2.

Všechny zde uvedené metody pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic se nazývají metody *přímé*. V těchto metodách se vypočte po provedení jistého výpočtu okamžitě přesné řešení soustavy lineárních rovnic. Na rozdíl od těchto metod existují metody *nepřímé*, kde se k přesnému řešení opakovanými výpočty „postupně kráčí“. Latinsky se řekne kráčet iterare. Proto se těmto metodám říká také metody *iterační*.

4.7 Cvičení

Nalezněte všechna řešení následujících soustav lineárních rovnic.

4.7.1.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.3.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.4.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.5.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.6.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.7.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.8.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.9.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.10.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 + 27x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 81x_5 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.11.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 &= 0 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.12.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4 &= 0 \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - 13 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 1 &= 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 - 11 &= 0 \end{aligned}$$

4.7.13.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

4.7.14.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4.7.15.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \end{aligned}$$

4.7.16.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

4.7.17.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 20 \end{aligned}$$

4.7.18.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 &= 25 \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 &= 40 \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 &= 65 \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 &= 95 \end{aligned}$$

4.7.19.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned}$$

4.7.20.

$$\begin{aligned} 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 &= 29 \\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 &= 55 \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 &= 115 \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 &= 50 \end{aligned}$$

4.7.21.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3 \end{aligned}$$

4.7.22.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}$$

4.7.23.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \end{aligned}$$

4.7.24.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6 \end{aligned}$$

4.7.25.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4.7.26.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

4.7.27.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1 \end{aligned}$$

4.7.28.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 2x_4 - x_5 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \end{aligned}$$

4.7.29.

$$\begin{aligned}
24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 &= 28\\
36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 &= 43\\
48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 &= 58\\
60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 &= 69
\end{aligned}$$

4.7.30.

$$\begin{aligned}
12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 &= 5\\
16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 &= 8\\
18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 &= 9\\
10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 &= 4
\end{aligned}$$

Některou z metod: Jordanova metoda, Cramerovo pravidlo, metoda pomocí inverzní matice, metoda LU-rozkladu, nalezněte všechna řešení následujících soustav lineárních rovnic.

4.7.31.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1\\
3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4
\end{aligned}$$

4.7.32.

$$\begin{aligned}
5x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 &= 16\\
x_1 + 5x_2 + 6x_4 &= 16\\
x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3\\
3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 11
\end{aligned}$$

4.7.33.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6\\
2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8\\
3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4\\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8
\end{aligned}$$

4.7.34.

$$\begin{aligned}
x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5\\
x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4\\
3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12\\
4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4
\end{aligned}$$

4.7.35.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8\\
3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3\\
4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2\\
x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3
\end{aligned}$$

4.7.36.

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 &= 4\\
3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11\\
3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11
\end{aligned}$$

4.7.37.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1\\
2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4\\
4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2
\end{aligned}$$

4.7.38.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31\\
5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29\\
3x_1 - x_2 + x_3 &= 10
\end{aligned}$$

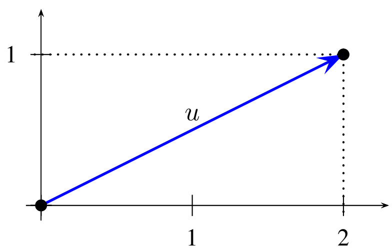
Výsledky cvičení

4.7.1 $x_1 = -\frac{11t}{7}, x_2 = -\frac{t}{7}, x_3 = t \in \mathbb{R}$ neboli $t\left(-\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}, 1\right)$ **4.7.2** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ **4.7.3** $x_1 = \frac{-4t+7s}{8}$, $x_2 = \frac{-4t+5s}{8}, x_3 = \frac{4t-5s}{8}, x_4 = t \in \mathbb{R}, x_5 = s \in \mathbb{R}$ neboli $t\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + s\left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{5}{8}, 0, 1\right)$ **4.7.4** $x_1 = \frac{7}{6}s - t, x_2 = \frac{5}{6}s + t, x_3 = t \in \mathbb{R}, x_4 = \frac{s}{3}, x_5 = s \in \mathbb{R}$ neboli $t\,(-1, 1, 1, 0, 0) + s\left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}, 0, \frac{1}{3}, 1\right)$ **4.7.5** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = t \in \mathbb{R}$ neboli $t\,(0, 0, 0, 1, 1)$ **4.7.6** $x_1 = 8t - 7s, x_2 = -6t + 5s,$

$x_3 = t \in \mathbb{R}$ $x_4 = s \in \mathbb{R}$ neboli $t\,(8, -6, 1, 0) + s\,(-7, 5, 0, 1)$ **4.7.7** $x_1 = 0, x_2 = \frac{t-2s}{3}$, $x_3 = t \in \mathbb{R}$ $x_4 = 0$, $x_5 = s \in \mathbb{R}$ neboli $t\left(0, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) + s\left(0, -\frac{2}{3}, 0, 0, 1\right)$ **4.7.8** $x_1 = -3t - 5s, x_2 = 2t + 3s$, $x_3 = t \in \mathbb{R}$ $x_4 = 0$ $x_5 = s \in \mathbb{R}$ neboli $t\,(-3, 2, 1, 0, 0) + s\,(-5, 3, 0, 0, 1)$**4.7.9** $x_1 = t \in \mathbb{R}$ $x_2 = s \in \mathbb{R}$ $x_3 = -\frac{5}{2}t + 5s, x_4 = \frac{7}{2}t - 7s$, neboli $t\left(1, 0, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) + s\,(0, 1, 5, -7)$ **4.7.10** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ **4.7.11** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, **4.7.13** $x_1 = \frac{t-9s-2}{11}$, $x_2 = \frac{-5t+s+10}{11}$, $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_4 = s \in \mathbb{R}$ neboli $\left(-\frac{-2}{11}, \frac{10}{11}, 0, 0\right) + t\left(\frac{1}{11}, -\frac{5}{11}, 1, 0\right) + s\left(-\frac{9}{11}, \frac{1}{11}, 0, 1\right)$ **4.7.14**$x_1 = \frac{7+12t+s}{18}$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_3 = \frac{1-5s}{6}$, $x_4 = s \in \mathbb{R}$ neboli $\left(-\frac{7}{18}, \frac{1}{6}, 0, 0\right) + t\left(\frac{12}{18}, 0, 1, 0\right) + s\left(\frac{1}{18}, -\frac{5}{18}, 0, 1\right)$ **4.7.15** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ **4.7.16**$x_1 = \frac{-6+8t}{7}$, $x_2 = \frac{1-13t}{7}$, $x_3 = \frac{15-6t}{7}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$ neboli $\left(-\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{15}{7}, 0\right) + t\left(\frac{8}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{6}{7}, 1\right)$ **4.7.17** $x_1 = \frac{3t+31}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{-7-3t}{6}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$ neboli $\left(\frac{31}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, 0\right) + t\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)$**4.7.18** soustava nemá řešení **4.7.19** soustava nemá řešení **4.7.20** $x_1 = -\frac{12}{205}, x_2 = \frac{176}{123} + \frac{4}{3}s, x_3 = s \in \mathbb{R}, x_4 = \frac{97}{205}$ neboli $\left(-\frac{12}{205}, \frac{176}{123}, \frac{97}{205}, 0\right) + s\left(0, \frac{4}{3}, 0, 1\right)$ **4.7.21** $x_1 = \frac{1+s}{3}$ $x_2 = \frac{1+3p+3t-5s}{3}$, $x_3 = p \in \mathbb{R}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$, $x_5 = s \in \mathbb{R}$ neboli $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right) + p\,(0, 3, 1, 0, 0) + t\,(0, 3, 0, 1, 0) + s\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0, 1\right)$ **4.7.22** $x_1 = t \in \mathbb{R}$ $x_2 = p \in \mathbb{R}$, $x_3 = 2p - t$, $x_4 = 1$, neboli $(0, 0, 0, 1) + t\,(1, 0, -1, 0) + p\,(0, 1, 2, 0)$ **4.7.23** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$ **4.7.24** $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ **4.7.25** soustava nemá řešení **4.7.26** $x_1 = \frac{1+5t}{6}$, $x_2 = \frac{1-7t}{6}$, $x_3 = \frac{1+5t}{6}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$ neboli $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0\right) + t\left(\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}, \frac{5}{6}, 1\right)$ **4.7.27** $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = -2$ **4.7.28** $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$ **4.7.29** $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{12}p - \frac{5}{4}t - \frac{7}{8}s$, $x_2 = p \in \mathbb{R}$, $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_4 = 1 - \frac{1}{2}s$, $x_5 = s \in \mathbb{R}$ neboli $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 1, 0\right) + p\,(0, 1, 0, 0, 0) + t\,(0, 0, 1, 0, 0) + s\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)$ **4.7.30** $x_1 = t - \frac{53}{18}s + \frac{20}{9}, x_2 = -\frac{5}{2}t + \frac{5}{6}s - \frac{5}{3}, x_3 = \frac{2}{9}s - \frac{1}{9}, x_4 = t \in \mathbb{R}, x_5 = s \in \mathbb{R}$ neboli $\left(\frac{20}{9}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{9}, 0, 0\right) + t\left(1, -\frac{5}{2}, 0, 1, 0\right) + s\left(-\frac{53}{18}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}, 0, 1\right)$ **4.7.31** $x_1 = -1, x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ **4.7.32** $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$**4.7.33** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$ **4.7.34** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$ **4.7.35** $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$, $x_4 = -2$ $x_5 = 1$ **4.7.36** $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ **4.7.37** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ **4.7.38** $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$

4.8 Vektorové prostory

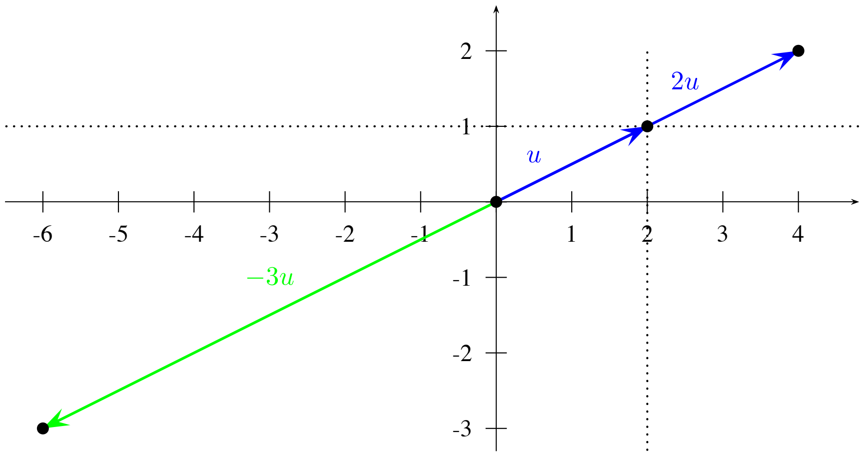
Motivační úvaha I.
Než zavedeme pojem vektorového prostoru, připomeneme si pojem vektoru, jak ho známe ze střední školy. Abychom si mohli vektory zobrazovat graficky, omezíme se v motivační úvaze na vektory se dvěma složkami. Takové vektory si můžeme zobrazit v rovině. Vektor $\mathbf{u} = (2, 1)$ vidíme na Obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Vektor

První složka vektoru je vzdálenost od počátku souřadných os na ose x a druhá složka vektoru je vzdálenost od počátku souřadných os na ose y. Daný vektor je pak spojnicí počátku souřadných os a bodu o souřadnicích $[2, 1]$. Tedy úhlopříčkou obdélníka o stranách 2 cm a 1 cm.

Každý vektor umíme násobit reálným číslem. Násobit vektor reálným číslem znamená vynásobit tímto reálným číslem každou jeho složku. Graficky znamená vynásobení vektoru kladným reálným číslem α α-krát zvětšit orientovanou úsečku původního vektoru ve stejném směru jako původní vektor. Vynásobení vektoru záporným reálným číslem α graficky znamená α-krát zvětšit orientovanou úsečku původního vektoru v opačném směru než původní vektor. Na Obrázku 4.3 je zobrazen vektor $\mathbf{u} = (2, 1)$, jeho dvojnásobek a mínus trojnásobek.

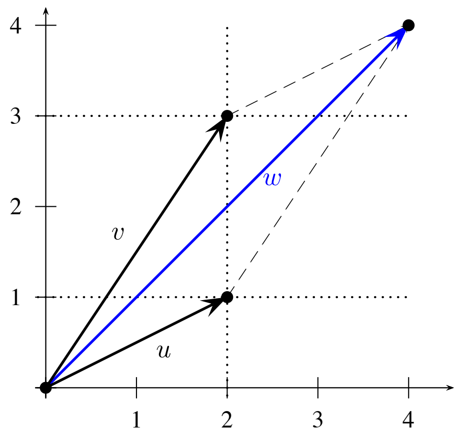


Obrázek 4.3: Násobek vektorů

Vektory umíme také sčítat. Součet dvou vektorů je opět vektor. Jeho první složka je součet prvních složek sčítaných vektorů a jeho druhá složka je součet druhých složek sčítaných vektorů. Graficky nalezneme součet vektorů tak, že vektory doplníme na rovnoběžník, a součet vektorů je pak úhlopříčka tohoto rovnoběžníku. Na Obrázku 4.4 je znázorněn součet vektorů $\mathbf{u} = (2, 1)$ a $\mathbf{v} = (2, 3)$. Jak by vypadal součet třeba tří vektorů? Součet prvních dvou vektorů je vektor a ten umíme sečíst se třetím vektorem. Když se zamyslíme, znamená to, že souřadnice výsledného vektoru, který je součet tří vektorů, dostaneme jako součet příslušných složek tří sčítaných vektorů. Neboli

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ &= (u_1, u_2) + (v_1, v_2) + (w_1, w_2) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2). \end{aligned}$$

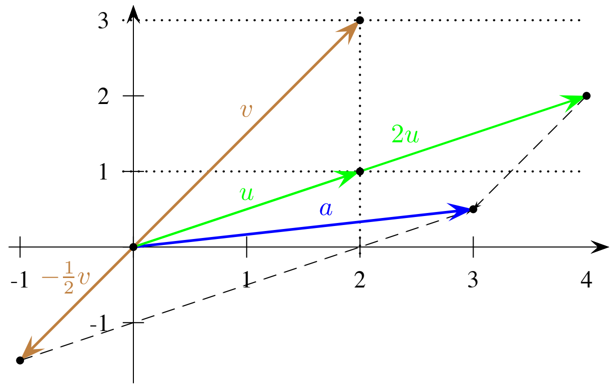
Uvědomme si, že stejně můžeme nalézt součet obecně n vektorů.



Obrázek 4.4: Součet vektorů

Nyní si všimneme dalších vlastností, které si později zobecníme. Již víme, že součet dvou a více vektorů je opět vektor a víme, jak tento vektor najít. Umíme také vektor vynásobit reálným číslem. Násobek vektoru je zase vektor o stejném počtu složek jako násobený vektor. A umíme tyto dvě operace zkombinovat? Umíme sečíst různé násobky dvou a více vektorů? Vezměme například vektory $\mathbf{u} = (2, 1)$ a $\mathbf{v} = (2, 3)$ a nalezněme vektor $\mathbf{a} = 2\mathbf{u} + (-\frac{1}{2})\mathbf{v}$.

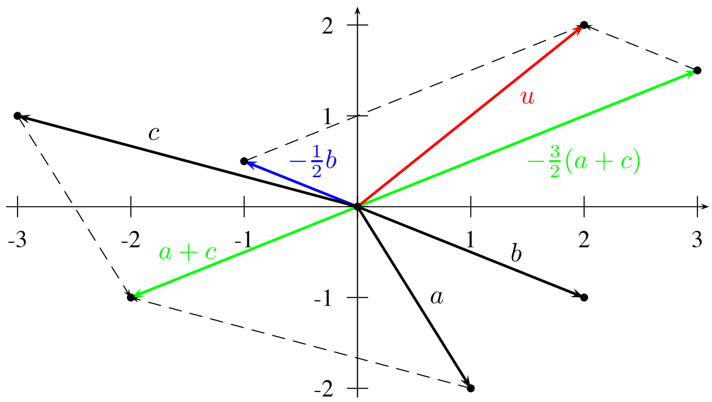
Dvojnásobek vektoru **u** graficky znamená prodloužení vektoru **u** na dvojnásobnou délku ve stejném směru. Vektor, který je polovičním násobkem vektoru **v** s mínusovým znaménkem, bude orientován na opačnou stranu a bude mít poloviční délku vektoru **v**. Tyto dva vektory doplníme na rovnoběžník a jeho úhlopříčka je hledaný vektor **a**. A protože vektor **a** vznikl zkombinováním vektorů **u** a **v**, budeme říkat, že vektor **a** je lineární kombinací vektorů **u** a **v**. Hledaný vektor vidíme na Obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Lineární kombinace vektorů

Nyní naše úvahy otočíme. Zamyslíme se nad problémem nalezení lineární kombinace k danému vektoru. Uvažujme například vektor $\mathbf{u} = (2, 2)$ a ptejme se, zda tento vektor můžeme „vytvořit" (zkombinovat) ze tří vektorů $\mathbf{a} = (1, -2)$, $\mathbf{b} = (2, -1)$ a $\mathbf{c} = (-3, 1)$. Na Obrázku 4.6 vidíme, že stačí sečíst vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$ (neboli najít úhlopříčku rovnoběžníku o stranách daných vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$), u vzniklého vektoru otočit orientaci a jeho délku ještě prodloužit $1,5$ krát a nakonec tento vektor sečíst s vektorem $\mathbf{b}$ zkráceným na polovinu délky a s otočenou orientací. Neboli vektor **u** je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$.

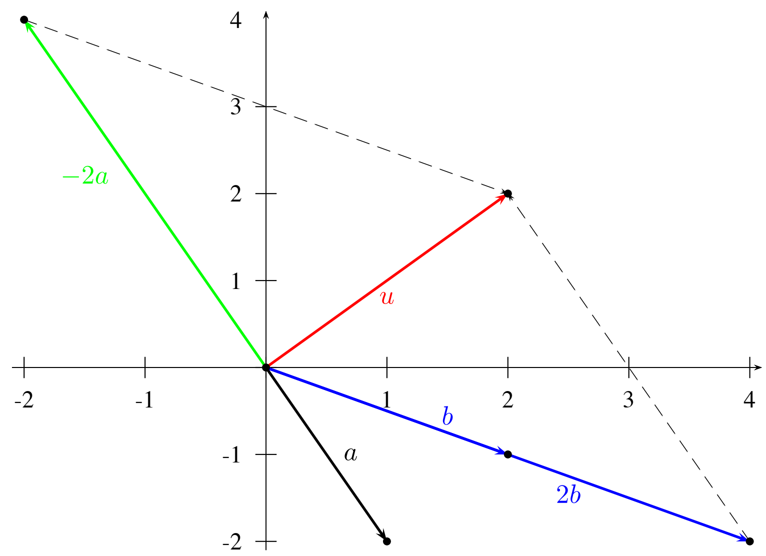
$$\mathbf{u} = -\frac{3}{2}\mathbf{a} + \left(-\frac{3}{2}\right)\mathbf{c} + \left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{b}$$



Obrázek 4.6: Tři generátory

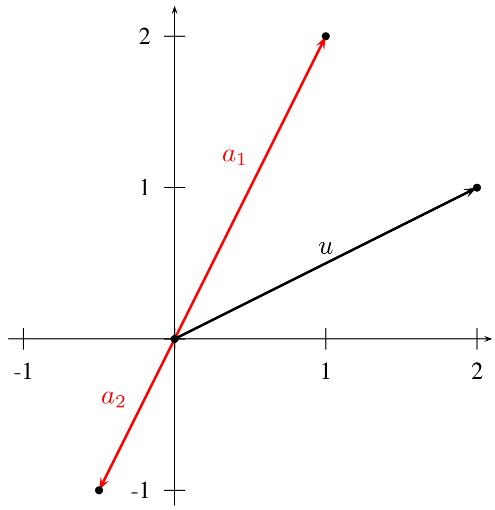
A ještě jiný úhel pohledu. Vektor **u** nenese novou informaci. Můžeme ho vytvořit z jiných vektorů, v našem konkrétním příkladě ze tří vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$. Uměli bychom pomocí těchto tří vektorů vytvořit jiný vektor? Jistěže bychom uměli. Pomocí těchto tří vektorů vytvoříme (vygenerujeme) jakýkoli vektor se dvěma složkami. Takovéto vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ budeme nazývat *generátory*.

Další otázkou bude, jestli by těch vektorů nemohlo být méně. Můžeme například vektor $\mathbf{u} = (2, 2)$ zkombinovat jen z vektorů $\mathbf{a} = (1, -2)$ a $\mathbf{b} = (2, -1)$? Víme, že vektor **u** má být úhlopříčka jistého rovnoběžníku, jehož strany jsou odvozeny z vektorů



Obrázek 4.7: Dva generátory

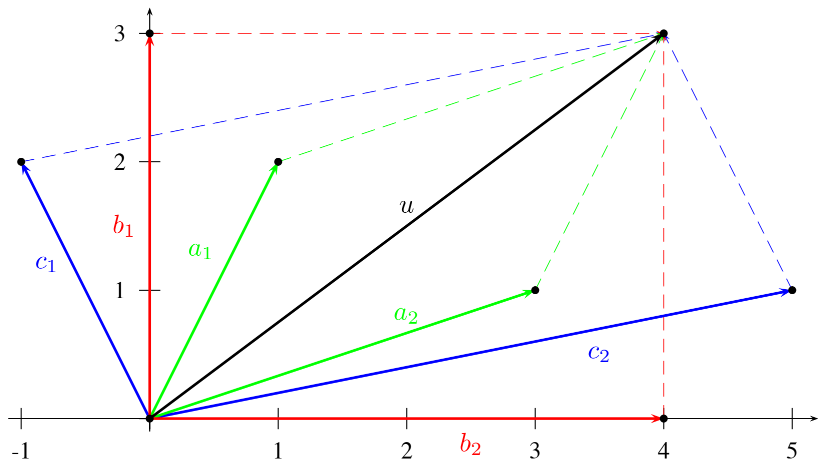
$\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Vidíme, že u vektoru $\mathbf{a}$ musíme změnit orientaci a délku vektoru zdvojnásobit, vektor $\mathbf{b}$ stačí jen zdvojnásobit. Výsledek vidíme na Obrázku 4.7. Jistě si dovedeme představit, že podobně bychom postupovali, kdybychom pomocí těchto dvou vektorů chtěli vytvořit jakýkoli jiný vektor, než jen vektor $\mathbf{u}$. Jakýkoli vektor v rovině můžeme tedy vygenerovat pomocí vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Stačil by na to jen jeden vektor? Ten již ne. Vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ jsou nejmenším počtem vektorů, pomocí kterých můžeme vytvořit jakýkoli vektor v rovině.



Obrázek 4.8: Závislé vektory

Nyní se zeptáme, zda pomocí jakýchkoli dvou vektorů v rovině můžeme vytvořit pomocí lineární kombinace všechny ostatní vektory v rovině. Vezměme například vektor $\mathbf{u} = (2, 1)$ a ptejme se, zda pomocí vektorů $\mathbf{a_1} = (1, 2)$ a $\mathbf{a_2} = (-\frac{1}{2}, -1)$ můžeme vektor $\mathbf{u}$ vytvořit. Myslíme vytvořit pomocí reálných násobků vektorů a sčítání vektorů. Vektory jsou na Obrázku 4.8. Z tohoto obrázku vidíme, že v tomto případě se nám nepodaří vytvořit rovnoběžník, jehož úhlopříčka bude vektor $\mathbf{u}$ a strany budou násobky veltorů $\mathbf{a_1}$ a $\mathbf{a_2}$. Problém je v tom, že vektory $\mathbf{a_1}$ a $\mathbf{a_2}$ leží v jedné přímce. Vektory leží v jedné přímce proto, že jeden vektor $\mathbf{a_1}$ je násobkem druhého vektoru $\mathbf{a_2}$. Takové dva vektory budeme nazývat lineárně závislé. Dva vektory, pomocí nichž budeme moci vytvořit (vytvořit ve smyslu reálných násobků vektorů a sčítání vektorů) jakýkoli jiný vektor v rovině, budou muset být naopak lineárně nezávislé, neboli jeden nebude násobkem druhého. Jinými slovy nebudou ležet na jedné přímce. Takovou množinu vektorů, pomocí nichž umíme vytvořit všechny vektory v rovině a zároveň je jich nejnižší možný počet, budeme nazývat bází.

V rovině to budou jakékoli dva vektory, kreré budou mít různé směry, nebudou ležet v jedné přímce. Tedy taková báze nebude existovat jediná. Na Obrázku 4.9 je vidět, že vektory $\mathbf{a_1} = (3,1)$, $\mathbf{a_2} = (1,2)$, ale i vektory $\mathbf{b_1} = (4,0)$, $\mathbf{b_2} = (0,3)$ a rovněž vektory $\mathbf{c_1} = (-1,2)$, $\mathbf{c_2} = (5,1)$ při doplnění na rovnoběžník mají stejnou úhlopříčku, kterou je vektor $\mathbf{u} = (4,3)$.



Obrázek 4.9: Báze

Shrneme tedy naše úvahy. V rovině jsme uměli vektory sčítat a násobit reálným číslem. Uvědomili jsme si, že existují vektory, pomocí nichž jsme získali (vygererovali) libovolný vektor v rovině. Nejmenší počet takových vektorů byl dva, ale tyto dva vektory nesměly ležet v jedné přímce (byly lineárně nezávislé). V dalším uvidíme, že tyto vlastnosti můžeme zobecnit na vektory, které mají více než jen dvě reálné složky. Uděláme však malou změnu. Vektory ve smyslu reálných n-tic budeme definovat jako sloupce. Dále dokonce tyto vlastnosti zobecníme na vektory, které vůbec nemají tvar n-tice reálných čísel.

4.8.1 Vektorové prostory - základní pojmy

Definice 4.8.1. Zobrazení $\varpi : V \times V \to V$ se nazývá *binární operace* na množině V.

V předchozí definici $V \times V = \{[x,y]; x \in V \wedge y \in V\}$ značí kartézský součin množin. Definice binární operace pak říká: každým dvěma prvkům z V přiřadíme binární operací jednoznačně určený prvek opět z V. Operace bývají často označovány symboly: $+$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$, $\odot$, …atd. V další části textu budeme pracovat s aritmetickým vektorovým prostorem.

Definice 4.8.2. *Aritmetický n-rozměrný vektorový prostor* $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic reálných čísel $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Jednotlivá u_i nazýváme i-tá složka (souřadnice) vektoru $\mathbf{u}$.

Prvky aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme jako sloupcové vektory. Pokud vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbb{R}^n$ chceme zapsat jako řádkový vektor, píšeme $\mathbf{u}^T$ (nám již známá operace transponování matic) .

Pro prvky z $\mathbb{R}^n$ jsou operace $+$ sčítání vektorů a operace $\cdot$ násobení reálným číslem definovány následovně

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \quad a\cdot\mathbf{x} = a\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot x_1 \\ a\cdot x_2 \\ \vdots \\ a\cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Obě operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem se převedou na klasické operace sčítání a násobení jednotlivých složek vektorů, tedy reálných čísel. Uvědomme si, sčítání vektorů je definováno jen pro vektory z téhož aritmetického vektorového prostoru, a tudíž můžeme sčítat pouze vektory, které mají stejný počet složek.

Rovnost dvou vektorů je definována následujícím způsobem

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{matrix}.$$

Aby si dva vektory mohly být rovny, musí tedy mít stejný počet složek a navíc se jejich odpovídající složky rovnají.

Definice 4.8.3. *Nulovým vektorem* budeme nazývat vektor, jehož všechny složky jsou rovny nule. Takový vektor budeme značit $\mathbf{o}$.

Definice 4.8.4. *Jednotkový vektor* $\mathbf{e_i}$ je vektor, jehož všechny složky jsou rovny nule až na i-tou složku, která je rovna jedné.

Například $\mathbf{e_1} \in \mathbb{R}^2$ je vektor tvaru $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$ je vektor tvaru $\mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Takto zadefinovaný aritmetický vektorový prostor můžeme ještě zobecnit. Nemusíme se omezit pouze na sloupcové vektory reálných čísel. Zadefinujme (obecný) vektorový prostor, jehož prvky splňují jisté vlastnosti při operaci sčítání a násobení reálným číslem.

Definice 4.8.5. Mějme dánu množinu V, na které je definována operace sčítání vektorů $+$ a operace $\cdot$, která značí násobení prvků z V reálným číslem. Množinu V budeme nazývat *vektorovým prostorem* a její prvky budeme nazývat *vektory*, jestliže pro tyto operace bude platit následující:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \qquad \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$ (*komutativita operace* $+$)
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \qquad (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (*asociativita operace* $+$)
3. $\exists \mathbf{o} \in V, \forall \mathbf{x} \in V \qquad \mathbf{x}+\mathbf{o} = \mathbf{x}$ (*existence nulového prvku operace* $+$)
4. $\forall \mathbf{x} \in V, \exists (-\mathbf{x}) \in V \qquad \mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ (*existence inverzního prvku operace* $+$)
5. $\forall \mathbf{x} \in V \qquad 1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$
6. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V \qquad a\cdot(b\cdot\mathbf{x}) = (ab)\cdot\mathbf{x}$
7. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V \qquad (a+b)\cdot\mathbf{x} = a\cdot\mathbf{x}+b\cdot\mathbf{x}$
8. $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \qquad a\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a\cdot\mathbf{x}+a\cdot\mathbf{y}$

Prvky z V budeme nazývat vektory.

Z této definice plyne, že takovým vektorovým prostorem může být například množina všech polynomů stupně nejvýše n. Připomínáme, že v kapitole o funkcích jsme zavedli pojem sčítání polynomů a násobení polynomu reálným číslem. S takto definovaným vektorovým prostorem si nyní zavedeme nové pojmy, které jsme zmínili v motivační úloze.

Definice 4.8.6. Neprázdnou podmnožinu W vektorového prostoru V nazveme *podprostorem* vektorového prostoru V, jestliže W je vektorovým prostorem vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení reálnými čísly. Značíme $W \subseteq\subseteq V$.

Definice 4.8.7. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou reálná čísla a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Pak vektor $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$ je také vektor z prostoru V. Takovýto vektor $\mathbf{v}$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se nazývají *koeficienty lineární kombinace*. Jestliže v lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou všechny koeficienty lineární kombinace $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rovny nule, mluvíme o *triviální lineární kombinaci*. Je-li alespoň jeden z koeficientů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ různý od nuly, pak hovoříme o *netriviální lineární kombinaci* vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Příklad 4.57

4.57. Nalezněte vektor $\mathbf{z}$, který je lineární kombinací vektoru $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a vektoru $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ s koeficienty lineární kombinace $\alpha_1 = 2$ a $\alpha_2 = -1$.

Řešení: Z definice lineární kombinace dostaneme

$$\mathbf{z} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Hledaný vektor je $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Příklad 4.58

4.58. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ je lineární kombinací následujících vektorů

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Pokud vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, musí existovat taková reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, aby byla splněna rovnost $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z}$. V této vektorové rovnici postupně vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vynásobíme reálnými čísly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a vzniklé vektory sečteme po složkách.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 1 \\ \alpha_1 \cdot (-1) \\ \alpha_1 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \cdot 2 \\ \alpha_2 \cdot 0 \\ \alpha_2 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 \cdot (-1) \\ \alpha_3 \cdot 2 \\ \alpha_3 \cdot (-6) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot (-1) \\ \alpha_1 \cdot (-1) + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 2 \\ \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot (-6) \end{pmatrix}$$

Nakonec porovnáme tyto vektory a dostaneme soustavu lineárních rovnic pro tři neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ -1 &= -\alpha_1 + 2\alpha_3 \\ 2 &= 3\alpha_1 - 6\alpha_3 \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic budeme řešit Gaussovou metodou. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy, kterou podle dále naznačených úprav neměnících hodnost matice převedeme do Gaussova tvaru.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

Sečtením trojnásobku druhého řádku s třetím řádkem dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Hodnost matice soustavy je dva a hodnost rozšířené matice soustavy je tři. Protože se hodnosti liší, soustava lineárních rovnic nemá řešení, a tedy neexistují žádná reálná čísla α_1, α_2, α_3, aby byla splněna rovnost $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z}$. Vektor $\mathbf{u}$ není lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Příklad 4.59

4.59. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ je lineární kombinací následujících vektorů

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, pokud existují reálná čísla α_1, α_2, α_3, která splňují rovnost $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z}$. V této rovnici vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ postupně vynásobíme reálnými čísly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a dále vektory sečteme po složkách.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 3 \\ \alpha_1 \cdot 1 \\ \alpha_1 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \cdot 2 \\ \alpha_2 \cdot 4 \\ \alpha_2 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 \cdot 1 \\ \alpha_3 \cdot 1 \\ \alpha_3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 1 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 1 \\ \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

Dostaneme soustavu lineárních rovnic pro tři neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\begin{aligned} 5 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ 4 &= \alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 \\ -1 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic budeme opět řešit Gaussovou metodou. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a tu budeme podle naznačených úprav neměnících hodnost matice převádět do Gaussova tvaru.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3 \quad -2 \\ + \\ + \end{array} \sim$$

Dále dostaneme

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -10 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & -3 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1 \\ | \cdot (-2) \ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -10 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{array}\right).$$

Dostali jsme matici v Gaussově tvaru. Hodnost rozšířené matice soustavy je tři, stejně tak hodnost matice soustavy je tři. Soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení. Zapíšeme ekvivalentní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 &= 4 \\ -10\alpha_2 - 2\alpha_3 &= -7 \\ 4\alpha_3 &= 11. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice dostaneme, že $\alpha_3 = \frac{11}{4}$. Tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice a dostaneme $\alpha_3 = \frac{3}{20}$. Nakonec dosazením již známých hodnot α_2 a α_3 do první rovnice vypočteme $\alpha_1 = \frac{13}{20}$. Našli jsme koeficienty lineární kombinace. Zjistili jsme, že pro zadaný vektor $\mathbf{u}$ platí rovnost

$$\mathbf{u} = \frac{13}{20}\mathbf{x} + \frac{3}{20}\mathbf{y} + \frac{11}{4}\mathbf{z}.$$

Vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Definice 4.8.8. Mějme lineární kombinaci vektorů vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ z vektorového prostoru V, která je rovna nulovému vektoru, neboli $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$. Pokud je tato rovnost splněna pouze tehdy, když se jedná o triviální lineární kombinaci, řekneme, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou *lineárně nezávislé*. Pokud existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ rovná nulovému vektoru, pak tyto vektory nazýváme *lineárně závislé*.

Příklad 4.60

4.60. Zjistěte, zda následující vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé nebo lineárně závislé.

Řešení: Hledáme koeficienty α_1, α_2 a α_3 lineární kombinace $\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z}$, pro které platí

$$\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z} = \mathbf{o}.$$

Pokud daná rovnost bude platit pouze pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, pak jsou vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ lineárně nezávislé. Pokud tato rovnost bude splněna i pro některé $\alpha_i \neq 0, i = 1, 2, 3,$

pak jsou vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ lineárně závislé. Do vztahu $\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z} = \mathbf{o}$ dosadíme a postupně roznásobíme a sečteme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ -1\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_3 \\ 7\alpha_3 \\ 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Porovnáním těchto dvou vektorů dostaneme soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé α_1, α_2 a α_3.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tuto homogenní soustavu rovnic vyřešíme pomocí matice soustavy.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad 1 \\ + \\ \quad\quad + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 4 \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že matice soustavy je regulární. Homogenní soustava má pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Z toho plyne, že jsou vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ lineárně nezávislé.

Příklad 4.61

4.61. Zjistěte, zda následující vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé nebo lineárně závislé.

Řešení: Pokud platí rovnost

$$\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z} = \mathbf{o}$$

pouze pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, budou vektory lineárně nezávislé. V opačném případě budou lineárně závislé. Roznásobením a sečtením vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ v této rovnici a rozepsáním po složkách dostaneme následující homogenní soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Zapíšeme matici soustavy a zjistíme hodnost matice.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3 \quad 2 \\ + \\ \quad\quad + \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

V poslední matici je druhý a třetí řádek stejný. Hodnost této matice je dva a matice je tedy singulární. Homogenní soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení a tedy existuje i netriviální lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, která je rovna nulovému vektoru. Zadané vektory jsou lineárně závislé.

Definice 4.8.9. Nechť M je neprázdná podmnožina V. *Lineárním obalem* množiny M nazveme množinu všech lineárních kombinací vektorů z M. Lineární obal množiny M budeme značit $[M]$.

Příklad 4.62

4.62. Zjistěte, zda daný vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ patří do lineárního obalu množiny

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Řešení: Pokud vektor $\mathbf{x}$ patří do lineárního obalu množiny M, musí být nějakou lineární kombinací vektorů $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. To znamená, že existují koeficienty lineární kombinace α_1, α_2 takové, aby platilo

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Z této vektorové rovnice dostaneme následující soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} -1 &= 4\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2 &= 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 3 &= \alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned}$$

Vyřešme tuto soustavu rovnic opět Gaussovou metodou. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a zjistíme její hodnost.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ + \\ \quad\quad + \end{array}$$

Dále dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-5) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

Hodnost matice soustavy je dva, hodnost rozšířené matice soustavy je tři. Protože tyto hodnosti jsou různé, podle Frobeniovy věty dostáváme, že soustava lineárních rovnic nemá řešení, a tedy vektor $\mathbf{x}$ nepatří do lineárního obalu množiny M.

Definice 4.8.10. Nechť A je neprázdná podmnožina V. Řekneme, že množina A je *množinou generátorů* vektorového prostoru V, jestliže platí $V = [A]$.

Definice 4.8.11. Nechť A je neprázdná podmnožina V a nechť A je množinou generátorů vektorového prostoru V. Řekneme, že množina vektorů A je *bází* vektorového prostoru V, jestliže vektory této množiny A jsou lineárně nezávislé.

Definice 4.8.12. Nechť A je neprázdná podmnožina V a nechť A je bází vektorového prostoru V. Počet prvků množiny A nazveme *dimenzí* vektorového prostoru V.

Příklad 4.63

4.63. Nalezněte bázi vektorového prostoru W, který je generován vektory

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vektorový prostor W je generován zadanými vektory. Aby tvořily bázi, musí být lineárně nezávislé nebo z nich musíme vybrat takovou podmnožinu, která obsahuje lineárně nezávislé vektory. Ověřme, zda lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, která je rovna nulovému vektoru, je pouze triviální či netriviální. Hledáme koeficienty α_1, α_2, α_3, pro které platí $\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} + \alpha_3\mathbf{z} = \mathbf{o}$.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1 \\ 3\alpha_1 \\ (-1)\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_3 \\ 1\alpha_3 \\ (-3)\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ (-1)\alpha_1 + 2\alpha_2 + (-3)\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostáváme soustavu tří lineárních rovnic pro neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{aligned} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme řešit pomocí Gaussovy metody. Jedná se o homogenní soustavu rovnic. Zapíšeme matici soustavy a budeme tuto matici pomocí naznačených úprav za maticí upravovat na horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot 4 \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

Protože třetí řádek je násobkem druhého řádku, můžeme ho vynechat. Přepíšeme ekvivalentní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ 8\alpha_2 - 8\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Protože hodnost matice soustavy je dva a máme tři neznámé, soustava má nekonečně mnoho řešení. Můžeme těchto nekonečně mnoho řešení vyjádřit pomocí jednoho parametru. Volme $\alpha_3 = t$, pak ze druhé rovnice plyne $\alpha_2 = t$. Dále z první rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + 2t - 3t &= 0 \\ \alpha_1 &= -t. \end{aligned}$$

Řešením homogenní soustavy rovnic je každá uspořádaná trojice $[-t, t, t]$, kde $t \in \mathbb{R}$. Protože existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, která je rovna nulovému vektoru, jsou tyto vektory lineárně závislé. Zadané tři generátory tedy netvoří bázi. Vybereme ze zadané množiny generátorů takovou podmnožinu, která je lineárně nezávislá. Zkusíme ověřit, zda například vektor $\mathbf{x}$ nelze vytvořit pomocí lineární kombinace vektorů $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$. Hledáme takové koeficienty lineární kombinace β_1, β_2, aby platila vektorová rovnice $\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \cdot 2 \\ \beta_1 \cdot 2 \\ \beta_1 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_2 \cdot 2 \\ \beta_2 \cdot 1 \\ \beta_2 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \cdot 2 + \beta_2 \cdot 2 \\ \beta_1 \cdot 2 + \beta_2 \cdot 1 \\ \beta_1 \cdot 2 + \beta_2 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

Porovnáním jednotlivých složek těchto dvou vektorů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4 &= 2\beta_1 + 2\beta_2 \\ 3 &= 2\beta_1 + \beta_2 \\ -1 &= 2\beta_1 - 3\beta_2. \end{aligned}$$

Tuto soustavu lineárních rovnic opět vyřešíme Gaussovou metodou.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je stejná - dva. Počet neznámých byl taky dva. Tato soustava rovnic má právě jedno řešení a my vidíme, že vektor $\mathbf{x}$ se dá vytvořit pomocí lineární kombinace vektorů $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Zjistili jsme, že vektor $\mathbf{x}$ se dá vytvořit z vektorů $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, které jsou lineárně nezávislé a generují vektorový prostor W. Vektory $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ jsou tedy bází vektorového prostoru W. Dodejme ještě, že z toho plyne, že vektorový prostor W má dimenzi dva. Jeho bázi tvoří dva vektory. V daném příkladu bychom stejným způsobem ukázali, že vektor $\mathbf{y}$ se dá vytvořit pomocí lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$, a tudíž vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ generují vektorový prostor W a jsou lineárně nezávislé. Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ jsou také bází vektorového prostoru W.

Na tomto příkladu jsme si uvědomili, že báze vektorového prostoru není určena jednoznačně. Naproti tomu dimenze vektorového prostoru jednoznačně určena je.

Definice 4.8.13. Vektorový prostor V nazveme *triviální vektorový prostor*, jestliže $V = \emptyset$.

Poznamenejme, že dimenze triviálního vektorového prostoru je nula. Dimenze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ je n.

Věta 4.8.14 (Lineární závislost ve vektorovém prostoru dimenze n)**.** *Každá skupina $n+1$ vektorů z vektorového prostoru dimenze n je lineárně závislá.*

Z předchozího vyplývá, že každá báze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ obsahuje n vektorů. Příkladem báze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ je tzv. *kanonická báze*. Tato báze je množina jednotkových vektorů e_i, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ z $\mathbb{R}^n$. Tak například kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^3$ je množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.64. Nalezněte dimenzi vektorového prostoru $[M]$, kde $M = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a nalezněte alespoň dvě jeho báze. **Příklad 4.64**

Řešení: Zadaná množina je množina generátorů. Jsou-li zadané vektory navíc lineárně nezávislé, tvoří bázi vektorového prostoru $[M]$. Lineární nezávislost ověříme vypočtením koeficientů lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, která je rovna nulovému vektoru.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 6 \\ \alpha_1 \cdot (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \cdot 2 \\ \alpha_2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 6 + \alpha_2 \cdot 2 \\ \alpha_1 \cdot (-2) + \alpha_2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porovnáním složek těchto dvou vektorů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 6\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme $\alpha_2 = -3\alpha_1$ a tento vztah dosadíme do druhé rovnice. Máme

$$-2\alpha_1 + 4(-3\alpha_1) = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0.$$

Pak také $\alpha_2 = 0$. Soustava lineárních rovnic pro neznámé α_1, α_2 má jediné, triviální řešení, a tudíž vektory $\mathbf{u} = (6, 2)^T$ a $\mathbf{v} = (-2, 4)^T$ jsou lineárně nezávislé. A zároveň generují vektorový prostor $[M]$, jsou tedy bází vektorového prostoru $[M]$. Dimenze tohoto prostoru je dva. Protože aritmetický vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ má také dimenzi dvě a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, musí platit $[M] = \mathbb{R}^2$. Jiná báze $[M]$ je potom například kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^2$, tedy vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$. Dokonce jakékoli dva lineárně nezávislé dvousložkové vektory tvoří bázi $[M] = \mathbb{R}^2$.

S dosud zavedenými pojmy můžeme jiným způsobem zadefinovat již známý pojem hodnost matice. A následně využít pojmu matice k vyšetřování lineární závislosti vektorů.

Definice 4.8.15. *Hodností matice* A typu $m \times n$ nazveme číslo, které je rovno dimenzi vektorového prostoru generovaného řádkovými vektory matice A. Hodnost matice A značíme $h(A)$.

Řádkovými vektory matice A typu $m \times n$ rozumíme řádky matice, na které nahlížíme jako na vektory z prostoru $\mathbb{R}^n$.

4.65. Zjistěte, zda vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé. **Příklad 4.65**

Řešení: Dané vektory napíšeme jako řádky matice a zjistíme její hodnost. Pokud je hodnost matice rovna počtu jejích řádků, vektory jsou lineárně nezávislé. Pokud je hodnost matice menší, než je počet jejích řádků, vektory jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -16 & -23 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -16 & -23 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Protože hodnost matice je 3 a počet jejích řádků je také 3, dané vektory jsou lineárně nezávislé.

4.9 Cvičení

4.9.1. Vypočtěte vektor $\mathbf{x}$, pro který platí $\mathbf{x} = 2\cdot\mathbf{u}+(-3)\cdot\mathbf{v}$, kde vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4.9.2. Nalezněte koeficienty lineární kombinace vektorů $\mathbf{u} = (2,1)^T$ a $\mathbf{v} = (3,2)^T$, která je rovna vektoru $\mathbf{x} = (1,1)^T$.

4.9.3. Nalezněte koeficienty lineární kombinace vektorů $\mathbf{u} = (2,1)^T$ a $\mathbf{v} = (3,2)^T$, která je rovna vektoru $\mathbf{x} = (2,3)^T$.

4.9.4. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (2,2,7,-1)^T$ je lineární kombinací následujících vektorů $\mathbf{u} = (3,-1,2,4)^T$ a $\mathbf{v} = (1,1,3,1)^T$.

4.9.5. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (3,5,-13,11)^T$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u} = (3,2,-5,4)^T$ a $\mathbf{v} = (3,-1,3,-3)^T$.

4.9.6. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (1,0,-7)^T$ patří do lineárního obalu vektorů $\mathbf{u} = (2,1,-3)^T$, $\mathbf{v} = (3,1,-5)^T$ a $\mathbf{w} = (4,2,-1)^T$.

4.9.7. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{x} = (4,-1,15,17)^T$ a $\mathbf{y} = (7,-6,-7,0)^T$ patří do lineárního obalu vektorů následujících vektorů $\mathbf{u} = (2,-1,3,5)^T$, $\mathbf{v} = (4,-3,1,3)^T$ a $\mathbf{w} = (3,-2,3,4)^T$.

4.9.8. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (2,1,-1,1)^T$ patří do lineárního obalu vektorů $\mathbf{u} = (1,2,1,-1)^T$ a $\mathbf{v} = (1,1,2,1)^T$.

Rozhodněte o lineární závislosti či lineární nezávislosti následujících vektorů.

4.9.9. $(2,3,-4,-1)^T, (1,-2,1,3)^T, (5,-3,-1,8)^T$

4.9.10. $(3,8,-9,-5),^T\ (1,-2,1,3),^T\ (2,3,-4,-1)^T$

4.9.11. $(1,4,-2),^T\ (1,-3,2),^T\ (4,3,-5)^T$

4.9.12. $(-5,0,4),^T\ (1,1,-2),^T\ (0,3,-1)^T\ (2,-2,1)^T$

4.9.13. $(2,1,3,1),^T\ (1,2,0,1),^T\ (-1,1,-3,0)^T$

4.9.14. $(1,1,0,1),^T\ (1,-2,2,1),^T\ (-3,1,-3,-1)^T$

4.9.15. $(2,1,3,-1),^T\ (-1,1,-3,1),^T\ (4,5,3,-1)^T\ (1,5,-3,1)^T$

4.9.16. $(0,1,7,-1),^T\ (2,1,-3,1),^T\ (-3,0,2,1)^T\ (1,-1,4,0)^T$

4.9.17. $(1,1,3,1),^T\ (3,-1,2,4),^T\ (2,2,7,-1)^T$

4.9.18. $(5,4,2),^T\ (-1,-1,-1),^T\ (-3,-2,0)^T$

4.9.19. Rozhodněte o lineární závislosti či lineární nezávislosti následujících vektorů $(1,2,3,-4),^T\ (2,3,-4,1),^T\ (2,-5,8,-3)^T, (5,26,-9,-12)^T, (3,-4,1,2)^T$.

4.9.20. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (6,9,14)^T$ patří do vektorového prostoru, který je generován vektory $\mathbf{u} = (1,1,1)^T$, $\mathbf{v} = (1,1,2)^T$ a $\mathbf{w} = (1,2,3)^T$.

4.9.21. Zjistěte, zda vektor $\mathbf{x} = (6,2,-7)^T$ patří do vektorového prostoru, jehož bázi tvoří vektory $\mathbf{u} = (2,1,-3)^T$, $\mathbf{v} = (3,2,-5)^T$ a $\mathbf{w} = (1,-1,1)^T$.

4.9.22. Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru $W = \big[(1,0,0,-1)^T, (2,1,1,0)^T, (1,1,1,1)^T, (1,2,3,4)^T, (0,1,2,3)^T\big]$.

4.9.23. Nalezněte bázi vektorového prostoru $W = \big[(5,2,-3,1)^T, (4,1,-2,3)^T, (1,1,-1,-2)^T, (3,4,-1,2)^T\big]$.

4.9.24. Nalezněte alespoň tři báze a dimenzi vektorového prostoru $W = \left[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\right]$, kde $\mathbf{u_1} = (2, 1, -3, 1)$, $\mathbf{u_2} = (4, 2, -6, 2)$, $\mathbf{u_3} = (6, 3, -9, 3)$ a $\mathbf{u_4} = (1, 1, 1, 1)$.

4.9.25. Z množiny generátorů $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, \mathbf{u_5}\}$ vektorového prostoru W, kde $\mathbf{u_1} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{u_2} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{u_3} = (3, 2, 3)$, $\mathbf{u_4} = (4, 3, 4)$ a $\mathbf{u_5} = (1, 1, 1)$, vyberte vektory, které tvoří bázi vektorového prostoru W.

4.9.26. Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru λ, pro který vektor $\mathbf{x} = (7, -2, \lambda)$ je lineární kombinací tří vektorů $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, kde je $\mathbf{u_1} = (2, 3, 5)$, $\mathbf{u_2} = (3, 7, 8)$ a $\mathbf{u_3} = (1, -6, 1)$.

4.9.27. Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru λ, pro který vektor $\mathbf{x} = (1, 3, 5)$ je lineární kombinací tří vektorů $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, kde $\mathbf{u_1} = (3, 2, 5)$, $\mathbf{u_2} = (2, 4, 7)$ a $\mathbf{u_3} = (5, 6, \lambda)$.

Výsledky cvičení

4.9.1 $\mathbf{x} = (-7, -9)^T$ **4.9.2** $\mathbf{x} = -\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **4.9.3** $\mathbf{x} = -5\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ **4.9.4** není **4.9.5** je, $\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **4.9.6** patří, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$ **4.9.7** oba patří, $\mathbf{x} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 4\mathbf{w}$, $\mathbf{y} = \mathbf{u} + 5\mathbf{v} - 5\mathbf{w}$ **4.9.8** nepatří **4.9.9** lineárně závislé **4.9.10** lineárně závislé **4.9.11** lineárně nezávislé **4.9.12** lineárně závislé **4.9.13** lineárně závislé **4.9.14** lineárně nezávislé **4.9.15** lineárně závislé **4.9.16** lineárně nezávislé **4.9.17** lineárně nezávislé **4.9.18** lineárně závislé **4.9.19** lineárně závislé **4.9.20** patří, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ **4.9.21** patří, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ **4.9.22** dimenze je 3, báze je např. množina $\left\{(1, 0, 0, -1)^T, (2, 1, 1, 0)^T, (1, 2, 3, 4)^T\right\}$ **4.9.23** dimenze je 3, báze je např. množina $\left\{(5, 2, -3, 1)^T, (4, 1, -2, 3)^T, (3, 4, -1, 2)^T\right\}$ **4.9.24** dimenze je 2, báze je např. množina $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_4}\}$ nebo množina $\{\mathbf{u_2}, \mathbf{u_4}\}$ nebo množina $\{\mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ **4.9.25** Bázi tvoří libovolné tři vektory z množiny generátorů, kromě množiny $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_5}\}$ a množiny $\{\mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}, \mathbf{u_5}\}$ **4.9.26** $\lambda = 15$ **4.9.27** $\lambda \neq 12$

4.10 Kvadratické formy

Tato kapitola bude opět spíše teoretická, a proto motivační úvahu vynecháme. Nejprve zavedeme pojem kvadratické formy a postupně uvedeme jejich vlastnosti a klasifikaci. Znalosti o kvadratických formách můžeme uplatnit např. při studiu funkcí více proměnných.

Definice 4.10.1. Nechť A je symetrická čtvercová matice řádu n. Zobrazení $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, neboli $k : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto k(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

se nazývá *kvadratická forma* příslušná matici A. Matice A se nazývá *matice kvadratické formy* k.

Čtvercová matice A určuje kvadratickou formu k jednoznačně a naopak, každé kvadratické formě $k(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ přísluší právě jedna symetrická čtvercová matice.

4.66. Zapište předpis kvadratické formy příslušné matici **Příklad 4.66**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Podle definice kvadratické formy rozepíšeme

$$\begin{aligned} k(\mathbf{x}) &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (3x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 6x_2 - 2x_3, -4x_1 + 2x_2 + 3x_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 3x_1^2 - x_2x_1 + 2x_3x_1 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_3x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= 3x_1^2 - 2x_1x_3 + 6x_2^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

V dalším příkladu situaci otočíme.

Příklad 4.67

4.67. Nalezněte matici kvadratické formy

$$k(\mathbf{x}) = -5x_1^2 + 2x_1x_2 + 7x_2^2 + 6x_2x_3 - 8x_3^2.$$

Řešení: V předešlém příkladu jsme si uvědomili, že koeficienty stojící v předpisu kvadratické formy před x_i^2, pro $i = 1, 2, 3$, leží v matici kvadratické formy na diagonále. Matice kvadratické formy je symetrická, a proto polovina hodnoty koeficientu stojícího před výrazy x_ix_j, kde $i, j = 1, 2, 3$, v předpisu kvadratické formy leží v matici kvadratické formy v i-tém řádku a j-tém sloupci a druhá polovina v j-tém řádku a i-tém sloupci. Součin x_1x_3 se v předpisu naší kvadratické formy nevyskytuje, koeficient před ním je nula. Proto v matici naší kvadratické formy bude v prvním řádku a třetím sloupci nula. A stejně tak i prvek ve třetím řádku a prvním sloupci bude nulový. V našem příkladu dostáváme matici kvadratické formy

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Definice 4.10.2. Nechť A je diagonální matice řádu n a nechť A je matice kvadratické formy $k(\mathbf{x})$. Řekneme, že kvadratická forma příslušná takovéto matici A je v *kanonickém tvaru*.

Pokud se v předpisu kvadratické formy se nacházejí pouze členy x_i^2, poznáme, že je kvadratická forma v kanonickém tvaru. Například matice kvadratické formy tvaru $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 7x_4^2$ je matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Definice 4.10.3. Kvadratická forma $k(\mathbf{x})$ se nazývá

a) *pozitivně definitní*, jestliže $k(\mathbf{x}) > 0$ pro všechna nenulová $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

b) *pozitivně semidefinitní*, jestliže $k(\mathbf{x}) \geq 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro který $k(\mathbf{x}) = 0$,

c) *negativně definitní*, jestliže $k(\mathbf{x}) < 0$ pro všechna nenulová $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

d) *negativně semidefinitní*, jestliže $k(\mathbf{x}) \leq 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro který $k(\mathbf{x}) = 0$,

e) *indefinitní*, jestliže existují vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, pro které $k(\mathbf{x}) > 0$ a $k(\mathbf{y}) < 0$.

Z Definice 4.10.3 vidíme, že kvadratické formy rozlišujeme podle toho, zda kvadratická forma přiřazuje jakémukoli vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ hodnoty pouze kladné, záporné, nekladné či nezáporné. Je například zřejmé, že kvadratická forma daná předpisem

$$k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2$$

je pozitivně definitní. Totiž každá složka x_i vektoru $\mathbf{x}$ se v předpise vyskytuje v druhé mocnině a druhé mocniny jakéhokoli nenulového čísla jsou kladné a kladné násobky kladných čísel jsou opět kladná čísla. Nakonec součet kladných hodnot je opět hodnota kladná. Navíc neexistuje žádný nenulový vektor, pro který by platilo $k(\mathbf{x}) = 0$.

Víme již, že každá kvadratická forma jednoznačně určuje symetrickou čtvercovou matici a naopak. V následující definici je uvedeno, jak lze rozlišovat druhy symetrických čtvercových matic řádu n.

Definice 4.10.4. Symetrická čtvercová matice A řádu n se nazývá

a) *pozitivně definitní*, jestliže $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ pro všechna nenulová $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

b) *pozitivně semidefinitní*, jestliže $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro který $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$,

c) *negativně definitní*, jestliže $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$ pro všechna nenulová $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

d) *negativně semidefinitní*, jestliže $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pro který $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$,

e) *indefinitní*, jestliže existují vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, pro které $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ a $\mathbf{y}^T A\mathbf{y} < 0$.

Odtud plyne, že čtvercová symetrická matice A je pozitivně definitní, pokud kvadratická forma příslušná matici A je pozitivně definitní. Obdobně pro ostatní typy kvadratických forem.

4.68. Určete, jakého typu je symetrická čtvercová matice **Příklad 4.68**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Pro zadanou matici A a pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ rozepíšeme výraz $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= (-2x_1, -5x_2, -3x_3, -x_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= -2x_1^2 - 5x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_4^2 \end{aligned}$$

Je snadné nahlédnout, že tento výraz bude záporný pro jakýkoli reálný vektor $\mathbf{x}$. Všechny koeficienty v předpisu jsou záporné a všechny složky vektoru $\mathbf{x}$ se objevují jen ve druhých mocninách. Výraz $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ bude pro jakýkoli nenulový vektor $\mathbf{x}$ záporný. Zadaná matice je negativně definitní, tudíž i kvadratická forma příslušná této matici je negativně definitní.

4.69. Určete, jakého typu je symetrická čtvercová matice **Příklad 4.69**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Výraz $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, se zadanou maticí A rozepíšeme.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&= (5x_1, 2x_2, 0, 8x_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
&= 5x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_4^2
\end{aligned}$$

Zajímá nás znaménko tohoto výrazu pro vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Protože první, druhá a čtvrtá složka vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ se ve výrazu objevuje ve druhé mocnině a je násobena kladným číslem a pak sečtena, výraz $5x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_4^2$ bude mít minimální možnou hodnotu nula, neboli $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Pokud nalezneme nenulový vektor, pro který $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$, můžeme říci, že matice je pozitivně semidefinitní. Rovnice $5x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_4^2 = 0$ bude platit pouze pro $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. Dále vidíme, že třetí složka vektoru $\mathbf{x}$ výraz $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ vůbec neovlivní. Z toho plyne, že pro každý vektor $(0, 0, x_3, 0)$, kde $x_3 \neq 0$ platí, že $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$. Našli jsme tedy nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, pro který $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$. Zjistili jsme, že matice A je pozitivně semidefinitní. Tato matice je příslušná kvadratické formě $k(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_4^2$ a tato forma je v kanonickém tvaru.

Jak jsme v tomto příkladě viděli, určit typ kvadratické formy, pokud tato je v kanonickém tvaru, není obtížné. Při určování typu kvadratické formy v kanonickém tvaru hrála rozhodující roli znaménka koeficientů před výrazy x_i^2 v předpisu kvadratické formy. Pokud se podíváme na matici příslušné ke kvadratické formě, pak o typu kvadratické formy v kanonickém tvaru rozhodují znaménka prvků diagonální matice příslušné této kvadratické formě. O tom hovoří následující vlastnost.

Věta 4.10.5 (Vztah kvadratické formy v kanonickém tvaru s příslušnou diagonální maticí)**.** *Nechť k je kvadratická forma v kanonickém tvaru s diagonální maticí kvadratické formy D, jejíž diagonální prvky označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Pak*

a) kvadratická forma (ale i matice D) je pozitivně definitní právě tehdy, když $d_i > 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$,

a) kvadratická forma (ale i matice D) je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když $d_i \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a alespoň jedno $d_i = 0$,

a) kvadratická forma (ale i matice D) je negativně definitní právě tehdy, když $d_i < 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$,

a) kvadratická forma (ale i matice D) je negativně semidefinitní právě tehdy, když $d_i \leq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a alespoň jedno $d_i = 0$,

a) kvadratická forma (ale i matice D) je indefinitní právě tehdy, když existují taková i a j, pro která $d_i < 0$ a $d_j > 0$.

Podle této vlastnosti je vyšetření typu kvadratické formy v kanonickém tvaru velice jednoduché. Jak ale určit typ kvadratické formy, která není v kanonickém tvaru? Nejprve připomeneme vlastnost symetrických matic.

Věta 4.10.6 (Vlastnost symetrických matic)**.** *Ke každé symetrické matici A existuje regulární matice B tak, že platí $B^T AB = D$, kde D je diagonální matice.*

Odtud plyne, že $B^T AB = D$. Protože matice B je regulární matice, a tudíž k ní existuje inverzní matice, platí $A = (B^{-1})^T DB^{-1}$. Pak můžeme s využitím vlastností transpovaných matic psát

$$k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (B^{-1})^T DB^{-1}\mathbf{x} = (B^{-1}\mathbf{x})^T DB^{-1}\mathbf{x}.$$

Nakonec označíme-li $\mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{x}$, dostaneme kvadratickou formu s diagonální maticí $k(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$.

Známe již úpravy, pomocí nichž získáváme v matici nulové prvky pod i nad diagonálou. Tato matice B tedy zachycuje nám známé úpravy. Vidíme, že každou symetrickou matici můžeme jistými úpravami na řádky i sloupce převést na diagonální matici. Tyto úpravy budou shodné s úpravami, které sloužily k určení hodnosti matice, až na dvě výjimky. Jednak za každou úpravou provedenou na řádky musí následovat stejná úprava provedená na sloupce (po každé úpravě na řádky a následně sloupce musí matice zůstat symetrická). Za druhé nevynecháváme řádek či sloupec, který je lineární kombinací ostatních. Tyto naše úvahy zformulujeme do další vlastnosti.

Věta 4.10.7 (Vztah kvadratické formy a kvadratické formy v kanonickém tvaru)**.** *Každou kvadratickou formu je možné regulárními úpravami převést na kvadratickou formu v kanonickém tvaru.*

Tato vlastnost nám dává odpověď na otázku, jak určit typ kvadratické formy, která není v kanonickém tvaru. Matici každé kvadratické formy převedeme na matici diagonální. Nakonec jen zapíšeme kvadratickou formu příslušnou této diagonální matici.

4.70. Kvadratickou formu $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 7x_1^2 + 8x_2x_3 + 2x_3^2$ převeďte na kvadratickou formu v kanonickém tvaru. **Příklad 4.70**

Řešení: Nejprve zapíšeme matici příslušnou zadané kvadratické formě. Tato matice má tvar $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. V dané matici budeme postupně „získávat" nuly stejnými úpravami, které jsme používali ke zjištění hodnosti matice. Každou operaci na řádky provedeme bezprostředně i na příslušné sloupce.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \mid \cdot 2 \; + \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -3 & \;\; \cdot 2 \; + & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Získali jsme opět symetrickou matici. Nyní provedeme úpravy, které vynulují prvek ve třetím řádku a prvním sloupci a prvek ve prvním řádku a třetím sloupci.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \mid \cdot 2 \; + \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -1 & & \cdot 2 \; + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Nakonec stačí získat nulu ve druhém sloupci a třetím řádku. Úpravou na sloupce získáme nulu ve druhém řádku a třetím sloupci.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ + \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Danou matici A jsme převedli na matici $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$. Kvadratická forma příslušná této diagonální matici je v kanonickém tvaru následující

$$k(\mathbf{x}) = 2y_1^2 - 10y_2^2 + 16y_3^2.$$

Z tohoto tvaru kvadratické formy v kanonickém tvaru také plyne, že zadaná kvadratická forma je indefinitní.

Dodejme, že převod matice na diagonální tvar není jednoznačně určený. Počet kladných, záporných, případně nulových prvků ve výsledné diagonální matici je však určen jednoznačně .

Toto není jediný způsob, jak určit typ kvadratické formy. Následující vlastnost nás upozorní, že typ kvadratické formy se dá také určit pomocí charakteristických čísel matice příslušné kvadratické formě.

Věta 4.10.8 (Existence lineární transformace převodu kvadratické formy na kanonický tvar)**.** *Nechť A je čtvercová symetrická matice řádu n a označme její charakteristická čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Pak existuje regulární lineární transformace $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, která převádí kvadratickou formu $k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ na kanonický tvar*

$$k(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots \lambda_n y_n^2.$$

Příklad 4.71

4.71. Pomocí charakteristických čísel matice $A = \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{15} \\ \sqrt{15} & 4 \end{pmatrix}$ rozhodněte o typu kvadratické formy příslušné této matici.

Řešení: Vyřešíme charakteristickou rovnici $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{pmatrix} 6 & \sqrt{15} \\ \sqrt{15} & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0 \\
\begin{vmatrix} 6-\lambda & \sqrt{15} \\ \sqrt{15} & 4-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(6-\lambda)(4-\lambda) - 15 &= 0 \\
9 - 10\lambda + \lambda^2 &= 0 \\
(\lambda - 1)(\lambda - 9) &= 0
\end{aligned}$$

Charakteristická čísla matice A jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 9$. Kvadratickou formu příslušnou matici A můžeme tedy vyjádřit ve tvaru $k(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_1^2 + 9\mathbf{y}_2^2$. Jelikož jsou obě vlastní čísla kladná, kvadratická forma je pozitivně definitní.

Nakonec uvedeme vlastnost, která ukáže, že lze určit některé typy kvadratických forem pomocí jistých determinantů. Nejprve musíme zavést jisté značení. Mějme čtvercovou matici $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Označme D_i determinant takové matice, která vznikne z prvních i řádků a prvních i sloupců matice A, neboli

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}.$$

Věta 4.10.9 (Sylvestrova věta)**.** *Nechť $A = (a_{ij})$ je symetrická čtvercová matice řádu n a k je kvadratická forma příslušná matici A. Pak*

a) kvadratická forma k je pozitivně definitní právě tehdy, když $D_i > 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$,

b) je negativně definitní právě tehdy, když $D_i > 0$ pro všechna sudá i a $D_i < 0$ pro všechna lichá i.

c) jestliže existuje sudé i takové, že $D_i < 0$, nebo pro lichá i, j taková, že $D_i < 0$ a $D_j > 0$, pak kvadratická forma k je indefinitní.

Zdůrazněme, že podle Sylvestrovy věty lze rozhodnout jen o pozitivní definitnosti či negativní definitnosti kvadratické formy. Bod za [c)] v Sylvestrově větě je jen implikací. Tedy podle této věty určíme indefinitní kvadratickou formu jedině v případě, že je splněn předpoklad za [c)]. Pokud nejsou splněny předpoklady [c)], neznamená to, že by kvadratická forma nemohla být indefinitní. Navíc semidefinitní kvadratické formy pomocí této věty neurčíme.

4.72. Pomocí Sylvestrovy věty určete typ kvadratické formy k, kde

Příklad 4.72

$$k(\mathbf{x}) = 8x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 7x_3^2.$$

Řešení: Zapíšeme matici kvadratické formy k. $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ a postupně vypočteme determinanty D_1, D_2, D_3.

$$D_1 = |6| = 6 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 - (-4) \cdot (-4) = 24 - 16 = 8 > 0$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 8 \cdot 3 \cdot 7 + (-4) \cdot (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 8 \cdot (-2) \cdot (-2) - \\ &- (-4) \cdot (-4) \cdot 7 \\ &= 24 > 0 \end{aligned}$$

Všechny determinanty D_1, D_2, D_3 jsou kladné, a tudíž podle Sylvestrovy věty je zadaná kvadratická forma pozitivně definitní.

4.73. Rozhodněte o typu kvadratické formy

Příklad 4.73

$$k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Řešení: Pokusíme se o typu kvadratické formy rozhodnout pomocí Sylvestrovy věty. Matice této kvadratické formy je $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Následně vypočteme determinanty D_1, D_2.

$$D_1 = |2| = 2 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-2) \cdot (-2) = 0$$

Protože determinant D_2 je nulový, nelze podle Sylvestrovy věty rozhodnout o typu kvadratické formy. Můžeme pouze podle Sylvestrovy věty říci, že zadaná kvadratická forma není ani pozitivně definitní ani negativně definitní. O typu této kvadratické formy rozhodneme tedy podle kanonického tvaru zadané kvadratické formy.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tato matice v diagonálním tvaru má prvky na diagonále $d_1 = -1$ a $d_2 = 0$. Příslušná kvadratická forma má tvar $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2$ a je pozitivně semidefinitní. Nakonec ještě určíme typ této kvadratické formy pomocí vlastních čísel matice kvadratické formy.

$$\begin{aligned} \det\left(\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (2-\lambda)^2 - (-2)(-2) &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda &= 0 \\ (\lambda - 4)\lambda &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnice má řešení $\lambda = 4$ a $\lambda = 0$. Jedno charakteristické číslo matice kvadratické formy je kladné, druhé je nulové. I pomocí charakteristických čísel matice kvadratické formy jsme si ověřili, že kvadratická forma je pozitivně semidefinitní.

4.11 Cvičení

Nalezněte matice následujících kvadratických forem.

4.11.1. $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$

4.11.2. $k(\mathbf{x}) = -5x_1^2 - 3x_1x_2$

4.11.3. $k(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 9x_2^2$

4.11.4. $k(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2$

4.11.5. $k(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 6x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3$

4.11.6. $k(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3 - 5x_2^2 - 9x_3^2$

4.11.7. $k(\mathbf{x}) = -7x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_4 - 5x_2^2 - 8x_2x_3 - 9x_3^2 + 6x_2x_4$

Nalezněte předpisy kvadratických forem příslušných k následujícím maticím.

4.11.8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

4.11.9. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

4.11.10. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.11.11. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

4.11.12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Určete typy následujících kvadratických forem.

4.11.13. $k(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2$

4.11.14. $k(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

4.11.15. $k(\mathbf{x}) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2$

4.11.16. $k(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + 4x_3^2$

4.11.17. $k(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$

4.11.18. $k(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

4.11.19. $k(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$

4.11.20. $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$

4.11.21. $k(\mathbf{x}) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 3x_3^2$

4.11.22. $k(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 - 12x_2x_3 + 9x_3^2$

4.11.23. $k(\mathbf{x}) = 7x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$

4.11.24. $k(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 5x_2^2 + 2x_2x_3 - 13x_3^2$

Výsledky cvičení

4.11.1 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **4.11.2** $\begin{pmatrix} -5 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ **4.11.3** $\begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 9 \end{pmatrix}$ **4.11.4** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$
4.11.5 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **4.11.6** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -5 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -9 \end{pmatrix}$ **4.11.7** $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4.11.8 $k(\mathbf{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2$ **4.11.9** $k(\mathbf{x}) = -4x_1x_2 + 5x_2^2$ **4.11.10** Tato matice není symetrická, nemůže být maticí kvadratické formy **4.11.11** kvadratická forma má předpis $k(\mathbf{x}) = -6x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 3x_3^2$ **4.11.12** $k(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 7x_2^2 - 6x_2x_3 + 5x_3^2$ **4.11.13** indefinitní **4.11.14** pozitivně definitní **4.11.15** negativně definitní **4.11.16** pozitivně definitní **4.11.17** indefinitní **4.11.18** indefinitní **4.11.19** pozitivně definitní **4.11.20** pozitivně definitní **4.11.21** indefinitní **4.11.22** pozitivně semidefinitní **4.11.23** pozitivně definitní **4.11.24** negativně definitní

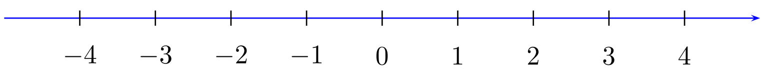
Kapitola 5

Funkce

5.1 Množiny reálných čísel

V následujících částech této kapitoly budeme pracovat s reálnými čísly. Nebudeme se zde pouštět do podrobného popisu teorie reálných čísel[1]). Budeme však předpokládat, že jsou známy základní vlastnosti reálných čísel jako jsou asociativnost, komutativnost, distributivní zákon a další. Stejně tak předpokládáme znalost základních operací s reálnými čísly.

Připomeneme často používané vyjádření reálných čísel pomocí bodů na *reálné číselné ose*. Na přímce vybereme jeden bod a označíme ho jako tzv. *počátek osy*. Dále určíme „měřítko“ přímky a to tak, že na přímce určíme bod, který má od počátku osy jednotkovou vzdálenost, tj. vzdálenost, která je rovna jedné. Známe-li jednotkovou vzdálenost, jsme schopni vyjádřit vzdálenost každého bodu od počátku. Každému bodu přímky je tak přiřazeno číslo, které vyjadřuje jeho vzdálenost od počátku v tom smyslu, že pokud se bod nachází na reálné ose ve vzdálenosti a vlevo od počátku, potom jemu odpovídající číslo považujeme za záporné reálné číslo $-|a|$. Často pak místo o čísle hovoříme o bodu a naopak[2]). Budeme tedy mluvit např. o bodu deset a budeme mít na mysli číslo 10. Je zřejmé, že počátku je přiřazeno číslo 0. Dále budeme říkat, že vzdálenost bodů x a y je z a budeme tím rozumět to, že mezi body (čísly) x, y, z platí vztah $|x - y| = |y - x| = z$.

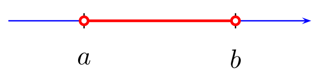


Obrázek 5.1: Reálná číselná osa

5.1.1 Intervaly reálných čísel

Často používaným termínem v souvislosti s reálnými čísly je pojem *intervalu*. Jedná se o množinu bodů (přenesenĕ reálných čísel), která na reálné ose vymezí jistou úsečku nebo (polo)přímku. Intervaly dále dělíme na otevřené, uzavřené, polootevřené, nebo polouzavřené. Při jejich popisu budeme předpokládat, že a a b jsou reálná čísla a platí $a < b$.

Otevřený interval od a do b, značíme (a, b), je množina všech reálných čísel x, pro něž platí vztah $a < x < b$. Oba krajní body intervalu, tj. a a b, podle této definice do intervalu (a, b) nepatří. Matematicky zapsáno



$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

[1]) Zájemce o tuto teorii lze odkázat např. na knihu [9].

[2]) Zpočátku budeme na tuto analogii upozorňovat. Později ji budeme používat, aniž bychom toto zdůraznili.

Uzavřený interval od a do b, značíme $\langle a, b\rangle$, je množina všech reálných čísel x, pro něž platí vztah $a \le x \le b$. Oba krajní body intervalu, tj. a a b, podle této definice do intervalu $\langle a, b\rangle$ patří. Matematicky zapsáno

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}.$$

Polootevřený interval od a do b, značíme $(a, b\rangle$, je množina všech reálných čísel x, pro něž platí vztah $a < x \le b$. Z obou krajních bodů a a b je prvkem množiny $(a, b\rangle$ pouze bod b. Matematicky zapsáno

$$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \le b\}.$$

Polouzavřeným intervalem od a do b, značíme $\langle a, b)$, rozumíme množinu všech reálných čísel x, pro která platí nerovnost $a \le x < b$. Z obou krajních bodů a a b je prvkem množiny $\langle a, b)$ pouze bod a. Matematicky zapsáno

$$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}.$$

Všechny tyto množiny představují tzv. *ohraničené množiny*. Kromě nich používáme i tzv. *neohraničené intervaly* (a, ∞), $\langle a, \infty)$, $(-\infty, b)$ a $(-\infty, b\rangle$, kde

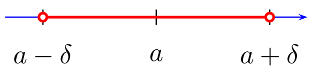
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}, \qquad \langle a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \ge a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}, \qquad (-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ x \le b\}.$$

Pro množinu všech reálných čísel tedy platí $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

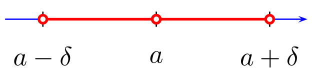
Poznámka 5.1.1. Již víme, že krajní body a a b nepatří do otevřeného intervalu (a, b). Proto otevřený interval (a, b) neobsahuje své minimum, tj. číslo, které je menší než ostatní prvky množiny. Pro každé $x \in (a, b)$ lze totiž najít číslo $c \in (a, b)$ takové, že $c < x$. Snadno ověříme, že např. bod c, který je aritmetickým průměrem čísel a a x, je prvkem intervalu (a, b) a je menší než x. Protože x je libovolný prvek z intervalu (a, b), je zřejmé, že ke každému číslu $x \in (a, b)$ existuje číslo, které leží v intervalu (a, b), a přitom je menší než x. Proto na intervalu (a, b) neexistuje prvek s nejmenší hodnotou. Podobným způsobem můžeme odvodit, že otevřený interval neobsahuje ani své maximum, tj. prvek, která má největší hodnotu ze všech čísel v daném intervalu.

5.1.2 Okolí bodu



V některých důležitých definicích budeme potřebovat pojem *okolí bodu*. Mluvíme-li o okolí bodu a, značíme $O_\delta(a)$, jde o množinu reálných čísel x, pro která platí nerovnice $|x - a| < \delta$, tedy

$$O_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$



Číslo δ nazýváme poloměr okolí bodu a. Z geometrického hlediska jde o množinu všech bodů x, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než poloměr δ. Často budeme používat pojem *prstencového okolí* bodu a. Můžeme si ho představit jako okolí bodu a ochuzené o střed, tedy o bod a. Prstencové okolí bodu a budeme značit symbolem $P_\delta(a)$ a platí

$$P_\delta(a) = O_\delta(a) \backslash \{a\} = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta).$$

Budeme potřebovat i tzv. *pravostraná* a *levostraná* okolí bodu. Levostranným okolím bodu a nazýváme množinu $P_\delta^-(a) = (a - \delta, a)$, pravostranným okolím bodu a nazýváme množinu $P_\delta^+(a) = (a, a + \delta)$.

Z uvedeného popisu je zřejmé, jaká je souvislost mezi nerovnicemi $|x - a| < \delta$ a okolím bodu a. Např. řešením nerovnice $|x - 3| < 5$ jsou všechna $x \in (-2, 8)$. Tyto body představují okolí bodu $x = 3$ s poloměrem $\delta = 5$. Analogicky jsou řešením nerovnice $|x+2| < 1$ všechna $x \in (-3, -1)$. Tyto body představují okolí bodu $x = -2$ s poloměrem $\delta = 1$.

5.1. Vyjádřete prstencové okolí bodu $x = 2$ s poloměrem $\delta = 3$ pomocí intervalu a jako množinu všech řešení nerovnice s absolutní hodnotou.

Příklad 5.1

Řešení: Do prstencového okolí bodu $x = 2$ s poloměrem $\delta = 3$ patří všechny body (s výjimkou $x = 2$), jejichž vzdálenost od bodu $x = 2$ je menší než tři jednotky. Je tedy $O_3(2) = (-1, 2) \cup (2, 5)$. Tuto množinu tvoří i všechny body, které jsou řešením nerovnice $0 < |x - 2| < 3$.

5.1.3 Ohraničená množina. Supremum a infimum číselné množiny

Ohraničenou (často též *omezenou*) množinou rozumíme číselnou množinu, jejíž všechny prvky jsou menší než jisté (hraniční) číslo H a větší než jiné (hraniční) číslo L.

Definice 5.1.2. Neprázdnou číselnou množinu M nazýváme *shora ohraničená*, existuje-li takové číslo H, že pro každý prvek množiny M platí nerovnost $x \leq H$. Číslo H nazýváme *horní závora* množiny M.
Neprázdnou číselnou množinu M nazýváme *zdola ohraničená*, existuje-li takové číslo K, že pro každý prvek množiny M platí nerovnost $L \leq x$. Číslo L nazýváme *dolní závora* množiny M.
Neprázdnou číselnou množinu M nazýváme *ohraničená*, je-li ohraničená zdola i shora.

Ohraničená je každá číselná množina, která obsahuje své nejmenší a největší číslo. Takovým případem je např. uzavřený interval $\langle 3, 5 \rangle$. Zde je dolní závorou například číslo $L = 3$ a také jakékoliv číslo menší než tři. Horní závorou je číslo $H = 5$ a také jakékoliv číslo větší než pět. Všimněte si, že číslo tři je největší ze všech dolních závor a číslo pět je nejmenší ze všech horních závor.

Ohraničené však mohou být i množiny, které neobsahují svou nejmenší či největší hodnotu. Například otevřený interval $(3, 5)$ je ohraničená množina, za její dolní závoru lze opět považovat číslo tři a za horní závoru číslo pět. I v tomto případě jsme uvedli závory, které co nejvíce „přiléhaly“ k uvažované množině, tj. ze všech možných závor jsme vybrali tu největší dolní závoru a současně nejmenší horní závoru. Takové typy závor jsou důležité, a proto si pro ně zavedeme zvláštní názvy.

Definice 5.1.3. Nejmenší horní závoru shora ohraničené číselné množiny M nazýváme *supremum* množiny M. Největší dolní závoru zdola ohraničené množiny nazýváme *infimum* množiny M.

Poznamenejme, že každá neprázdná ohraničená množina reálných čísel má jediné infimum a jediné supremum. Obsahuje-li množina svůj největší prvek, potom je tento prvek i supremem této množiny, obsahuje-li množina svůj nejmenší prvek, je tento prvek jejím infimem. Neobsahuje-li množina svůj největší, resp. nejmenší prvek, potom buď není ohraničená (a pak neexistuje její supremum, resp. infimum), nebo ohraničená je, ale supremum, resp. infimum není jejím prvkem. Takovým případem je již zmíněná množina $(3, 5)$. Infimem této množiny je číslo tři, supremem je číslo pět - obě tato čísla však nejsou prvky množiny $(3, 5)$.

5.2 Pojem funkce

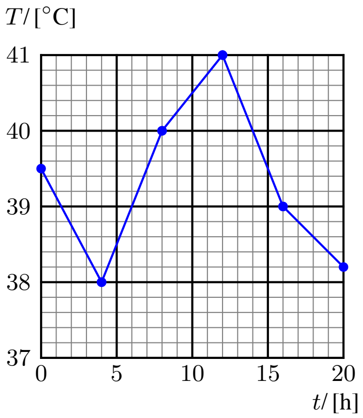
Používání matematiky k řešení úloh v reálném světě musí být podpořeno dobrou znalostí základních matematických pojmů. Možná nejdůležitějším z nich je pojem *funkce* - nástroje, který popisuje vztah mezi dvěma či více veličinami.

Veličinu v matematice chápeme jako pojem, který popisuje kvantitativní vlastnosti reálných i abstraktních objektů. Veličinou může být výška člověka, výše úrokové míry v bance, procentuální podíl firmy na trhu, množství nezaměstnaných v oblasti atd. Některé veličiny mohou měnit svou velikost, např. hmotnost člověka se mění, množství peněz na účtu kolísá, cena zboží je proměnlivá. Takové veličiny pak nazýváme proměnnými veličinami, zkráceně *proměnnými*.

Někdy jsme schopni popsat způsob, kterým jedna veličina závisí na jiné či jiných veličinách. Například umíme určit, jakou vzdálenost urazil automobil, známe-li jeho rychlost a dobu trvání jízdy. Známe-li množství peněz uložených v bance, velikost příslušné úrokové míry a dobu trvání vkladu, jsme schopni vypočítat velikost našich úspor včetně případných úroků atd. Jindy cítíme, že nějaká veličina souvisí s dalšími veličinami, ale neumíme tento vztah vyjádřit pomocí nějakého přesného vzorce - počet prodaných kusů jistého výrobku za měsíc závisí na jeho ceně a na velikosti důchodu (množství peněz, které mají potencionální zákazníci k dispozici), je však téměř nemožné zachytit tento vztah v nějakém přesném vzorci. Ve všech těchto případech říkáme, že daná veličina je funkcí ostatních veličin.

Příklad 5.2

5.2. Při hospitalizaci v nemocnici je pacientům měřena tělesná teplota. Předpokládejme, že zdravotní sestra provádí měření teploty každé čtyři hodiny. Výsledek měření zanese do tabulky a graficky znázorní ve formě grafu. Z takového obrázku lze potom snadno vyčíst mnoho užitečných údajů. Zkušený lékař na první pohled pozná, jak se měnila teplota pacienta a porovnáním, např. s dobou podání léků, určí, jak pacient reaguje na léky, a určí další postup léčby.



Uvedený obrázek umožňuje přiřadit k sobě hodnoty dvou různých veličin - času a teploty. Z matematického pohledu vnímáme teplotu jako funkci času, neboť jsme schopni zjistit teplotu v konkrétním čase.

Historická poznámka

V následujících odstavcích se pokusíme o stručný (a tudíž značně zjednodušený) popis vývoje pojmu funkce. Tento popis je cenný pro pochopení pojmu funkce a měl by vám pomoci pochopit, jak s pojmem funkce pracovat.

Zárodky funkčního myšlení nalezneme již v civilizacích starověkého Babylonu a Řecka. Z doby zhruba 2 000 let př. n. l. pocházejí babylonské tabulky pro výpočet převrácených hodnot k zadanému číslu, druhých a třetích mocnin a odmocnin čísel. Tyto tabulky svědčí o schopnosti tehdejších lidí (alespoň některých) přiřazovat číselným hodnotám další číselné údaje.

Je tedy zřejmé, že již v dobách dávno před začátkem našeho letopočtu si lidé uvědomovali, že mezi hodnotami dvou veličin může existovat nějaká souvislost, že hodnoty jedné veličiny nějakým způsobem závisejí na hodnotách jiné veličiny, resp. hodnotu jedné veličiny určíme (odvodíme) z hodnoty jiné veličiny.

Co si lze pod předchozí větou představit? Například množství odváděných daní záviselo na počtu členů rodiny - čím větší počet členů rodiny, tím větší daně k zaplacení; čím větší městské hradby, tím více stavebního materiálu je nutné dovézt atd. Toto uvědomění si možnosti vzájemné závislosti dvou (či více) veličin představuje první krok k vytvoření pojmu funkce.

K výraznému posunu ve vývoji pojmu funkce došlo na přelomu 16. a 17. století. V této době se začala rozvíjet moderní fyzika. Vědci jako např. GALILEO GALILEI (1564 - 1642) nebo JAN KEPLER (1571 - 1630) studovali fyzikální problémy spojené s pohybem. Hledali přitom vhodný nástroj pro popis sledovaného pohybu. Nešlo přitom pouze o řešení známých pohybových úloh (jakou dráhu urazí dané těleso při dané rychlosti za daný čas). Vědci této doby se snažili popsat křivky, po kterých se daná tělesa pohybují (např. popis pohybu nebeských těles na obloze - možná si vzpomenete na tzv. Keplerovy zákony o pohybu nebeských těles).

Algebraický (číselný) popis křivky byl umožněn dalším matematickým objevem, který učinil RENÉ DESCARTES (1596 - 1650). Descartovi vděčíme za myšlenku tzv. souřadných os a za možnost vyjádřit polohu bodu pomocí souřadnic, tedy pomocí čísel. Pojem funkce poprvé použil GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 - 1716) jako veličinu spojenou s křivkou. Pojem se ujal, i když v blízké budoucnosti byl upraven do poněkud jiné podoby.

V roce 1718 definoval JOHANN BERNOULLI (1667 - 1748) funkci jako každý výraz, který je možné vytvořit z proměnné a nějaké konstanty. V roce 1748 vydal LEONHARD EULER (1707 - 1783) jednu z nejvlivnějších učebnic matematiky *Introductio* *in analysin infinitorum*. V této knize Euler stanovil funkci ústředním pojmem matematiky a uvedl její definici v té podobě, v jaké jste se s ní setkali při své školní výuce: „Funkce proměnné veličiny je analytický výraz složený libovolným způsobem z této proměnné veličiny a z čísel nebo konstantních veličin.“ Podle této definice můžeme např. považovat za funkci následující rovnosti

$$y = 3x^2 - 5x + 12, \qquad \text{resp.} \qquad x^2 + y^2 = 9.$$

Je vidět, že můžeme sestavit velké množství funkcí. K jejich odlišení se proto začala používat různá písmena abecedy (dnes nejčastěji f, g atd.). V roce 1734 začal ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713 - 1765) používat symbol $f(x)$ k vyjádření hodnoty funkce f v bodě x. Rovnici $y = 5x + 6$ lze potom zapsat funkčním zápisem $f(x) = 5x + 6$. Místo slovního vyjádření: „číslu $x = 3$ přiřadíme hodnotu $y = 21$,“ řekneme: „funkční hodnota v bodě $x = 3$ je rovna 21,“ a dané tvrzení zapíšeme výrazem $f(3) = 21$.

V druhé polovině 18. století se představa o pojmu funkce posunula do obecnější polohy, ve které k určení vztahu mezi dvěma, resp. více proměnnými nebylo třeba znát konkrétní vzorec, podle kterého se vypočítá funkční hodnota. Průkopníkem tohoto přístupu byl JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768 - 1830). Podle Fouriera k zavedení funkce stačilo znát předpis, který prvku z definičního oboru funkce přiřadí funkční hodnotu funkce, a tento předpis nemusí mít podobu nějaké rovnosti či jiného vzorce. K určení funkce tak stačí znát jakékoliv pravidlo, které číselné hodnotě proměnné x přiřadí číselnou hodnotu pro proměnnou y. Typickým příkladem je např. definice tzv. Dirichletovy funkce: „Je-li x racionální číslo, potom hodnota y je rovna nule, pokud je x iracionální číslo, potom je y rovno jedné.“ Jistě si dokážete uvědomit, jaké zobecnění oproti minulosti tato definice přináší. Pokuste si například představit křivku, která je definovaná touto funkcí.

Již zmíněný LEJEUNE DIRICHLET (1805 - 1859) pak rozšířil výše uvedenou definici funkce o podmínku, aby konkrétní hodnotě x příslušela jedinečná (jediná) hodnota proměnné y. Tato podmínka je rozumná a odpovídá způsobu našeho uvažování. Jistě chceme, abychom při modelování problémů ze skutečného světa pro konkrétní hodnotu proměnné x dostali konkrétní, tj. jedinou, hodnotu proměnné y. Uvažujme například situaci, ve které do banky uložíme jistý peněžní obnos a sledujeme, kolik peněz dostaneme na úrocích po uplynutí jisté doby. Proměnné x (doba trvání vkladu) zde přiřazujeme hodnotu y (výše připsaných úroků). Není možné říci, že po sedmi letech trvání vkladu dostaneme na úrocích pět různě velkých peněžních částek ve formě úroků.

Je vhodné si uvědomit, že Dirichletova podmínka je natolik silná, že některé „dřívější funkce“ již podle této definice nejsou funkcemi. Vzpomeňme například na rovnici $x^2 + y^2 = 9$. Tento předpis dle Eulerovy definice můžeme považovat za funkci, podle Dirichletovy definice již ale funkcí není. Například pro hodnotu $x = 0$ může být $y = 3$, ale také $y = -3$. Jedné hodnotě x přísluší dvě různé hodnoty y, což je v rozporu se současně přijímanou definicí, a proto takto definovaný vztah mezi proměnnými x a y nepovažujeme za funkci.

Jedním z cílů následujících částí učebnice je vytvořit v čtenáři představu o tom, jak lze pomocí pojmu funkce popsat vztah mezi různými proměnnými. Tento vztah bude nejčastěji popsán pomocí nějakého vzorce, nicméně lze jej často znázornit i graficky, pomocí tabulky, slovně, resp. pomocí jiných metod. Získané představy nám umožní s porozuměním vytvářet modely reálného světa a následně řešit problémy spojené s těmito modely. V následujících úlohách si ukážeme, jak lze pomocí funkcí modelovat některé reálné situace, a ukážeme si vybrané úlohy, které souvisejí s pojmem funkce.

5.3. Uvažujme funkci s předpisem $y = -\frac{1}{20}x^2 + x$ a ukažme některé možné úlohy spojené s pojmem funkce. Je například možné přiřadit dané hodnotě x příslušnou hodnotu y dosazením konkrétní hodnoty x do předpisu funkce. Je-li např. $x = 10$, potom snadno **Příklad 5.3**

vypočteme hodnotu y tak, že v předpisu funkce dosadíme za x číslo 10. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{20}\,x^2 + 10 && \dots \textit{ předpis funkce} \\ &= -\frac{1}{20} \cdot 10^2 + 10 && \dots \textit{ dosazení hodnoty } x = 10 \\ &= 5. && \dots \textit{ výpočet hodnoty} \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že pokud má veličina x hodnotu 10, potom veličina y nabývá hodnotu 5. Analogicky bychom mohli určit hodnoty y pro další zvolená x.

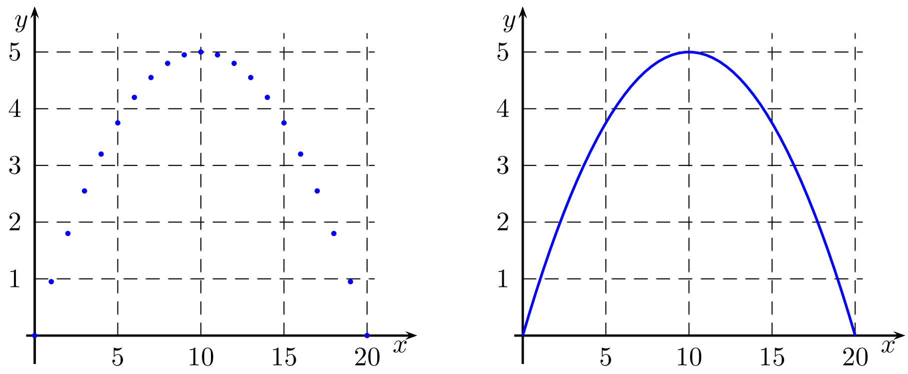
Na zjištěné výsledky je také možné pohledět geometrickým způsobem, tj. jako na souřadnice bodu. Uvažujme křivku, která se skládá z bodů o souřadnicích $[x,\ y]$. Předpis $y = -\frac{1}{20}x^2 + x$ pak stanovuje, jak ke konkrétní hodnotě souřadnice x dopočítat příslušnou souřadnici y. Pod uvedeným předpisem si tak můžeme představit konkrétní geometrickou křivku, která se skládá z bodů, jejichž x-ové a y-ové souřadnice vyhovují předpisu funkce. Již víme, že pro $x = 10$ je $y = 5$. Víme tedy, že na křivce, která je popsaná uvedenou funkcí, leží bod o souřadnicích $[10, 5]$. Snadno můžeme vypočítat další hodnoty. Některé z nich uvedeme v následující tabulce (pokuste se správnost alespoň některých hodnot ověřit výpočtem). Zjistili jsme tak, že křivka popsaná výše

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0	1,8	3,2	4,2	4,8	5	4,8	4,2	3,2	1,8	0

Tabulka 5.1: Tabulka k Příkladu 5.3

uvedenou funkcí prochází body o souřadnicích např. $[0,\ 0]$, $[2,\ 1.8]$, $[6,\ 3.2]$, $[14,\ 4.8]$, $[20,\ 0]$ atd.[3])

Pokuste si představit, jak by vypadala celá křivka, kdybychom místo vypočtených souřadnic jedenácti bodů určili souřadnice všech bodů (když známe jejich souřadnice, známe i jejich polohu a můžeme je umístit do souřadných os) pro všechna $x \in \langle 0,\ 20 \rangle$. Příslušná křivka je uvedena na Obrázku 5.2.



(a) Ve vybraných bodech

(b) Pro všechna $x \in \langle 0,\ 20 \rangle$

Obrázek 5.2: Grafy funkce $f(x) = -\dfrac{1}{20}x^2 + x$ při různých definičních oborech

Popsaná křivka (funkce) není vybrána náhodně. Řekli jsme si, že jedním z historických motivů k zavedení pojmu funkce byla snaha popsat dráhu pohybu hmotného tělesa. Uvažujme například míč, který po nakopnutí vystoupal do výše 5 metrů a zpět na zem dopadl ve vzdálenosti 20 metrů od místa výkopu. Pokud bychom si takový míč představili jako jediný bod, pak (při zanedbání odporu vzduchu) můžeme křivku, po které se míč pohyboval, popsat právě pomocí funkce $y = -\frac{1}{20}x^2 + x$, kde x představuje vodorovnou vzdálenost míče od místa výkopu a y představuje výšku míče nad zemí v okamžiku, kdy jeho vzdálenost od místa výkopu je x.

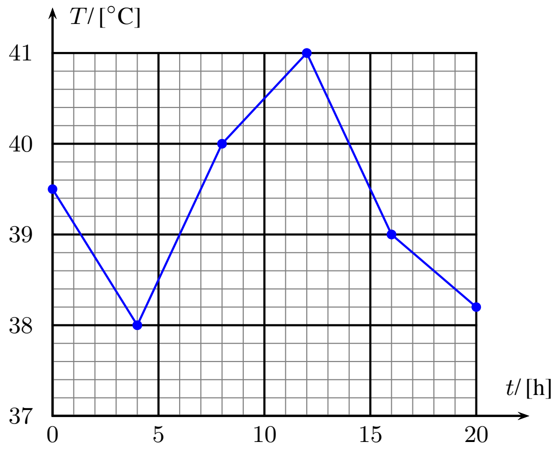
[3]) Pro odlišení čárky a desetinné čárky je v textu jako desetinná čárka uvedena tečka.

Uvedená funkce umožňuje vypočítat řadu údajů spojených s danou situací. Pokuste se z Obrázku 5.4 odhadnout a poté sestavit rovnice, s jejichž pomocí byste vyřešili následující úlohy.

1. Jak vysoko bude míč ve vodorovné vzdálenosti 4 metry od místa výkopu?
2. Jak daleko (ve vodorovném směru) od místa výkopu se bude míč nacházet ve výšce 3 metry?
3. Představte si, že ve vzdálenosti 2 metry od místa výkopu je zeď, která je vysoká dva metry. Narazí do ní míč při svém pohybu?
4. V jaké vzdálenosti od místa výkopu může být postavena zeď o výšce dva metry, aby do ní míč nenarazil?
5. Pro příznivce fyziky: za jak dlouho po výkopu dopadne míč zpět na zem? Jakou rychlostí byl míč vykopnut?

Příklad 5.4

5.4. Nyní se vrátíme k Příkladu 5.2 na straně 210. Na Obrázku 5.3 jsou uvedeny údaje o vývoji teploty pacienta během hospitalizace v nemocnici. Z grafu lze vyčíst, jakou měl pacient teplotu v různých časových okamžicích, i to, jak se tato teplota měnila. Prohlédněte si Obrázek 5.3 a odpovězte na následující otázky.



Obrázek 5.3: Záznam teploty T pacienta v čase t

1. Jaká byla teplota pacienta v 10 hodin?
2. V kolik hodin měl pacient teplotu 39,5 °C?
3. V kolik hodin měl pacient teplotu vyšší než 40 °C?
4. V jakém časovém rozmezí se teplota pacienta snižovala (klesala)?

Označme teplotu pacienta písmenem T, čas písmenem t. Symbolem $T(t)$ budeme značit teplotu T v čase t. Výraz $T(6)$ například vyjadřuje teplotu pacienta v 6 hodin. Napíšeme-li $T(4) = 38$ °C, říkáme tím, že pacient měl ve čtyři hodiny teplotu 38 °C. Pokuste se výše uvedené otázky 1) - 3) formulovat matematickým zápisem s využitím symbolů $T(t)$.

Řešení: Chceme-li zjistit teplotu pacienta v 10 hodin, ptáme se na hodnotu $T(10)$. Z grafu vyčteme, že platí $T(10) = 40,5$ °C.

Ptáme-li se v kolik hodin byla teplota rovna $39,5$ °C, potom nás zajímá, pro jaké t bylo $T = 39,5$ °C, přesněji pro jaké t platí $T(t) = 39,5$ °C. Z grafu vyčteme, že existuje více řešení této úlohy: $t_1 = 0$ hodin, $t_2 = 7$ hodin, $t_3 = 15$ hodin. Uvědomme si, že pokud bychom znali vzorec, který nám umožňuje vypočítat hodnoty teploty v čase, potom výraz $T(t) = 39,5$ °C představuje rovnici a hodnoty $t_1, \dots, t_3$ jsou řešením této rovnice.

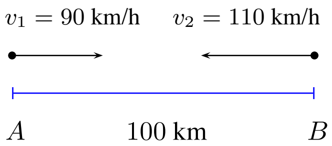
V třetí otázce se ptáme, v jakém čase byla teplota vyšší než 40 °C, matematicky zapsáno, pro jaké t je $T(t) > 40$. Z obrázku snadno vyčteme, že se tomu tak stalo v rozmezí od osmi do čtrnácti hodin, což bychom matematicky zapsali $T(t) > 40$ pro $t \in (8,\, 14)$.

Poslední otázka je spojená s poklesem teploty pacienta. K tomu dojde v čase $t \in (0,\, 4)$ a také pro $t \in (12,\, 20)$.

V některých úlohách řešíme příklady, ve kterých zjišťujeme, při jaké hodnotě proměnné x mají dvě či více funkcí stejnou funkční hodnotu. Ukázku poskytne následující příklad.

Příklad 5.5

5.5. Na základní škole jste se v hodinách matematiky setkali s tzv. pohybovými úlohami. Nyní si jednu z nich připomeneme, abychom si ukázali, jak je možné využít pojem funkce. Předpokládejme, že dvě města, označme je A a B, jsou od sebe vzdálena přesně 100 kilometrů. Z města A vyjede auto značky Fabia a míří stálou rychlostí $v = 90$ km/h směrem k městu B. V ten samý okamžik vyjede z města B jiný automobil značky Honda a míří k městu A stálou rychlostí $v = 110$ km/h. Za předpokladu, že obě auta jedou po stejné silnici, vypočtěte, za jak dlouho po svém startu se obě auta potkají.



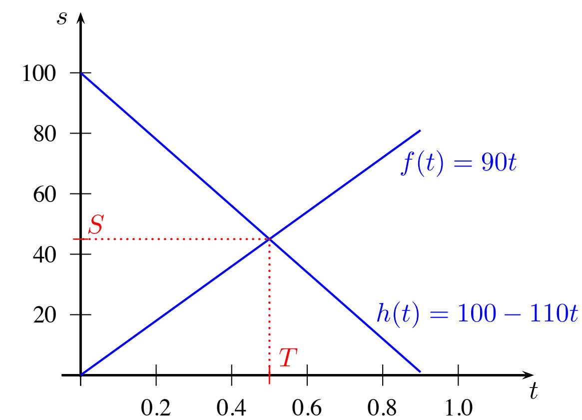
Řešení: Uvědomme si, že poloha obou aut se stále mění a mění se také jejich vzdálenost od obou měst. Vyjádřeme, jakou vzdálenost od města A mají v čase t obě auta. Vzdálenost Fabie od města A označme symbolem $f(t)$, vzdálenost Hondy od města A označme symbolem $h(t)$. Fabia vyjíždí z města A, její vzdálenost od A je proto v čase $t = 0$ rovna nule. Od města A se vzdaluje rychlostí $v = 90$ km/h, je tedy

$$f(t) = 90t.$$

Honda má v čase $t = 0$ vzdálenost 100 km od města A a tato se zkracuje o dráhu, kterou Honda urazila. Je tedy

$$h(t) = 100 - 110t.$$

Na přiloženém grafu můžete pozorovat grafické znázornění vzdálenosti s obou automobilů od města A.



Obrázek 5.4: Vzdálenost obou automobilů od města A v čase t

Je zřejmé, že v čase T se obě auta nacházejí na stejném místě a jejich vzdálenost od města A (označme ji symbolem S) je proto shodná. Hledáme tedy čas setkání T, ve kterém platí rovnost $f(T) = h(T)$. Dosazením předpisů obou funkcí dostaneme rovnici, jejímž řešením je hledaný čas setkání.

$$\begin{aligned} f(T) &= h(T) \\ 90\,T &= 100 - 110\,T \\ 200\,T &= 100 \\ T &= \frac{1}{2} \text{ hodiny} \end{aligned}$$

Výpočet funkčních hodnot obou funkcí v čase setkání $T = 0,5$ navíc umožní určit, jak daleko jsou obě auta od města A.

$$\begin{aligned} f(0,5) &= 90 \cdot 0,5 = 45 \text{ km} \\ h(0,5) &= 100 - 110 \cdot 0,5 = 100 - 55 = 45 \text{ km} \end{aligned}$$

Obě auta se tedy setkají po půlhodině cesty ve vzdálenosti 45 km od města A.

Jedním z důležitých pojmů, se kterým se v matematické analýze setkáváme, je *definiční obor* funkce. Jeho definici uvedeme později, nyní si jej přiblížíme následujícím příkladem.

Příklad 5.6

5.6. Je dána funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$. Vypočtěte funkční hodnoty $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(2)$.

Řešení: Hodnoty funkce f vypočteme dosazením příslušných hodnot $x \in \{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2\}$ do předpisu funkce.

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{1 - 0^2} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

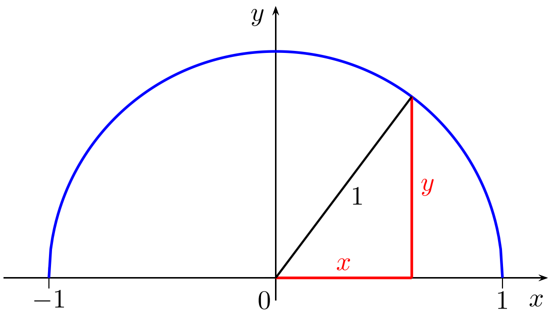
$$\begin{aligned} f(1) &= \sqrt{1 - 1^2} \\ &= \sqrt{0} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2) &= \sqrt{1 - 2^2} \\ &= \sqrt{-3} \\ &= ??? \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že v bodech $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ je funkce f definována a platí

$$f(0) = 1,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ f(1) = 0.$$

Pro $x = 2$ se nám nepodařilo určit příslušnou funkční hodnotu, neboť v oboru reálných čísel hodnota $\sqrt{-3}$ neexistuje (obecně - při práci s reálnými čísly druhá odmocnina ze záporného čísla neexistuje). Ze stejného důvodu nebudou existovat funkční hodnoty pro všechna x, pro která je výraz $1 - x^2$ záporný (proč?). Funkční hodnoty tedy můžeme vypočítat pouze pro taková x, pro která je výraz $1 - x^2$ nezáporný, což jsou všechna řešení nerovnice $1 - x^2 \leq 0$. Jejími kořeny jsou všechna $x \in \langle -1,\ 1\rangle$. Funkční hodnoty má tedy smysl určovat pouze pro $x \in \langle -1,\ 1\rangle$. Říkáme, že funkce f je definována pouze pro tyto hodnoty x a množina $\langle -1,\ 1\rangle$ tvoří tzv. *definiční obor* funkce f.

Nyní se pokusme poukázat na možný geometrický význam omezení možných hodnot x, pro která je možné vypočítat funkční hodnotu funkce f. V kapitole o historii pojmu funkce jsme zmínili souvislost funkce a křivky. Připomeňme, že křivka (v rovině) je složena z bodů o souřadnicích $[x, y]$. Předpis funkce nám přitom umožňuje popsat vztah mezi oběma souřadnicemi. Pomocí Pythagorovy věty lze snadno odvodit vztah, který platí pro body tvořící polovinu tzv. jednotkové kružnice.



Obrázek 5.5: K odvození rovnice půlkružnice

Z Obrázku 5.5 snadno vyčteme, že pro všechny body kružnice o souřadnicích $[x,\, y]$ platí vztah

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tuto rovnici tak můžeme považovat za tzv. rovnici kružnice. Vyjádříme-li (zkuste to) z tohoto vztahu souřadnici y pomocí x, dostaneme vztah

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

ze kterého rovnice

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

představuje „horní“ půlkružnici (ověřte pomocí výpočtu souřadnic několika bodů). Snad je nyní zřejmé, proč nemělo význam hledat funkční hodnoty pro jiná x než z množiny $x \in \langle -1,\, 1\rangle$.

5.3 Reálná funkce jedné reálné proměnné

V předchozích příkladech jsme ukázali některé možnosti použití funkce k výpočtu konkrétních úloh. Nyní konečně zavedeme definici tzv. funkce jedné reálné proměnné.

Definice 5.3.1. Pravidlo, podle kterého přiřazujeme každému číslu $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ právě jedno reálné číslo y, nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné*. Množinu D nazýváme *definiční obor funkce*. Číslo y nazýváme *funkční hodnota* (resp. *hodnota funkce*) v bodě x. Množinu všech funkčních hodnot nazýváme *obor hodnot funkce* a značíme symbolem H.

Definiční obor je tvořen hodnotami tzv. *nezávisle proměnné veličiny*, obor hodnot je tvořen hodnotami tzv. *závisle proměnné veličiny*. Pokud neřekneme jinak, budeme v této kapitole značit funkci písmenem f, nezávisle proměnnou veličinu písmenem x a závisle proměnnou veličinu písmenem y. K označení závisle proměnné se také používá symbol $f(x)$. Hodnotu x nazýváme také *argumentem* funkce $f(x)$. Je-li definiční obor D vztažen k funkci f, značíme ho symbolem $D(f)$. Analogicky bychom definiční obor funkce g značili symbolem $D(g)$ atd. Podobné pravidlo používáme pro označení oboru hodnot, tj. symboly $H(f)$, $H(g)$, používáme pro označení oborů hodnot funkcí f, g atd.

Definice 5.3.1 zavádí funkci jako pravidlo, s jehož pomocí přiřazujeme hodnotám nezávisle proměnné hodnoty závisle proměnné. Toto pravidlo může mít různé podoby. Nejčastěji je funkce zadána pomocí vzorce, kterým k dané hodnotě x vypočteme příslušnou hodnotu y. Tuto hodnotu y pak považujeme za funkční hodnotu funkce f v bodě x a značíme ji symbolem $f(x)$. Následující vzorce uvádějí možné příklady zadání funkce (funkčního předpisu)

$$f(x) = 5x - 12$$
$$g(x) = x^2 - 3x + 4.$$

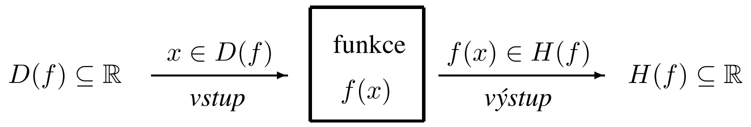
Obě uvedené funkce patří mezi tzv. *algebraické funkce*. Ty jsou tvořeny funkcemi, které vzniknou pomocí základních početních operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění a odmocnění) s polynomy. V případě většiny těchto funkcí snadno vypočteme funkční hodnotu $f(x)$ dosazením příslušného argumentu (hodnoty x).

Setkáme se však i s funkcemi, které nejsou odvozeny z polynomů. Jejich přesné funkční hodnoty lze často zjistit přímým výpočtem pouze obtížně, či vůbec, proto jsou jejich hodnoty tabelovány (tj. vypočteny s předem danou přesností a uvedeny v tabulkách). Takové funkce nazýváme *transcendentní funkce*. Mezi ně například patří

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \qquad u(x) &= \exp(x) \\
g(x) &= \cos x & \qquad v(x) &= \ln x \\
h(x) &= \operatorname{tg} x & \qquad w(x) &= \log x.
\end{aligned}
$$

U transcendentních funkcí je vhodné zapamatovat si funkční hodnoty pro některé významné hodnoty x a v případě nutnosti si funkční hodnoty pro ostatní hodnoty x najít v tabulkách či „strojích“ - kalkulačkách, počítačích s příslušným SW atd.

Obecně si lze představit funkci jako „černou skříňku“, do které vkládáme hodnoty z definičního oboru funkce, a tato skříňka přiřadí každé z těchto hodnot jedinečnou (funkční) hodnotu z oboru hodnot. Popsanou situaci můžeme symbolicky znázornit pomocí následujícího obrázku. V některých případech se můžeme setkat s definicí funkce



Obrázek 5.6: Symbolické znázornění funkce ve smyslu „černé skříňky“.

pomocí několika vzorců (předpisů), z nichž každý se uplatní pouze na vybrané podmnožině definičního oboru. Příkladem je funkce *absolutní hodnota* čísla x, kterou značíme symbolem $|x|$. Její definici lze zapsat ve tvaru

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Předpis funkce říká, že pokud je hodnota argumentu funkce nezáporné číslo, potom funkční hodnota je rovna přímo této hodnotě. Číslo pět je nezáporné, absolutní hodnota čísla pět bude rovna přímo této hodnotě, tedy číslu pět. Dále předpis pro absolutní hodnotu říká, že pokud je argument x funkce $|x|$ záporné číslo, potom funkce $|x|$ přiřadí této hodnotě opačné číslo $-x$. Číslo -2 je záporné, jeho absolutní hodnota bude rovna

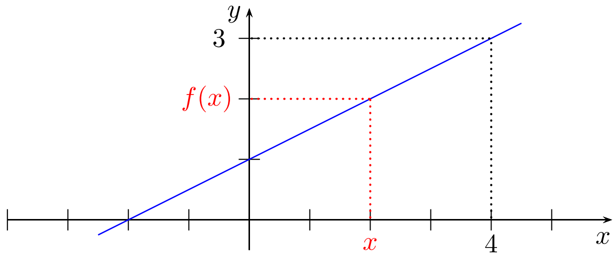
$$|-2| = -(-2) = 2,$$

což je v dobrém souladu s tím, jak známe pojem absolutní hodnoty ze střední školy.

5.3.1 Graf funkce

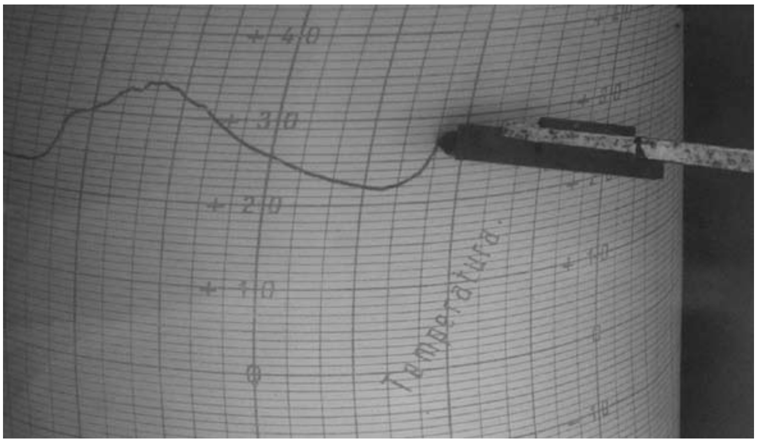
Při vytváření představy o „chování“ funkce hraje důležitou roli *graf funkce*. Rozumíme jím křivku složenou z bodů o souřadnicích $[x,\, y]$, kde x nabývá postupně všech hodnot z definičního oboru funkce a y je příslušná funkční hodnota příslušná argumentu x, je tedy $y = f(x)$. Na Obrázku 5.7 je zobrazen graf funkce $f(x) = \frac{1}{2}\,x + 1$. Grafem této funkce je přímka, která je složena z bodů o souřadnicích $[x,\, y]$. Z předpisu funkce snadno zjistíme, že hodnotě $x = 4$ přísluší funkční hodnota $y = f(4) = 3$. Součástí přímky (tj. grafu uvedené funkce) tedy musí být bod o souřadnicích $[4,\, 3]$, což je z Obrázku 5.7 dobře patrné.

V některých případech nastane situace, kdy neznáme vzorec stanovující funkční předpis, známe však graf uvádějící závislost mezi oběma proměnnými. Potom můžeme



Obrázek 5.7: Přiřazení funkční hodnoty k grafu

předpokládat, že daná funkce je určena přímo svým grafem. Situace je hezky vidět na Obrázku 5.8, kde zřejmě nenalezneme vzorec, který by určoval, jaká byla teplota T v čase t, nicméně z grafu jsme schopni tyto údaje vyčíst. Proto je pro nás graf pravidlem, podle kterého argumentu funkce přiřazujeme funkční hodnoty, a o funkci pak řekneme, že je zadána svým grafem. S grafy se ekonomové, ale nejenom oni, setkávají na každém



Obrázek 5.8: Záznam teploty T v čase t

kroku, neboť mnoho ekonomických situací je popsáno právě pomocí grafů. Je proto důležité umět „číst" údaje obsažené v grafech, rozumět jim a umět s nimi dále aktivně pracovat.

5.3.2 Definiční obor funkce

Důležitou roli při práci s funkcemi hraje stanovení definičního oboru funkce. Lze říci, že zadání definičního oboru představuje neopominutelnou součást zadání funkce. V některých případech lze definiční obor přirozeně omezit na nějakou podmnožinu $\mathbb{R}$, přičemž toto omezení je dáno podstatou situace, kterou funkce popisuje, jak je ukázáno v následujícím příkladě.

Příklad 5.7

5.7. Předpokládejme, že jisté těleso je vrženo kolmo vzhůru rychlostí $v_0 = 20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Vypočtěte, jak se v průběhu času bude měnit rychlost tělesa, tj. nalezněte vzorec, který popisuje okamžitou rychlost v tělesa v čase t.

Řešení: Zřejmě si dokážete představit, že při pohybu vzhůru se rychlost tělesa zmenšuje, až se posléze těleso zastaví a začne padat zpět na zem. Z fyzikální podstaty jevu plyne, že počáteční rychlost tělesa je v_0, „proti ní" působí tíhová síla Země, která její rychlost sníží v každém okamžiku o člen gt, kde g je tzv. tíhové zrychlení a jeho hodnotu budeme v tomto příkladu uvažovat rovnu $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Hledaný vzorec tedy bude mít podobu

$$v(t) = v_0 - gt,$$

v našem příkladě s konkrétními hodnotami $v_0 = 20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ lze vzorec přepsat do tvaru

$$v(t) = 20 - 10t. \tag{5.2}$$

Z tohoto vzorce lze vyčíst řadu údajů[4]). Například lze zjistit, jak dlouho bude těleso stoupat, než se jeho pohyb vzhůru zastaví. V tomto okamžiku totiž bude rychlost v tělesa rovna nule. Pro čas t v tomto okamžiku tedy platí rovnice

$$0 = 20 - 10t,$$

jejímž řešením je $t = 2\,\mathrm{s}$. Víme tedy, že těleso se po dvou sekundách pohybu vzhůru zastaví a začne padat dolů na zem. (Záporná hodnota rychlosti v tuto chvíli znamená, že se jedná o pohyb v opačném směru než na počátku pohybu.) Tento pohyb bude trvat stejně dlouho jako pohyb nahoru, na zem tedy dopadne po dalších dvou sekundách a zde se jeho pohyb zastaví. Platnost vzorce (5.2) je omezena pouze na dobu čtyř sekund, tedy pro $t \in \langle 0,\, 4\rangle$. Poté je okamžitá rychlost tělesa určena již jiným vzorcem, a to $v(t) = 0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Při práci s funkcemi se občas objeví předpis funkce bez uvedení příslušného definičního oboru. V takovém případě pak předpokládáme, že funkce je definována na „největší možné množině“, tedy definiční obor funkce je tvořen všemi hodnotami x, které má smysl dosadit do daného předpisu funkce a pro které je možné vypočítat funkční hodnotu $f(x)$. Takový definiční obor se často nazývá *maximální definiční obor*. Pokud nastane situace, že v zadání funkce není stanoven definiční obor, budeme předpokládat, že je jím právě zmíněný maximální definiční obor.

Při stanovování maximálního definičního oboru se vlastně snažíme najít hodnoty x, pro které nemá funkce smysl, a tyto hodnoty vyloučit z uvažovaného definičního oboru. Je vhodné vědět, ve kterých případech tato situace nastane. Uvedeme seznam případů, které se vyskytují nejčastěji.

- Je-li zadána funkce pomocí vzorce, který obsahuje zlomek, potom vyloučíme všechna x, pro která je hodnota jmenovatele rovna nule.
- Výraz, který je obsažený v sudé odmocnině (tj. druhé, čtvrté, …odmocnině), nesmí být záporný. Proto vyloučíme všechny hodnoty x, pro které je výraz pod odmocninou sudého řádu záporný.
- Některé elementární funkce nejsou definovány pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale pouze na nějaké podmnožině $\mathbb{R}$. Např. funkce $y = \log_a x$ je definována pouze pro $x > 0$, funkce $y = \arcsin x$, resp. $y = \arccos x$ jsou definovány pouze pro $x \in \langle -1, 1\rangle$. V podobných případech musíme vyloučit všechny hodnoty x, pro které se hodnota argumentu nachází mimo uvedené množiny. Argument funkce logaritmus musí být kladný, pro funkce $\arcsin$ a $\arccos$ musí být absolutní hodnota argumentu nejvýše rovna jedné, argument funkce tg, resp. cotg, nesmí být roven hodnotám $(2k-1)\pi/2$, resp. $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 5.8

5.8. Nalezněte definiční obor funkce

$$y = \frac{5 - x}{x^2 - 1}. \tag{5.3}$$

Řešení: Ve jmenovateli zlomku se nachází výraz $x^2 - 1$. V definičním oboru funkce proto nemohou být obsažena ta x, pro která je $x^2 - 1 = 0$. Vyřešíme tuto rovnici.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 && \ldots\ \textit{osamostatníme neznámou } x \\ x^2 &= 1 && \ldots\ \textit{odmocníme obě strany rovnice} \\ |x| &= 1 && \ldots\ \textit{je } \sqrt{x^2} = |x| \\ x_{1,2} &= \pm 1 && \ldots\ \textit{tedy } x_1 = -1, x_2 = 1 \end{aligned}$$

[4]) Při výpočtu předpokládáme, že pro kladné hodnoty rychlosti se vržené těleso pohybuje směrem vzhůru, pro záporné hodnoty rychlosti se pohybuje směrem dolů.

Definiční obor funkce nesmí obsahovat čísla -1 a 1. Jiná omezení na definiční obor v tomto případě nejsou. Proto platí $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1,\,1\}$.

Příklad 5.9

5.9. Nalezněte definiční obor funkce
$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}. \tag{5.4}$$

Řešení: Ve jmenovateli zlomku se nyní nachází výraz x^2+1. V definičním oboru funkce proto nemohou být obsažena ta x, pro která je $x^2+1=0$. Vyřešíme tuto rovnici.

$$\begin{aligned} x^2+1 &= 0 && \ldots\ \textit{osamostatníme neznámou } x \\ x^2 &= -1 \end{aligned}$$

Již víme, že druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná. Neexistuje proto reálné číslo x, pro které by bylo $x^2 = -1$, tedy ani reálné číslo, pro je $x^2+1=0$. Do předpisu funkce tedy můžeme za x dosadit jakoukoliv číselnou hodnotu a funkce v ní bude definována. Je $D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 5.10

5.10. Nalezněte definiční obor funkce
$$y = \frac{3x^2+5x+10}{50}. \tag{5.5}$$

Řešení: Předpis funkce sice obsahuje zlomek, ale jeho jmenovatel má pro jakékoliv x hodnotu 50. Pro každé x je tedy hodnota jmenovatele různá od nuly. Je $D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 5.11

5.11. Nalezněte definiční obor funkce
$$y = \frac{3+5x}{2+\frac{2-x}{x-3}}. \tag{5.6}$$

Řešení: Výraz (5.6) obsahuje dva různé zlomky, tedy i dva různé jmenovatele. Pod hlavní zlomkovou čarou se nachází výraz $2+\frac{2-x}{x-3}$. Zjistíme, pro jaké x je $2+\frac{2-x}{x-3}=0$, a tyto body vynecháme. Protože je
$$2+\frac{2-x}{x-3} = \frac{(2x-6)+(2-x)}{x-3} = \frac{x-4}{x-3},$$
vyloučíme hodnotu $x=4$. Dále se ve výrazu (5.6) vyskytuje zlomek $\frac{2-x}{x-3}$ a jeho jmenovatel také nesmí být roven nule. Proto vyloučíme hodnotu $x=3$. Definiční obor funkce (5.6) je $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{3,\ 4\} = (-\infty,3)\cup(3,4)\cup(4,\infty)$.

Výše uvedené příklady ukázaly, jak nalézt definiční obor funkce v případech, kdy se ve funkčním předpisu vyskytne zlomek. Nyní se zaměříme na ty případy, kdy daný předpis obsahuje odmocniny.

Příklad 5.12

5.12. Nalezněte definiční obor funkce
$$y = \sqrt{4-2x}. \tag{5.7}$$

Řešení: Odmocnina obsahuje výraz $4-2x$. Tento výraz nesmí být záporný. Definiční obor funkce budou tvořit všechna čísla, která vyhovují nerovnici $4-2x \geq 0$. Proto je $D(f) = (-\infty, 2\rangle$.

Příklad 5.13

5.13. Nalezněte definiční obor funkce
$$y = \sqrt{\frac{2x+3}{3-x}}. \tag{5.8}$$

Řešení: Výraz pod odmocninou musí být nezáporný. Musíme tedy zjistit, pro jaká x platí
$$\frac{2x+3}{3-x} \geq 0.$$

Zlomek ve výrazu (5.8) bude kladný, budou-li mít čitatel i jmenovatel buď oba kladnou hodnotu, nebo oba zápornou hodnotu; tedy

$$\frac{2x+3}{3-x} > 0 \Leftrightarrow [(2x+3>0) \wedge (3-x>0)] \vee [(2x+3<0) \wedge (3-x<0)].$$

Nerovnice $2x+3>0$ platí pro $x \in (-\frac{3}{2}, \infty)$, řešením nerovnice $3-x>0$ jsou $x \in (-\infty, 3)$. Protože chceme, aby obě nerovnosti byly splněny současně, uvažujeme průnik obou uvedených intervalů. Čitatel i jmenovatel zlomku budou mít kladnou hodnotu na intervalu $(-\frac{3}{2}, 3)$.

Podobně určíme hodnoty x, pro které jsou čitatel i jmenovatel zlomku záporné. Nerovnice $2x+3<0$ platí pro $x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$, nerovnice $3-x<0$ platí pro $x \in (3, \infty)$. Průnik obou uvedených množin je prázdná množina, tedy pro žádné $x \in \mathbb{R}$ nenastane případ, že by čitatel i jmenovatel měly současně zápornou hodnotu. Výraz pod odmocninou může být roven i nule. Tento případ nastane pro $2x+3=0$, tedy pro $x=-\frac{3}{2}$. Definiční obor je roven sjednocení množin $(-\frac{3}{2}, 3)$, $\emptyset$ a $\{-\frac{3}{2}\}$. Je tedy $D(f) = \langle -\frac{3}{2}, 3)$.

5.3.3 Operace s funkcemi

S funkcemi lze provádět řadu početních operací: součet a rozdíl funkcí, součin a podíl funkcí, resp. násobení funkce reálným číslem.

Nejprve předpokládejme, že funkce f a g mají shodný definiční obor D. Potom součtem funkcí f a g rozumíme funkci $(f+g)(x)$, jejíž funkční hodnota v bodě x je rovna součtu funkčních hodnot funkcí f a g v bodě x, pro všechna $x \in D$ je tedy $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Analogicky bychom mohli definovat i rozdíl, součin a podíl funkcí f a g. V případě podílu funkcí f a g však musíme z definičního oboru D odstranit všechna x, pro která je $g(x)=0$.

Nyní se zaměříme na případ, kdy jsou definiční obory obou funkcí různé. Označme definiční obor funkce f symbolem $D(f)$, funkce g symbolem $D(g)$. Abychom mohli určit hodnotu součtu funkcí f a g v bodě x, musí být možné vypočítat hodnoty obou funkcí v tomto bodě, tj. obě funkce musí být v bodě x definovány. Takový bod patří do definičních oborů obou funkcí, tedy do průniku množin $D(f)$ a $D(g)$. V tomto okamžiku můžeme shrnout naše poznatky. Definičním oborem funkce, která je součtem funkcí f a g, je průnik definičních oborů funkcí f a g, tedy

$$D(f+g) = D(f) \cap D(g).$$

Analogicky pro definiční obory funkcí vzniklých pomocí zbylých početních operací s funkcemi platí

$$\begin{aligned} D(f-g) &= D(f) \cap D(g) \\ D(f \cdot g) &= D(f) \cap D(g) \\ D(f/g) &= D(f) \cap (D(g) \setminus \{x;\, g(x)=0\}). \end{aligned}$$

Vzhledem k výše uvedenému může nastat situace, kdy funkce f, resp. g budou definovány na množině $D(f)$, resp. $D(g)$, ale jejich součet (rozdíl, ...) nebude existovat, viz následující příklady.

Příklad 5.14

5.14. Jsou dány funkce $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ a $g(x) = \sqrt{4-x^2}$. Vypočtěte definiční obor funkce, která vznikne jejich součtem.

Řešení: Snadno vypočteme, že definičním oborem funkce $f(x)$, resp. $g(x)$ je množina $D(f) = (-\infty, -1\rangle \cap \langle 1, \infty)$, resp. $D(g) = \langle -2, 2\rangle$. Pro jejich průnik platí

$$D(f) \cap D(g) = \langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle.$$

Tato množina bude definičním oborem součtu funkcí $f(x)$ a $g(x)$.

Příklad 5.15

5.15. Jsou dány funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ a $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Vypočtěte definiční obor funkce, která vznikne jejich součinem.

Řešení: Definičním oborem funkce $f(x)$, resp. $g(x)$ jsou množiny $D(f) = \langle -1, 1\rangle$, $D(g) = (-\infty, -1\rangle \cap \langle 1, \infty)$. Pro jejich průnik platí

$$D(f) \cap D(g) = \{-1, 1\}.$$

Definičním oborem funkce, která je součinem funkcí $f(x)$ a $g(x)$, je tedy „pouze“ dvouprvková množina obsahující čísla -1 a 1.

Příklad 5.16

5.16. Jsou dány stejné funkce jako v Příkladu 5.15. Vypočtěte definiční obor funkce, která je podílem funkcí f a g.

Řešení: Již víme, že definičním oborem $f(x)$, resp. $g(x)$ je množina $D(f) = \langle -1, 1\rangle$, resp. $D(g) = (-\infty, -1\rangle \cap \langle 1, \infty)$. Z množiny $D(g)$ však musíme odstranit všechny hodnoty x, pro které je $g(x) = 0$, tedy všechna řešení rovnice $\sqrt{x^2 - 1} = 0$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 1} &= 0 && \text{\dots\ \textit{obě strany rovnice umocníme}}\\
x^2 - 1 &= 0 && \text{\dots\ \textit{osamostatníme neznámou} } x\\
x^2 &= 1 && \text{\dots\ \textit{obě strany rovnice odmocníme}}\\
|x| &= 1 && \dots\ \textit{je } \sqrt{x^2} = |x|\\
x_{1,2} &= \pm 1 && \dots\ \textit{tedy } x_1 = -1 \textit{ a } x_2 = 1
\end{aligned}$$

Kořeny rovnice jsou $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Platí tedy

$$\begin{aligned}
D(f/g) &= D(f) \cap (D(g) \setminus \{x;\, g(x) = 0\})\\
&= \langle -1, 1\rangle \cap \big[\big((-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)\big) \setminus \{-1, 1\}\big]\\
&= \langle -1, 1\rangle \cap [(-\infty, -1) \cup (1, \infty)]\\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Definičním oborem funkce f/g je prázdná množina. Přestože obě funkce f a g jsou definovány na neprázdných množinách (které nejsou disjunktní), jejich podíl není definován pro žádné $x \in \mathbb{R}$.

5.3.4 Vlastnosti funkcí

Pojem funkce používáme k popisu vztahu mezi veličinami. Tento vztah může vykazovat různé vlastnosti. Budeme-li schopni dobře chápat, co tyto vlastnosti znamenají, umožní nám to hlubší pochopení studovaných jevů ať již z oblasti ekonomie, sociálních věd, nebo i z běžného života.

Ohraničená funkce

V následující části se budeme zabývat pojmem ohraničené funkce. Nejprve probereme některé situace, se kterými se již každý čtenář pravděpodobně potkal.

Příklad 5.17

5.17. Představme si čerstvě uvařenou kávu a sledujme, jak se v čase mění její teplota. V různých časových okamžicích bude teplota různá, ovšem v žádném časovém okamžiku teplota kávy neklesne pod teplotu okolního prostředí (označme tuto okolní teplotu symbolem T_0). Můžeme tedy říci, že v libovolném čase t je teplota T větší než číslo T_0. Řekneme, že v tomto případě je teplota kávy zdola ohraničena teplotou okolního prostředí.

Příklad 5.18

5.18. Vyhodíme-li do vzduchu nějaké těleso rychlostí v_0 (menší, než je první kosmická rychlost), bude z počátku stoupat vzhůru a jeho výška nad zemí se bude neustále zvětšovat. Přitom se bude snižovat rychlost jeho pohybu vzhůru, až se po jisté době těleso zastaví ve výšce H a začne padat dolů. Výška h tělesa nad zemí proto nikdy nepřesáhne výšku H. Jinými slovy, ve všech možných odpovídajících časových okamžicích t bude výška h menší, než je číslo H. V takovém případě, kdy výška nepřekročí nějakou hodnotu H, řekneme, že výška tělesa je shora ohraničena hodnotou H.

Takových případů, kdy řekneme, že hodnota nějaké veličiny je ohraničena (shora či zdola), nalezneme celou řadu. Jistě byste dokázali zdůvodnit, že rychlost jakéhokoliv tělesa je shora ohraničena (nemůže překročit rychlost světla), věk jakéhokoliv člověka je shora ohraničen (nemůže být vyšší než stáří vesmíru), rychlost auta je zdola ohraničená (nemůže být záporná, tj. nemůže být menší než nula), oficiální plat zaměstnance je zdola ohraničen (nesmí být menší, než je minimální mzda) atd. Všimněte si, že v případě rychlosti automobilu jsme si uvedli, že tato je ohraničena jak zdola, tak shora.

Definice 5.3.2. Řekneme, že funkce f je *zdola ohraničená*, jestliže existuje číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \geq L$. Funkce $f(x)$ je *shora ohraničená*, existuje-li číslo $U \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \leq U$. Funkce $f(x)$ je *ohraničená*, je-li ohraničená shora i zdola.

Uvědomme si, že pokud je číslo U horní mezí funkčních hodnot, potom nerovnost $f(x) \leq U$ musí být splněna pro všechna $x \in D(f)$. Řešením nerovnice $f(x) \leq U$ tedy musí být všechna x z definičního oboru funkce f. Podobně, má-li být L dolní mezí nějaké zdola ohraničené funkce, potom řešením nerovnice $L \leq f(x)$ musí být všechna x z definičního oboru funkce f.

5.19. Vyřešme nerovnici $1 - x^2 < 2$. **Příklad 5.19**

Řešení: Řešení nerovnice najdeme snadno osamostatněním neznámé x.

$$
\begin{aligned}
1 - x^2 &< 2 && \ldots \textit{k oběma stranám nerovnice} \\
& && \textit{přičteme výraz } x^2 - 2 \\
1 - x^2 + \left(x^2 - 2\right) &< 2 + \left(x^2 - 2\right) && \ldots \textit{zjednodušíme} \\
-1 &< x^2 && \ldots \textit{řešením je } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Druhá mocnina x je nezáporná pro jakoukoliv hodnotu x. Pro všechna reálná čísla x tedy platí $0 \leq x^2$ a tím spíše i nerovnost $-1 < x^2$. Zjistili jsme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) = 1 - x^2 < 2$. Funkce $f(x)$ je proto shora ohraničená. Roli horní meze zde hraje číslo $U = 2$. Za horní mez bychom mohli samozřejmě zvolit jakékoliv větší číslo než $U = 2$ a daná podmínka by stále byla splněna. Zvídaví čtenáři jistě najdou i menší hodnotu U, než je číslo dva. Nicméně, při vyšetřování, zda je funkce ohraničená, nemusíme nutně najít nejmenší možnou horní mez. K rozhodnutí o tom, zda je funkce shora ohraničená, stačí ověřit, že nějaká taková mez existuje.

V následujícím příkladu podrobně rozebereme konkrétní možnost, jak poznat případnou horní či dolní mez ohraničené funkce.

5.20. Rozhodněte, zda je funkce **Příklad 5.20**

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

ohraničená.

Řešení: V předchozím příkladu jsme pouze ověřovali, že dané číslo je horní mezí nějaké funkce. Nyní musíme hodnoty U a L najít sami a ověřit, že se skutečně jedná o horní a dolní mez funkce.

Nejprve se pokusíme odhadnout nějakou možnou horní mez. Vidíme, že funkční předpis má tvar zlomku, kde v čitateli je kladné číslo a ve jmenovateli je výraz $1 + x^2$, který nemůže mít zápornou hodnotu. Takový zlomek nabude svou nejvyšší možnou hodnotu při nejvyšší možné hodnotě čitatele a nejnižší možné hodnotě jmenovatele.[5])

[5]) Toto tvrzení vyplývá z faktu, že hodnota celého zlomku vlastně uvádí, „kolikrát“ je čitatel větší než jmenovatel.

V našem případě je hodnota čitatele konstantní - rovná jedné. Budeme se tedy snažit najít nejmenší možnou hodnotu jmenovatele. Výraz x^2 nabude svou nejmenší hodnotu pro $x = 0$. V ostatních případech bude hodnota x^2 kladná. Z toho důvodu nabývá výraz $1 + x^2$ nejmenší hodnotu pro $x = 0$ a tato hodnota je rovna jedné. Nejvyšší možná hodnota celého zlomku nastane pro $x = 0$ a tato hodnota je

$$f(0) = \frac{1}{1+0^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Úvahou jsme tedy zjistili, že horní mezí dané funkce je $U = 1$. Toto tvrzení snadno ověříme vyřešením nerovnice

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1,$$

jejímž řešením je množina všech reálných čísel, tedy celý definiční obor uvedené funkce. Funkce $f(x)$ je tedy shora ohraničená.

Snadno též ověříme, že funkce $f(x)$ je ohraničená i zdola. Vzhledem k nezápornosti výrazu $1 + x^2$ je zřejmé, že předpis uvedené funkce má tvar zlomku s kladným čitatelem i jmenovatelem. Hodnota zlomku proto musí být kladná pro jakékoliv $x \in \mathbb{R}$. Dolní mezí funkce f proto může být například číslo $L = 0$. Toto tvrzení opět snadno ověříme pomocí nerovnice

$$\frac{1}{1+x^2} \geq 0,$$

jejímž řešením je množina všech reálných čísel. Funkce f je ohraničená zdola i shora a vzhledem k nerovnostem

$$0 < f(x) \leq 1,$$

které jsou splněny pro všechna $x \in D(f) = \mathbb{R}$, je ohraničená i „celkově“.

Sudá a lichá funkce

Vzorec 5.1 na straně 217 uvádí definici funkce absolutní hodnota čísla x. Pro tuto funkci platí, že její hodnota v daném bodě x a v bodě s opačným znaménkem $-x$ je stejná, např. $|-8| = |8|$, resp. $|3| = |-3|$ atd. Lze říci, že tato funkce splňuje pro všechna $x \in D(f)$ rovnost $f(x) = f(-x)$. Funkce s touto vlastností nazýváme sudá funkce.

Definice 5.3.3. Funkci $f(x)$ nazveme *sudá*, je-li pro všechna $x \in D(f)$ splněna rovnost $f(-x) = f(x)$.

Název této vlastnosti si snadno zapamatujeme, uvědomíme-li si, které další funkce jsou sudé, viz následující příklad.

Příklad 5.21

5.21. Ověřte, zda funkce $f(x) = x^2$ je sudá.

Řešení: Sudost funkce ověříme tím, že ověříme, zda jsou splněny podmínky definice sudé funkce. Následující rovnosti platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = x^2$ ... *definice funkce f*

$f(-x) = (-x)^2$ ... *funkční hodnota je rovna druhé mocnině argumentu*

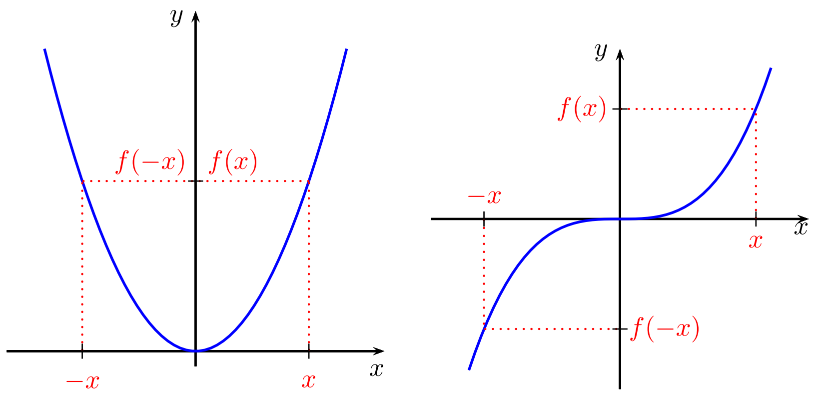
$f(-x) = x^2$ ... *pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $(-x)^2 = x^2$*

$f(-x) = f(x)$ ... *hodnoty $f(x)$ i $f(-x)$ se pro dané x rovnají*

Ukázali jsme, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje rovnost $f(-x) = f(x)$ pro každé reálné číslo x. Tím jsme dokázali, že funkce $f(x) = x^2$ je sudá.

Analogicky bychom dokázali, že sudé jsou i ostatní funkce ve tvaru $f(x) = x^n$, kde n je sudé číslo. Lze předpokládat, že právě odtud pochází název zmíněné vlastnosti.

Sudost funkce se snadno pozná i z jejího grafu. Víme-li, že funkce f má stejnou funkční hodnotu v bodech x a $-x$, potom příslušné body na grafu musí být osově souměrné dle osy y, viz Obrázek 5.9(a). Tato vlastnost platí pro všechna $x \in D(f)$, celý graf sudé funkce proto musí být osově souměrný dle osy y.



(a) Osová souměrnost sudé funkce vyplývající z rovnice $f(-x) = f(x)$

(b) Středová souměrnost liché funkce vyplývající z rovnosti $f(-x) = -f(x)$

Obrázek 5.9: Grafy sudé a liché funkce

Všimněte si, že neustále zdůrazňujeme, že rovnost $f(-x) = f(x)$ musí být splněna pro všechna $x \in D(f)$. Při posuzování sudosti funkce proto nestačí ověřit tuto rovnost pro několik náhodně vybraných dvojic x a $-x$, viz následující příklad.

5.22. Rozhodněte o sudosti funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 5$. **Příklad 5.22**

Řešení: Nejprve si ověřme, zda se funkční hodnota rovná pro nějakou náhodně vybranou dvojici nezávisle proměnných s opačným znaménkem, např. $x = -1$ a $x = 1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) + 5 \\ &= -1 + 3 \cdot 1 + 1 + 5 \\ &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(1) &= (1)^3 + 3(1)^2 - (1) + 5 \\ &= 1 + 3 \cdot 1 - 1 + 5 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Je tedy $f(-1) = f(1)$. Můžeme z této rovnosti rozhodnout o sudosti funkce? Odpověď je záporná, o čemž nás přesvědčí výpočet funkčních hodnot téže funkce pro jinou dvojici $-x$ a x.

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) + 5 \\ &= -8 + 3 \cdot 4 + 2 + 5 \\ &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2) &= (2)^3 + 3(2)^2 - (2) + 5 \\ &= 8 + 3 \cdot 4 - 2 + 5 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Není tedy pravda, že rovnost $f(-x) = f(x)$ je splněna pro všechna $x \in D(f)$, funkce proto není sudá.

Poznámka 5.3.4. V definici sudé funkce porovnáváme funkční hodnoty v bodech $-x$ a x. Předpokládáme proto, že ke každému x existuje i hodnota $-x$. Z tohoto požadavku vyplývá, že i definiční obor sudé funkce musí být souměrný vzhledem k bodu $x = 0$. Pokud tato podmínka nebude splněna, funkci nemůžeme považovat za sudou.

Analogickou vlastností k sudosti je tzv. lichost funkce. Taková funkce při změně znaménka argumentu změní i znaménko funkční hodnoty.

Definice 5.3.5. O funkci $f(x)$ řekneme, že je *lichá*, je-li pro všechna $x \in D(f)$ splněna rovnost $f(-x) = -f(x)$.

Pro lichou funkci lze odvodit mnoho vlastností, které jsou analogické k vlastnostem sudé funkce. Graf liché funkce je středově souměrný dle počátku souřadných os, viz Obrázek 5.9(b). Definiční obor liché funkce musí být souměrný vzhledem k bodu $x = 0$. Snadno se dokáže, že funkce ve tvaru $f(x) = x^n$, kde n je liché číslo, jsou liché.

Příklad 5.23

5.23. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = x^3 - x$ lichá.

Řešení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Zjistili jsme, že pro všechna $x \in D(f)$ je splněna rovnost $f(-x) = -f(x)$, z tohoto důvodu je funkce $f(x)$ lichá. Pro definiční obor funkce platí $D(f) = \mathbb{R}$, a tak je splněn i požadavek souměrnosti definičního oboru.

Příklad 5.24

5.24. Rozhodněte o sudosti, resp. lichosti funkce $f(x) = x^3 - x^2$.

Řešení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$. Funkce $f(-x)$ není rovna $f(x)$, ani $-f(x)$, proto není sudá, ani lichá.

Mnoho funkcí vzniká pomocí početních operací sčítání, násobení, ..., dalších funkcí. Například $f(x) = x^3 + x$ můžeme považovat za funkci, která vznikne součtem funkcí $g(x) = x^3$ a $h(x) = x$. Při vyšetřování sudosti, resp. lichosti takových funkcí nám může pomoci, uvědomíme-li si, zda jsou tyto původní funkce sudé, resp. liché. Názornou ukázku uvedeme v následujícím příkladu.

Příklad 5.25

5.25. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ i $g(x)$ jsou liché a průnikem jejich definičních oborů je množina D. Jaká tvrzení platí o sudosti, resp. lichosti funkcí, které vzniknou jejich součtem, resp. součinem?

Řešení: Vzhledem k lichosti obou funkcí platí pro všechna $x \in D$ rovnosti

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{resp.} \quad g(-x) = -g(x).$$

Potom je

$$\begin{aligned}(f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) = -f(x) + [-g(x)] = -f(x) - g(x) \\ &= -[f(x) + g(x)] = -(f+g)(x).\end{aligned}$$

Vzhledem k rovnosti $(f+g)(-x) = -(f+g)(x)$ pro všechna $x \in D$ můžeme říci, že součet dvou lichých funkcí je opět lichá funkce. Toto tvrzení můžeme zapsat ve tvaru $L + L = L$, kde symbol L znamená lichou funkci. Dále platí

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Zjistili jsme, že pro všechna $x \in D$ platí rovnost $(f \cdot g)(-x) = (f \cdot g)(x)$. Z toho důvodu můžeme říci, že součin dvou lichých funkcí je sudá funkce, symbolicky zapsáno $L \cdot L = S$, kde L značí lichou funkci, S představuje sudou funkci.

Analogická tvrzení lze odvodit i v ostatních případech. Čtenáři si jistě zdůvodní platnost následujících tvrzení $S + S = S$, $S - S = S$, $S \cdot S = S$, $S/S = S$, $L - L = L$, $L/L = S$, $S \cdot L = L$, $S/L = L$, $L/S = L$ atd.

Periodická funkce

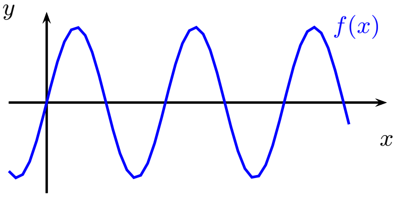
V běžném životě se potkáváme s jevy, které se pravidelně opakují - jsou tzv. periodické. Ve stejném smyslu jsou zavedeny i periodické funkce. Rozumíme jimi funkce, jejichž funkční hodnoty se začnou od jisté hodnoty argumentu opakovat.

Definice 5.3.6. Funkce f se nazývá *periodická*, jestliže existuje takové kladné reálné číslo p, že pro všechna $x \in D(f)$ je splněna rovnost $f(x+p) = f(x)$. Číslo p nazýváme *periodou* funkce f, nejmenší kladnou periodu nazýváme *základní periodou* funkce f (pokud tato nejmenší kladná perioda existuje).

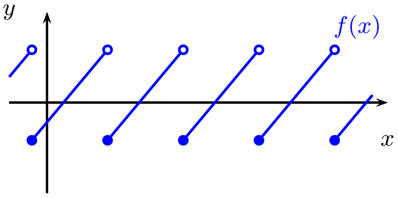
Z uvedené definice vyplývá, že kromě každého $x \in D(f)$ musí do definičního oboru funkce patřit také hodnoty $x + p$, $x + 2p$, $x + 3p$, ..., a také hodnoty $x - p$, $x - 2p$, $x - 3p$ atd. Přitom pro všechna $x \in D(f)$ platí rovnosti

$$f(x) = f(x \pm p) = f(x \pm 2p) = f(x \pm 3p) = \dots .$$

Důležitým příkladem periodických funkcí jsou goniometrické funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, kterým se budeme blíže věnovat v Kapitole 5.7.



(a) Část grafu periodické funkce



(b) Část grafu periodické funkce

Obrázek 5.10: Grafy periodických funkcí

Rostoucí a klesající funkce

V běžném životě se často setkáváme se situacemi, kdy nějaká veličina tzv. roste, či klesá. V této kapitole upřesníme, co z matematického hlediska tento růst či pokles znamená. Začneme několika jednoduchými ilustračními příklady.

Z fyziky je známo, že s rostoucí nadmořskou výškou klesá hodnota atmosférického tlaku. Při studiu ekonomie si uvědomíte, že u většiny výrobků s rostoucí cenou výrobku klesá počet lidí ochotných si tento výrobek zakoupit. Při stahování dat z internetu platí, že s rostoucí rychlostí stahování dat se zmenšuje čas potřebný k jejich stažení. Všechny tyto situace mají jeden společný rys. Vždy popisují vztah mezi dvěma veličinami, při změně hodnot jedné veličiny dojde ke změně hodnot druhé veličiny a navíc platí, že zvětší-li se hodnota prvně zmíněné (nezávislé) veličiny, potom se zmenší hodnota závislé veličiny - při růstu nadmořské výšky klesne tlak, při růstu ceny výrobku klesne poptávka po tomto výrobku atd. Již víme, že z matematického pohledu považujeme vztah mezi dvěma veličinami za funkci. Jestliže při růstu hodnot jedné veličiny dochází k poklesu hodnot druhé veličiny, říkáme, že je tato funkce klesající.

Definice 5.3.7. Řekneme, že funkce f je *klesající na intervalu* I, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí, že je-li $x_1 < x_2$, potom je $f(x_1) > f(x_2)$.

Právě podaná definice je v souladu s výše uvedenými situacemi. Představme si, že známe předpis $p(h)$, udávající závislost hodnoty atmosférického tlaku p na nadmořské výšce h[6]). Z výšky h_1 vystoupáme do výšky h_2, je tedy $h_1 < h_2$. Potom tlak $p(h_2)$ ve výšce h_2 je nižší než tlak $p(h_1)$ ve výšce h_1. Tedy, je-li $h_1 < h_2$, potom je $p(h_1) > p(h_2)$. Za předpokladu, že při každém zvýšení nadmořské výšky dojde k poklesu atmosférického tlaku, můžeme označit atmosférický tlak za klesající funkci nadmořské výšky.

V jiných situacích se můžeme setkat s tím, že s rostoucí hodnotou jedné veličiny se zvětšuje i nějaká s ní spojená veličina. Uveďme například závislost spotřeby benzínu na vzdálenosti, kterou jsme ujeli autem. Čím větší vzdálenost urazíme, tím více benzínu během cesty spotřebujeme. Možná by vás napadly i nějaké další případy. Jistě si umíte představit, že čím větší je úroková míra na nějakém účtu, tím větší úrok nám bude k účtu připsán; vzroste-li počet návštěvníků kina, potom lze očekávat i větší tržby ze vstupného atd. V takovém případě říkáme, že funkce popisující vztah mezi oběma veličinami je rostoucí funkcí.

Definice 5.3.8. Řekneme, že funkce f je *rostoucí na intervalu* I, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí, že je-li $x_1 < x_2$, potom je $f(x_1) < f(x_2)$.

Definice 5.3.8 jinými slovy říká, že pro rostoucí funkci se při zvýšení hodnoty nezávisle proměnné (tj. proměnné x) zvýší hodnota závisle proměnné (tj. zvýší se funkční hodnota) a sníží-li se hodnota nezávisle proměnné, sníží se hodnota závisle proměnné.

V některých případech mezi dvěma veličinami předpokládáme takovou závislost, že při vzrůstu jedné veličiny hodnota druhé veličiny neklesá (tj. zůstane stejná nebo vzroste). Funkci vyjadřující takový vztah nazýváme neklesající funkcí.

[6]) Takový vzorec skutečně existuje, za jistých zjednodušujících předpokladů přibližně platí, a ve fyzice se nazývá barometrická rovnice. Tento vztah (funkci) využívají např. outdoorové hodinky k stanovení nadmořské výšky na základě znalosti aktuálního atmosférického tlaku.

Definice 5.3.9. Řekneme, že funkce f je *neklesající na intervalu* I, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí, že je-li $x_1 < x_2$, potom je $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definice 5.3.9 říká, že pro neklesající funkci platí, že se při zvýšení hodnoty nezávisle proměnné nesníží hodnota závisle proměnné (tj. buď se zvětší, nebo zůstane stejná). Sníží-li se hodnota nezávisle proměnné, potom funkční hodnota zůstane stejná nebo se zmenší.

Definice 5.3.10. Řekneme, že funkce f je *nerostoucí na intervalu* I, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí, že je-li $x_1 < x_2$, potom je $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definice 5.3.10 tvrdí, že pokud zvýšíme hodnotu nezávisle proměnné u nerostoucí funkce, tak se nezvýší hodnota nezávisle proměnné veličiny, analogicky při snížení hodnoty nezávisle proměnné.

Pokuste se najít případ, kdy funkce popisující vztah mezi dvěma veličinami je (ne)rostoucí, resp. (ne)klesající.

Příklad 5.26

5.26. Na Obrázku 5.8 na straně 218 je zobrazen záznam z pouličního teploměru, který ukazuje, jak se v daném dni vyvíjela venkovní teplota v čase, tedy ukazuje graf funkce $T(t)$, kde T je hodnota teploty v čase t. Pokuste se určit, ve kterých intervalech byla tato funkce rostoucí a ve kterých klesající.

Kromě pojmu funkce rostoucí či klesající na intervalu, se můžeme setkat i s lokální charakteristikou tohoto pojmu, tj. s pojmem funkce rostoucí nebo klesající v bodě.

Definice 5.3.11. Řekneme, že funkce je rostoucí v bodě x_0, jestliže existuje nějaké jeho okolí $O(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí, která jsou menší než x_0, je $f(x) < f(x_0)$ a pro všechna x z tohoto okolí, která jsou větší než x_0, platí $f(x) > f(x_0)$. Přechodem k obráceným nerovnostem bychom dostali definici funkce, která je klesající v bodě x_0.

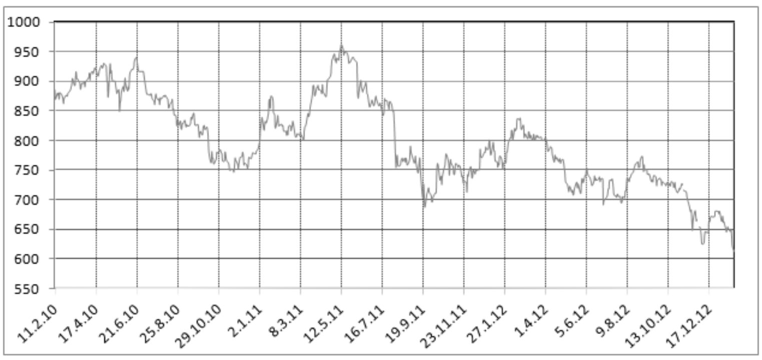
Z Definice 5.3.11 je zřejmé, že např. funkce sgn definovaná rovnostmi

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

je rostoucí v bodě $x = 0$, neboť je zřejmé, že při volbě jakkoliv širokého okolí $O(0)$ bude vždy pro $x < 0$ platit $\operatorname{sgn} x < \operatorname{sgn} 0$ a pro $x > 0$ bude $\operatorname{sgn} x > \operatorname{sgn} 0$. Povšimněte si přitom, že pomocí definice funkce rostoucí na intervalu nelze najít žádný interval, ve kterém by funkce $\operatorname{sgn} x$ byla rostoucí.

Příklad 5.27

5.27. Na Obrázku 5.11 je zobrazen vývoj ceny akcie společnosti ČEZ, a.s. Určete, ve kterých časových okamžicích (bodech) cena akcie rostla a ve kterých cena klesala.



Obrázek 5.11: Vývoj ceny akcií společnosti ČEZ, a.s.

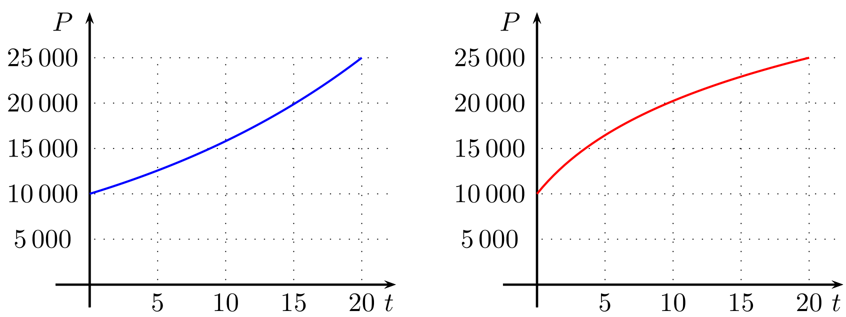
Poznamenejme, že funkci, která je na celé množině I rostoucí, nebo je na celé množině I klesající, nazýváme *ryze monotónní* funkce na množině I. Funkci, která je na celé množině I buď jenom neklesající, nebo jenom nerostoucí nazýváme *monotónní* funkcí na množině I.

Konvexní a konkávní funkce

Pod pojmem *konvexní*, resp. *konkávní* funkce si můžete představit vlastnost, která v širším pojetí uvádí, zda je graf funkce prohnutý směrem dolů, resp. nahoru. Zkoumáme-li, zda je funkce konvexní nebo konkávní, potom zjišťujeme tzv. *vypuklost* funkce. Uvedení této vlastnosti funkcí slouží k jemnějšímu popisu chování funkcí. Pěkným názorným příkladem vypuklosti je následující příklad k zamyšlení.

Příklad 5.28

5.28. Představte si, že na dvou uvedených grafech jsou přibližně zobrazeny dva různé způsoby, kterými se bude vyvíjet výše vašeho platu v následujících dvaceti letech. Všimněte si, že pobírané platy na počátku období (nástupní plat je roven 10 000 Kč) se shodují v obou případech a stejně tak se shodují i platy na konci uvedeného období (konečný plat je roven 25 000 Kč). Je nějaký rozdíl ve vývoji obou platů? Dali byste některé z variant přednost (jako zaměstnanci, nikoliv jako zaměstnavatelé)?



(a) Konvexní tvar funkce

(b) Konkávní tvar funkce

Obrázek 5.12: Rozdílný vývoj výše mzdy

Řešení: Mezi vývojem obou platů samozřejmě nějaký rozdíl existuje. Jistě se shodneme na tom, že v obou případech se výše platu zvětšuje. Příslušné funkce popisující vývoj obou platů v čase budou v obou případech *rostoucí* funkce. Z tohoto pohledu se tedy obě funkce neliší. Odlišnost obou případů spočívá ve způsobu, kterým jsou grafy obou funkcí vypuklé.

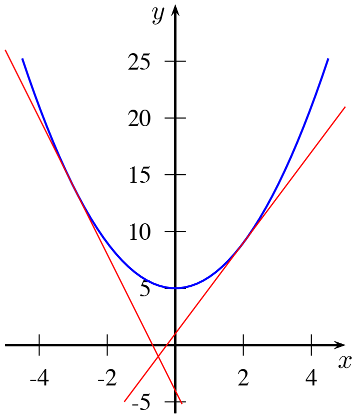
Růst platu na prvním grafu je v prvních letech pozvolný a ke konci období můžeme říci, že roste v porovnání s druhým platem velmi rychle. Plat v druhém grafu naopak roste velmi rychle zpočátku, ale pak se rychlost jeho růstu zpomaluje a ke konci období se tento růst platu skoro zastaví.

Je pro zaměstnance lepší, aby se jeho plat vyvíjel právě jedním z uvedených způsobů, nebo na vypuklosti vývoje platu nezáleží? Připomeňme, že nástupní plat je v obou případech stejný a plat po dvaceti letech je v obou případech také ve stejné výši.

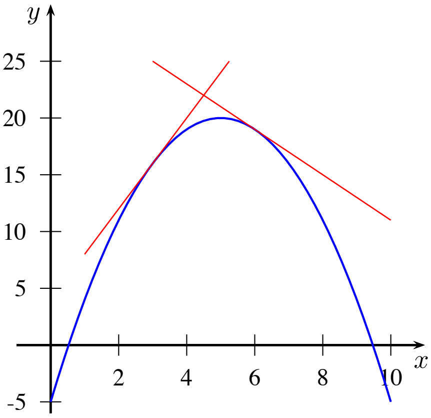
Mohlo by se zdát, že na vypuklosti nezáleží, ale není tomu tak. Jistě vás napadlo, že druhá uvedená možnost je pro zaměstnance výhodnější. Zdůvodnění je prosté, po delší dobu dostává vyšší plat, než by tomu bylo v prvním případě. Během dvaceti let tak dostane celkově více peněz.

Pojem vypuklosti nám tak umožnil podrobnější (detailnější) popis situace, který bychom pouze s pojmem rostoucí, či klesající funkce nemohli provést.

Definicí konvexní, resp. konkávní funkce je celá řada. Všechny však využívají matematický aparát, který v tuto chvíli ještě není popsaný. Korektní definice obou pojmů proto zavedeme až později. Pro rozlišení úseku, ve kterém je funkce konvexní nebo konkávní, si zatím uvedeme pouze jednoduché rozlišovací pravidlo. Pro všechna x, ve kterých je funkce konvexní, leží graf funkce nad tečnou sestrojenou k příslušnému bodu grafu funkce f. Pro všechna x, ve kterých je funkce konkávní, leží graf funkce pod tečnou sestrojenou k příslušnému bodu grafu funkce f.



(a) U konvexní funkce leží tečna sestrojená k libovolnému bodu grafu pod grafem funkce



(b) U konkávní funkce leží tečna sestrojená k libovolnému bodu grafu nad grafem funkce

Obrázek 5.13: Rozlišení funkcí vzhledem k jejich vypuklosti

Prostá funkce

Zjednodušeně řečeno, pojem prosté funkce znamená, že se funkční hodnoty neopakují. Každá funkční hodnota může nastat v rámci celého definičního oboru pouze pro jedno x. V následujících odstavcích tento pojem zpřesníme.

Příklad 5.29

5.29. V Příkladu 5.7 jsme se zabývali rychlostí tělesa při jeho vrhu svisle vzhůru. Analogicky jako v zmiňovaném příkladu bychom mohli nalézt vzorec, který by udával okamžitou (aktuální) výšku h tělesa vzhledem k době t trvání pohybu. Takový vzorec by byl předpisem funkce $h(t)$. Z fyziky je známo, že (při zanedbání vlivu prostředí, zejména odporu vzduchu) tento vzorec má podobu

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{5.9}$$

kde $h(t)$ je výška tělesa v čase t, v_0 je počáteční rychlost tělesa a g je fyzikální konstanta nazývaná tíhové zrychlení. Předpokládejme, že tělesu byla udělena počáteční rychlost $v_0 = 20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a hodnota tíhového zrychlení činí přibližně $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Vypočtěte, za jak dlouho bude vržené těleso ve výšce $h = 15\,\mathrm{m}$.

Řešení: Ze zadání plyne, že máme určit čas t, ve kterém se těleso nachází ve výšce patnáct metrů. Řešíme tedy rovnici

$$\begin{aligned}
h(t) &= 15 && \ldots \textit{výška má být } 15\,\mathrm{m}\\
v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 &= 15 && \ldots \textit{dosazení do vzorce } (5.9)\\
20t - \frac{1}{2}\cdot 10t^2 &= 15 && \ldots \textit{dosazení konkrétních hodnot } v_0 \textit{ a } g\\
-5t^2 + 20t - 15 &= 0. && \ldots \textit{úprava do jednoduššího tvaru}
\end{aligned}$$

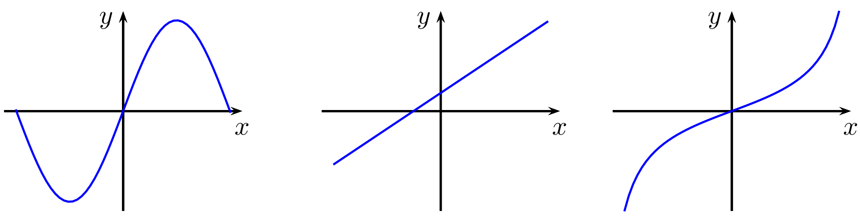
Poslední uvedená rovnice má dvě řešení: $t_1 = 1$ a $t_2 = 3$, což snadno ověříme dosazením nalezených kořenů do rovnice. Těleso se tedy bude nacházet ve výšce 15 metrů po uplynutí jedné sekundy a dále pak po uplynutí tří sekund. Výsledek je očekávatelný, neboť poprvé se tak stane při pohybu tělesa vzhůru, podruhé při jeho návratu k zemi.

Právě uvedená úloha ukazuje případ funkce, která není prostá. Zjistili jsme, že jednu konkrétní funkční hodnotu může mít funkce pro dvě různé hodnoty argumentu. Každá funkce, která má ve svém definičním oboru alespoň jednu dvojici čísel x_1 a x_2, jejichž funkční hodnoty se rovnají (platí tedy $f(x_1) = f(x_2)$), není prostá. Prostou funkci proto musíme definovat tak, že rovnost $f(x_1) = f(x_2)$ může nastat pouze tehdy, když se hodnoty x_1 a x_2 sobě rovnají.

Definice 5.3.12. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *prostá* na množině M, jestliže z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne rovnost $x_1 = x_2$ pro libovolné dvě hodnoty x_1, x_2 z množiny M.

Čtenářům je snad již zřejmé, co jsme měli na mysli při tvrzení, že v prosté funkci se neopakují funkční hodnoty. Pro každou funkční hodnotu totiž platí, že pokud již nastala pro nějaké x, nemůže se opakovat pro jinou hodnotu argumentu. Prostá je tedy taková funkce, ve které libovolným dvěma různým hodnotám argumentu přísluší dvě různé funkční hodnoty.

5.30. Na Obrázku 5.14 jsou uvedeny grafy tří funkcí. Rozmyslete si, proč jsou, resp. proč nejsou, uvedené funkce na zobrazeném úseku prosté. **Příklad 5.30**



(a) Funkce není prostá. (b) Funkce je prostá. (c) Funkce je prostá.

Obrázek 5.14: Rozpoznání prosté funkce podle jejího grafu

K určování, zda je funkce prostá, nám často pomůže následující věta.

Věta 5.3.13. *Funkce f, monotónní na množině M, je na této množině prostá.*

Platnost věty je založena na faktu, že pro rostoucí funkci platí, že s rostoucí hodnotou x se zvyšuje i příslušná funkční hodnota $f(x)$. Proto nemůže dojít k opakování funkční hodnoty pro dvě různé hodnoty x. Analogicky lze toto tvrzení použít i pro klesající funkci.

Globální extrémy funkce

Vraťme se znovu k zadání Příkladu 5.29, ve kterém jsme se zabývali okamžitou (aktuální) výškou tělesa vrženého svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Při řešení příkladu jsme zjistili, že v časech $t_1 = 1$ sekunda a $t_2 = 3$ sekundy bylo těleso ve výšce 15 metrů nad zemí. Představíte-li si tento děj, uvědomíte si, že v čase $t = 2$ sekundy se těleso nacházelo nejvýše a tuto výšku tělesa určíme dosazením do již zmíněného předpisu funkce.

$$
\begin{aligned}
h(t) &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 && \ldots \textit{vzorec pro výpočet výšky v čase } t\\
h(2) &= 20\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2^2 && \ldots \textit{výpočet výšky v čase } t = 2\\
&= 40 - 20\\
&= 20
\end{aligned}
$$

Těleso vystoupá až do výšky dvaceti metrů, pak se výška tělesa začne snižovat. V čase $t = 2$ je tedy hodnota funkce $h(t)$ největší. Řekneme, že funkce $h(t)$ nabývá v bodě

$t = 2$ svého globálního maxima. Tím myslíme, že ve všech ostatních časových okamžicích je příslušná výška tělesa menší, resp. neexistuje časový okamžik, ve které by těleso bylo ve výšce větší než dvacet metrů.

Definice 5.3.14. Řekneme, že funkce f má na množině $M \subseteq D(f)$ *globální maximum* v bodě $u \in M$, jestliže pro všechna $x \in M$ platí nerovnost $f(x) \leq f(u)$. Funkce f nabývá na množině $M \subseteq D(f)$ své *globální minimum* v bodě $v \in M$, jestliže pro všechna $x \in M$ platí nerovnost $f(v) \leq f(x)$.

Jinými slovy, funkce f nabývá globální maximum na množině M v bodě $u \in M$, jestliže v množině M neexistuje x s větší funkční hodnotou. Analogicky, funkce f nabývá v bodě $v \in M$ své globální minimum na množině M, jestliže v množině M neexistuje x s menší funkční hodnotou.

Příklad 5.31

5.31. Zjistěte, zda má funkce $f(x) = x^2$ globální maximum, resp. globální minimum na množině $M = \langle 1, 6\rangle$.

Řešení: Snadno nahlédneme, že funkce f je v uvedeném intervalu rostoucí funkcí, neboť pro kladná x se s rostoucí hodnotou x zvětšuje i hodnota druhé mocniny x. Největší funkční hodnotu dosáhne funkce f pro nejvyšší hodnotu množiny M - touto hodnotou je $x = 6$. Naopak nejmenší hodnotu funkce dosáhne pro nejmenší hodnotu intervalu M, touto hodnotou je $x = 1$. Je $f(1) = 1^2 = 1$ a $f(6) = 6^2 = 36$. Pro všechna $x \in \langle 1, 6\rangle$ platí $1 \leq x^2 \leq 36$. Funkce f má na množině M globální maximum o hodnotě 36 v bodě $x = 6$ a globální minimum o hodnotě 1 v bodě $x = 1$.

Příklad 5.32

5.32. Zjistěte, zda má funkce $f(x) = x^2$ globální maximum, resp. globální minimum na množině $M = (-3, 8)$.

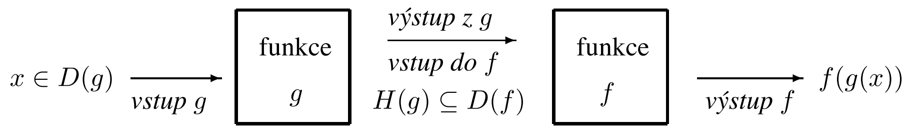
Řešení: V tomto případě je nutné se zamyslet hlouběji než v předchozím příkladu. Snadno ověříme, že funkční hodnota v bodě $x = 7$ je větší, než funkční hodnoty pro jakékoliv $x \in (-3, 0\rangle$. Pokud má tedy funkce f globální maximum, nenastane toto maximum pro $x \in (-3, 0\rangle$. Pokud má funkce f globální maximum, bude toto ležet v intervalu $(0, 8)$. Na tomto intervalu je funkce $f(x) = x^2$ rostoucí, proto nejvyšší funkční hodnotu bude nabývat v největším prvku z intervalu $(0, 8)$. Který prvek to ale je? Interval je otevřený, proto číslo $x = 8$ není prvkem uvažované množiny. Hledáme největší kladné číslo, které je menší než číslo osm. Předpokládejme, že takové číslo existuje a označme jej symbolem m. Nyní vypočteme aritmetický průměr čísla m a čísla osm. Vzhledem k tomu, že je $m < 8$, bude mít průměr obou čísel hodnotu menší než osm, a proto bude patřit do intervalu $(0, 8)$. Bude ovšem větší než číslo m, což je ve sporu s tím, že číslo m mělo být největší číslo s požadovanou vlastností. Ke každému číslu m z množiny $(0, 8)$ lze tedy najít číslo, které patří do této množiny a má přitom větší hodnotu než číslo m. Množina $(0, 8)$ proto nemá prvek s největší hodnotou a ani funkce $f(x) = x^2$ nemá na množině $(-3, 8)$ své globální maximum.

Globální minimum ovšem funkce má a snadno určíme, ve kterém bodě jej funkce nabývá. Víme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je výraz x^2 nezáporný, přičemž hodnotu nula nabývá pouze v bodě $x = 0$. Proto má funkce globální minimum o hodnotě nula v bodě $x = 0$.

5.3.5 Skládání funkcí

Složená funkce $y = f(g(x))$ vznikne pomocí operace, kterou nazýváme skládání funkcí. Skládáním funkcí f a g rozumíme situaci, kdy vypočteme funkční hodnotu funkce g v bodě x (tedy hodnotu $g(x)$) a toto číslo použijeme jako vstupní hodnotu (argument) pro výpočet funkční hodnoty funkce f. Takto vypočtená hodnota bude funkční hodnotou složené funkce $f(g(x))$ v bodě x. Celý postup lze opět symbolicky znázornit pomocí „černých skříněk“, viz Obrázek 5.15.

Následující tři příklady ukáží, jak pracovat se složenou funkcí. Budeme přitom používat pojmy vnitřní a vnější funkce. *Vnitřní funkce* je ta z obou funkcí, do které



Obrázek 5.15: Symbolické znázornění složené funkce pomocí „černých skříněk“.

dosazujeme hodnotu nezávisle proměnné x a jejíž funkční hodnota $g(x)$ se stane argumentem (vstupní hodnotou) *vnější funkce*. Výstupem vnější funkce je pak již hledaná funkční hodnota složené funkce $f(g(x))$.

5.33. Je dána složená funkce $y = f(g(x))$, která je složena z funkcí **Příklad 5.33**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+1} && \ldots \textit{ vnější funkce} \\ g(x) &= x^2 - 2x. && \ldots \textit{ vnitřní funkce} \end{aligned}$$

Vypočtěte funkční hodnotu funkce $y = f(g(x))$ v bodě $x = 5$, tzn. hodnotu $f(g(5))$.

Řešení: Nejprve vypočteme funkční hodnotu vnitřní funkce $g(x)$ v bodě $x = 5$.

$$\begin{aligned} g(5) &= 5^2 - 2 \cdot 5 \\ &= 25 - 10 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Nyní víme, že $g(5) = 15$ a tato hodnota se stane argumentem funkce f. Potom platí

$$\begin{aligned} f(g(5)) &= f(15) \\ &= \sqrt{15+1} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Hodnota funkce $f(g(x))$ v bodě $x = 5$ je rovna 4, tedy $f(g(5)) = 4$.

5.34. Složená funkce $y = f(g(x))$ je složena z funkcí **Příklad 5.34**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1-x} && \ldots \textit{ vnější funkce} \\ g(x) &= 5x - 1. && \ldots \textit{ vnitřní funkce} \end{aligned}$$

Vypočtěte funkční hodnotu funkce $y = f(g(x))$ v bodě $x = 2$, tzn. hodnotu $f(g(2))$.

Řešení: Nejprve vypočteme funkční hodnotu vnitřní funkce $g(x)$ v bodě $x = 2$. Tím dostaneme

$$g(2) = 5 \cdot 2 - 1 = 9.$$

Platí tedy $g(2) = 9$ a tato hodnota se opět stane argumentem funkce f.

$$f(g(x)) = f(9) = \sqrt{1-9} = \sqrt{-8}$$

Hodnotu $f(9)$ však nelze v množině $\mathbb{R}$ vypočítat, číslo $g(2) = 9$ nepatří do definičního oboru funkce f. Proto funkce $f(g(x))$ není v bodě $x = 2$ definována.

Z příkladu by měl být zřejmý požadavek uvedený v Obrázku 5.15, aby obor hodnot vnitřní funkce byl podmnožinou definičního oboru vnější funkce. V bodech, které tomuto požadavku nevyhovují, není příslušná složená funkce definována.

Příklad 5.35

5.35. Jsou dány funkce

$$f(x) = \frac{5}{x}$$
$$g(x) = \sqrt{x}.$$

Určete předpisy složených funkcí $f(g(x))$ a $g(f(x))$.

Řešení: Nejprve nalezneme předpis funkce $f(g(x))$. V tomto předpisu bude f vnější funkcí a g vnitřní funkcí. Funkce g přiřadí každé hodnotě x (ze svého definičního oboru) hodnotu $\sqrt{x}$. Tato hodnota se pak stane argumentem (vstupem) funkce f. Za x v předpisu funkce f tak dosadíme hodnotu $\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} y &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) && \ldots \textit{ neboť } g(x) = \sqrt{x} \\ &= \frac{5}{\sqrt{x}} && \ldots \textit{ argumentem funkce } f \textit{ je výraz } \sqrt{x} \end{aligned}$$

Předpis složené funkce je $y = f(g(x)) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$.

Podobně určíme předpis funkce $g(f(x))$. V tomto případě je funkce f vnitřní funkcí a funkce g vnější funkcí. Vnitřní funkce f přiřadí každé hodnotě x (ze svého definičního oboru) hodnotu výrazu $f(x) = \frac{5}{x}$. Tuto hodnotu pak použijeme jako hodnotu argumentu funkce g.

$$\begin{aligned} y &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{5}{x}\right) && \ldots \textit{ neboť } f(x) = 5/x \\ &= \sqrt{\frac{5}{x}} && \ldots \textit{ funkce } g \textit{ přiřazuje argumentu hodnotu jeho odmocniny} \end{aligned}$$

Předpis složené funkce je $y = g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{5}{x}}$. Jistě si dokážete zdůvodnit, že definičním oborem obou funkcí je množina $D(f(g)) = D(g(f)) = (0, \infty)$.

V mnoha úlohách budeme řešit opačnou úlohu než v Příkladě 5.35. Budeme znát předpis složené funkce $y = f(g(x))$ a budeme si muset uvědomit, jaký je předpis vnitřní funkce g a vnější funkce f, ze kterých je funkce složena. Např. je-li dána funkce $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$, máme poznat, že jde o složenou funkci $y = f(g(x))$ s vnější funkcí $f(x) = \dfrac{5}{x}$ a vnitřní funkcí $g(x) = \sqrt{x}$.

V takovém případě může pomoci, když se zamyslíme, jakým způsobem vypočteme hodnotu dané funkce pro konkrétní hodnotu nezávisle proměnné. V předchozích příkladech jsme hodnotu x vždy nejprve dosazovali do vnitřní funkce, tedy výraz, jehož hodnotu vypočteme při dosazení nejdříve, bude představovat vnitřní funkci, viz následující příklad.

Příklad 5.36

5.36. Je dána funkce $y = (3x + 5)^5$. Zjistěte, ze kterých funkcí a v jakém pořadí (tj. rozlište, která funkce je vnitřní a která vnější) je tato funkce složena.

Řešení: Představte si, že vaším úkolem je určit hodnotu této funkce např. pro $x = -1$. Nejprve byste určili hodnotu výrazu $3x + 5$, tedy $3 \cdot (-1) + 5 = 2$, a z této hodnoty byste poté vypočítali pátou mocninu. Nejdříve pracujete s funkcí $g(x) = 3x + 5$, poté vypočtete pátou mocninu ze zadané hodnoty, tedy pracujete s funkcí $f(x) = x^5$. Vzhledem k tomu, že nejprve jsme dosazovali do funkce $g(x) = 3x + 5$, je $g(x)$ vnitřní funkce a $f(x)$ vnější funkce.

5.3.6 Inverzní funkce

Pojem inverzní funkce přiblížíme jednoduchým příkladem. Předpokládejme, že jsou definovány dvě funkce

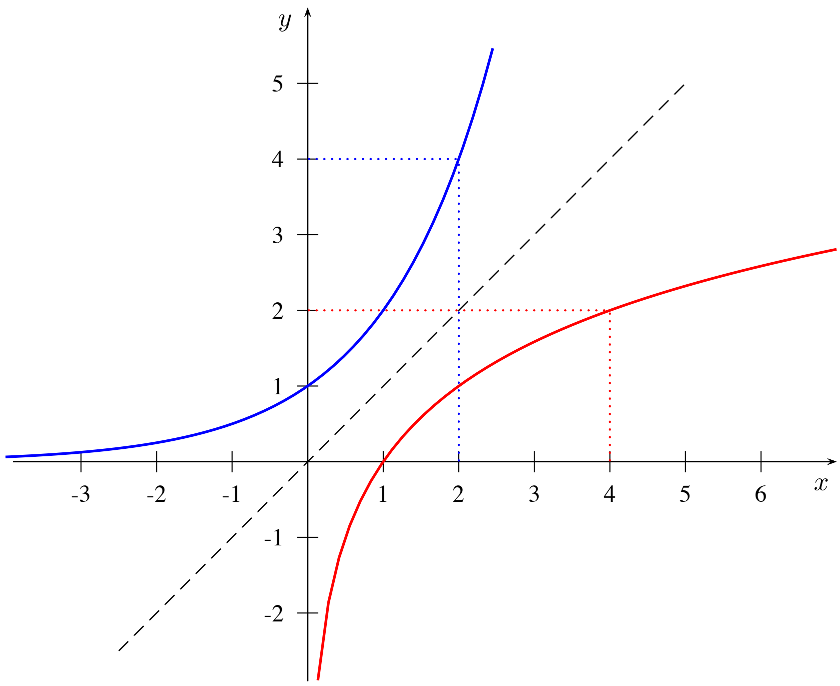
$$f(x) = 2x + 4$$
$$g(x) = \frac{x}{2} - 2.$$

Sestrojíme složenou funkci $y = f(g(x))$. Z předchozí kapitoly již víme, že složená funkce bude mít předpis

$$\begin{aligned} y &= f(g(x)) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right) + 4 \\ &= (x - 4) + 4 \\ &= x. \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledkem je tzv. *identická funkce* $y = x$, tedy funkce, která reálnému číslu x přiřadí totéž reálné číslo x. Stejný výsledek dostaneme i v případě, kdy funkce složíme v opačném pořadí, tj. při vyjadřování funkce $y = g(f(x))$. V takovém případě, kdy funkci f složíme s funkcí g a jejich složením vznikne identická funkce, říkáme, že funkce g je *inverzní funkcí* k funkci f. Je zvykem značit inverzní funkci k funkci f symbolem f^{-1}.

Z uvedeného popisu je zřejmé, že platí-li rovnost $y = f(x)$ (tedy je-li funkční hodnota funkce f v bodě x rovna číslu y), potom musí být splněna rovnost $f^{-1}(y) = x$ (tedy že funkční hodnota inverzní funkce v bodě y je rovna hodnotě x). Z právě popsané vlastnosti obou funkcí ihned vyplývá, že grafy obou funkcí jsou osově souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu souřadných os, viz Obrázek 5.16.



Obrázek 5.16: Grafy dvou navzájem inverzních funkcí

Popsaná vlastnost nám také poskytuje efektivní návod, jak k zadané funkci nalézt funkci k ní inverzní. Je-li zadána funkce f, potom stačí v rovnosti $y = f(x)$ zaměnit proměnné x a y. Vyjádříme-li nyní z tohoto vztahu proměnnou y pomocí nějakého vzorce pro x, bude tento vzorec předpisem inverzní funkce. Ukažme popsaný postup na konkrétním příkladě.

Příklad 5.37

5.37. Nalezněte předpis inverzní funkce f^{-1} k funkci $f(x) = 3x + 4$.

Řešení: V předpisu funkce zaměníme x za y. Tím dostaneme rovnost $x = 3y+4$. Z této rovnosti vyjádříme y a tím dostaneme předpis inverzní funkce.

$$\begin{aligned} x &= 3y + 4 \\ x - 4 &= 3y \\ \frac{x-4}{3} &= y \end{aligned}$$

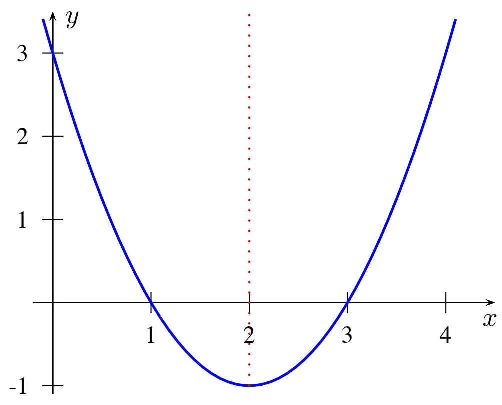
Předpis inverzní funkce zní $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$.

Při práci s inverzními funkcemi je nutné zmínit ještě jednu důležitou poznámku. Má-li funkce f tu vlastnost, že pro nějaké dvě různé hodnoty nezávisle proměnné x_1 a x_2 bude jejich funkční hodnota stejnému číslu y, potom pro inverzní funkci bude platit, že pro hodnotu nezávisle proměnné y bude mít dvě různé funkční hodnoty x_1 a x_2. To je však v přímém rozporu s definicí pojmu funkce, neboť v něm je jasně požadováno, aby každé hodnotě nezávisle proměnné byla přiřazena právě jedna funkční hodnota. Z této „nepříjemnosti“ plyne omezení pro vytváření inverzních funkcí v tom smyslu, že inverzní funkci lze najít pouze k takové funkci, která libovolným dvěma x z definičního oboru přiřadí pokaždé jinou funkční hodnotu, tedy k funkci, která je na sledované množině prostá.

Příklad 5.38

5.38. Určete inverzní funkci k funkci $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Řešení: Funkce f je definována na $\mathbb{R}$, není však na této množině prostá. Nejprve proto zjistíme množiny, na kterých je f prostá funkce. Jak uvidíme v následujících kapitolách, jedná se o kvadratickou funkci s nulovými body $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$. Grafem funkce f je parabola, pro niž platí, že x-ová souřadnice vrcholu leží v polovině mezi nulovými body, viz Obrázek 5.17.



Obrázek 5.17: Graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Funkce f je klesající v intervalu $I_1 = (-\infty, 2)$ a rostoucí v intervalu $I_2 = (2, \infty)$ a je na těchto intervalech prostá. Má tedy smysl hledat inverzní funkce k funkci f na intervalech I_1 a I_2.

Vztah mezi proměnnými inverzní funkce lze popsat rovností $x = y^2 - 4y + 3$. Tu můžeme přepsat na kvadratickou rovnici s neznámou y

$$y^2 - 4y + (3 - x) = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{x+1}$. Jedno řešení představuje inverzní funkci k f na intervalu I_1, druhé řešení představuje inverzní funkci k f na intervalu I_2. Jak ale zjistíme, ke kterému intervalu přiřadit které řešení? To lze udělat několika způsoby.

Funkce $f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ zobrazí množinu $\langle -1, \infty)$ na interval $(-\infty, 2\rangle$. K funkci $f(x) = x^2 - 4x + 3$ je na množině $(-\infty, 2\rangle$ inverzní funkcí funkce

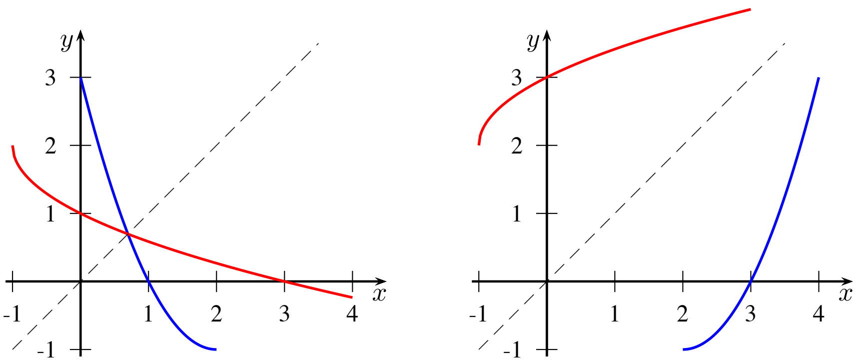
$$f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}.$$

Funkce $f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$ zobrazí množinu $\langle -1, \infty)$ na interval $\langle 2, \infty)$. K funkci $f(x) = x^2 - 4x + 3$ je na množině $\langle 2, \infty)$ inverzní funkcí funkce

$$f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}.$$

Další (rychlejší) možnost je založena na faktu, že složením obou funkcí (tj. funkce a její inverzní funkce) vznikne identická funkce $y = x$, tedy rostoucí funkce. Je zřejmé, že pokud je funkce f rostoucí, bude i její inverzní funkce rostoucí a naopak, je-li funkce f klesající, bude i její inverzní funkce klesající. Protože funkce $f_1^{-1}(x) = 2-\sqrt{x+1}$ je klesající na celém definičním oboru, bude nutně inverzní funkcí k funkci f na intervalu, na kterém je f klesající, tedy na množině I_1. Analogicky to platí pro druhou možnost s tím, že obě funkce jsou v tomto případě rostoucí.

Třetí možnost spočívá v nakreslení grafů uvažovaných funkcí. Stačí si uvědomit, že grafy vzájemně inverzních funkcí jsou osově souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu. Najdeme části grafu, na které jsou funkce monotónní a najdeme jejich „osově souměrné protějšky". To jsou grafy příslušných inverzních funkcí. Pak stačí ke grafu přiřadit správný předpis funkce. Na Obrázku 5.18 je v levé části modře zobrazen



(a) Modře je znázorněna část grafu funkce $f(x)$ na intervalu $(-\infty, 2\rangle$. Graf příslušné inverzní funkce $f^{-1}(x)$ je zobrazen červeně.

(b) Modře je znázorněna část grafu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 2, \infty)$. Graf příslušné inverzní funkce $f^{-1}(x)$ je zobrazen červeně.

Obrázek 5.18: Zobrazení inverzní funkce na intervalech, na kterých je funkce $f(x)$ prostá

graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 3$ na intervalu $x \in (-\infty, 2\rangle$. Červeně je pak zobrazen graf příslušné inverzní funkce $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ na intervalu $x \in \langle -1, \infty)$. V pravé části obrázku je znázorněn graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 3$ na intervalu $x \in \langle 2, \infty)$. Červeně je pak zobrazen graf příslušné inverzní funkce $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$ na intervalu $x \in \langle -1, \infty)$. Povšimněte si, že obě vzájemně inverzní funkce jsou stejné z hlediska monotonie, navíc jsou osově souměrné vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu (vyznačena přerušovanou čarou).

5.4 Posloupnosti reálných čísel

V této kapitole si připomeneme pojem posloupnosti reálných čísel. Začneme jednoduchou úlohou.

5.39. Pěstitel ovoce zasadil novou jabloň. První čtyři roky jabloň neplodila žádné ovoce, v pátém roce na jabloni vyrostlo celkem 5 kg jablek. V průběhu dalších dvaceti let plodila jabloň v každém následujícím roce vždy o 10 % jablek více než v předchozím roce. **Příklad 5.39**

Zapište do tabulky, kolik kilogramů jablek na stromě každý rok vyrostlo v průběhu prvních deseti let.

Řešení: Ze zadání snadno zjistíme, jaké údaje je třeba doplnit do tabulky. V prvních čtyřech letech je velikost úrody rovna 0 kg. V pátém roce má úroda velikost 5 kg. V každém následujícím roce je úroda vyšší o 10 % oproti předchozímu roku, tvoří tedy 1, 1-násobek stavu v předchozím roce.

čas [v letech]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
úroda [kg]	0	0	0	0	5	5,5	6,05	6,655	7,3205	8,05255

Uvedená tabulka vyjadřuje množství úrody v jednotlivých letech. Povšimněte si, že ze zadání plyne, že stáří stromu je dáno jednotlivými obdobími - z podstaty věci budeme počet sezón vyjadřovat pomocí přirozených čísel. Naproti tomu číslo vyjadřující velikost úrody je reálné číslo. Jednotlivým obdobím (přirozeným číslům) přiřazujeme velikost úrody (reálné číslo).

V Kapitole 5.3 na straně 216 jsme zavedli pojem funkce jedné reálné proměnné. Funkci f na množině $D(f)$ jsme definovali jako předpis, kterým je každému prvku množiny $D(f)$ přiřazeno právě jedno reálné číslo. Množinu $D(f)$ jsme nazvali definiční obor funkce f. V této kapitole si připomeneme speciální typ funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel. Takovou funkci nazýváme posloupnost reálných čísel.

Definice 5.4.1. Funkci, jejímž definičním oborem je množina $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, tj. množina všech přirozených čísel nebo její podmnožina $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$, nazýváme *posloupnost reálných čísel*.
Posloupnost, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$, se nazývá nekonečná posloupnost reálných čísel; posloupnost, jejímž definičním oborem je množina $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$, nazýváme konečná posloupnost reálných čísel.

Protože definičním oborem každé posloupnosti je množina přirozených čísel, je zvykem označovat argument funkce symbolem n (namísto symbolu x). Funkční hodnotu je zvykem označovat symbolem a_n, resp. b_n atd. Posloupnost tak můžeme vnímat jako zobrazení, které každému přirozenému číslu n přiřazuje právě jedno reálné číslo a_n, což symbolicky zapisujeme

$$p : n \to a_n, \quad n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Výraz a_n pak nazýváme n-tý člen posloupnosti, konkrétně a_1 je první člen posloupnosti, a_2 je druhý člen posloupnosti atd.

K zápisu posloupností se používají různá označení. V této knize budeme k označení nekonečné posloupnosti používat symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Bude-li z textu zřejmé, že pracujeme s posloupností, budeme někdy používat pouze zkrácený zápis $\{a_n\}$. K zápisu konečných posloupností budeme používat symbol $\{a_n\}_{n=1}^{k}$. V následujícím textu budeme pod pojmem posloupnost rozumět pojem nekonečná posloupnost reálných čísel. Pokud budeme pracovat s konečnou posloupností, výslovně to zmíníme.

Posloupnost je zpravidla zadána jedním ze dvou následujících způsobů

a) funkčním vzorcem, který pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ vyjadřuje hodnotu n-tého členu,

b) stanovením hodnoty prvního, resp. několika prvních členů a uvedením rekuretního vzorce, který vyjadřuje hodnotu následujících členů pomocí členů předchozích.

Příklad 5.40

5.40. Napište prvních deset členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Řešení: Jedná se o posloupnost zadanou pomocí funkčního vzorce. Jednotlivé členy vypočteme dosazením do vzorce.

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$
$$a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$
$$\vdots$$
$$a_{10} = \frac{10+1}{10} = \frac{11}{10}$$

Poznamenejme, že zadání posloupnosti se často zjednodušuje do zápisu

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

který má stejný význam jako zápis v zadání Příkladu 5.40.

5.41. Napište prvních pět členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je $a_1 = 6$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rekurentní vzorec $a_{n+1} = a_n + 2$. **Příklad 5.41**

Řešení: V tomto příkladu se jedná o posloupnost zadanou pomocí rekurentního vzorce. Každý člen posloupnosti (od $n \geq 2$) je o číslo dva větší než jeho předcházející člen. Známe-li hodnotu prvního členu (a tu známe, neboť je zadáno $a_1 = 6$), můžeme postupně vyjádřit všechny další požadované členy posloupnosti.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 6\\
a_2 &= a_1 + 2 = 6 + 2 = 8\\
a_3 &= a_2 + 2 = 8 + 2 = 10\\
a_4 &= a_3 + 2 = 10 + 2 = 12\\
a_5 &= a_4 + 2 = 12 + 2 = 14
\end{aligned}$$

Při výpočtu prvních členů posloupnosti, která je zadána pomocí rekurentního vzorce, jste jistě zaznamenali, že libovolný člen posloupnosti můžeme určit pouze tehdy, známe-li hodnoty předchozích členů. To je v porovnání s posloupností zadanou funkčním vzorcem jistá nevýhoda. Proto se v některých případech, kdy je posloupnost zadána rekurentním vzorcem, snažíme nalézt její vyjádření pomocí funkčního vzorce.

5.42. Nalezněte funkční vzorec posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je $a_1 = 3$ a dále platí $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$. **Příklad 5.42**

Řešení: Ze zadání snadno odvodíme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

Je tedy

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2. \tag{5.11}$$

Dále snadno ověříme „teleskopickou“ vlastnost následujících součinů

$$a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} = a_2$$
$$a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} = a_3$$
$$a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} = a_4$$
$$\vdots$$
$$a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_n. \tag{5.12}$$

Dosazením rovností (5.11) do vztahu (5.12) dostaneme $a_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 = a_n$. Víme, že $a_1 = 3$ a číslo dva je mezi sebou vynásobeno celkem $(n-1)$-krát, o čemž se snadno předvědčíme pohledem na indexy výrazů v jmenovatelích zlomků v (5.12). Tím dostáváme funkční vzorec pro zadanou posloupnost ve tvaru $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Při posuzování průběhu jednotlivých členů posloupnosti nám pomáhá grafické zobrazení pomocí grafu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

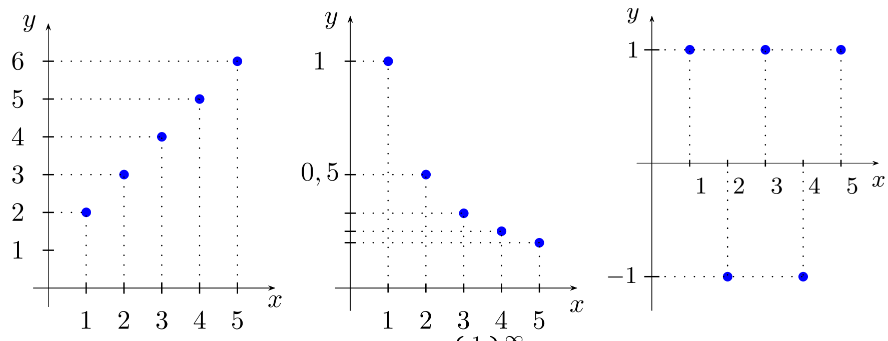
Definice 5.4.2. Grafem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je množina vzájemně izolovaných bodů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, kde bod A_n má souřadnice $[n, a_n]$, pro $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.43

5.43. Zakreslete grafy zadaných posloupností pro $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$.

a) $\{1+n\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Řešení: Pro uvedené posloupnosti vypočteme hodnoty příslušných členů posloupnosti. Pak je možné nakreslit jejich grafy. Řešení je uvedeno v následujících obrázcích. Členy posloupnosti jsou uvedeny modře, vytečkované linky naznačují příslušné hodnoty na osách.



(a) graf $\{1+n\}_{n=1}^{\infty}$ (b) graf $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (c) graf $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Obrázek 5.19: Grafy posloupností z Příkladu 5.43

5.4.1 Aritmetická posloupnost

V následujících dvou kapitolách se budeme zabývat speciálními typy posloupností. Následující příklad nám přiblíží pojem aritmetické posloupnosti.

Příklad 5.44

5.44. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadána pomocí rekurentního vzorce

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad \text{kde } a_1 = 3.$$

Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána funkčním vzorcem $b_n = 10 - 3n$. Vypočtěte prvních šest členů obou těchto posloupností.

Řešení: Členy těchto posloupností jsou postupně čísla

$$\{a_n\}: \ 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$$
$$\{b_n\}: \ 7, 4, 1, -2, -5, -8, \ldots$$

Všimněte si, že s výjimkou prvního členu dostaneme každý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že k předchozímu členu přičteme číslo dva. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má analogickou vlastnost. Každý její člen (opět kromě prvního členu) vypočteme tak, že k předchozímu členu přičteme jisté číslo. V případě posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ se jedná o číslo (-3).

Definice 5.4.3. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *aritmetická posloupnost*, jestliže existuje číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny členy posloupnosti platí rovnost

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{5.13}$$

Číslo $d \in \mathbb{R}$ nazýváme *diferencí* aritmetické posloupnosti.

V Příkladu 5.44 jsou obě posloupnosti aritmetické. Diference posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna $d = 2$, diference posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna $d = -3$. To, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, je zřejmé z jejího zadání. V následujícím příkladu ověříme, že i posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.

Příklad 5.45

5.45. Ověřme, že posloupnost $\{10 - 3n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.

Řešení: Máme-li ukázat, že zadaná posloupnost je aritmetická, musíme ukázat, že existuje takové $d \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je splněna rovnost $a_{n+1} = a_n + d$. Nejdříve vyjádříme člen a_{n+1}.

$$\begin{aligned} a_n &= 10 - 3n && \textit{. . . plyne ze zadání posloupnosti} \\ a_{n+1} &= 10 - 3(n+1) && \textit{. . . vyjádření } (n+1)\textit{-ního členu} \\ &= 10 - 3n - 3 \\ &= 7 - 3n \end{aligned}$$

Nyní vypočteme rozdíl obou členů posloupnosti.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \big[7 - 3n\big] - \big[10 - 3n\big] \\ &= 7 - 3n - 10 + 3n \\ &= -3 \\ a_{n+1} &= a_n - 3 \\ a_{n+1} &= a_n + (-3) \end{aligned}$$

Uvedené výpočty jsme provedli pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, rovnost $a_{n+1} = a_n + (-3)$ tedy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tím jsme dokázali, že zadaná posloupnost je aritmetická s diferencí $d = -3$.

Analogicky odvodíme, že každou aritmetickou posloupnost můžeme kromě rekurentního vzorce $a_{n+1} = a_n + d$ vyjádřit také ve tvaru $\{an + b\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a_1 = a + b$, $d = a$.

$$\begin{aligned} a_n &= an + b && \textit{. . . vyjádření } n\textit{-tého členu} \\ a_{n+1} &= a(n+1) + b && \textit{. . . vyjádření } (n+1)\textit{-ního členu} \\ d &= a_{n+1} - a_n && \textit{. . . vyjádření diference } d \\ &= \big[a(n+1) + b\big] - \big[an + b\big] \\ &= an + a + b - an - b \\ &= a \\ a_1 &= a \cdot 1 + b && \textit{. . . vyjádření prvního členu} \\ &= a + b \end{aligned}$$

Nyní již víme, jak lze z vyjádření posloupnosti pomocí funkčního vzorce snadno nalézt první člen a diferenci posloupnosti. Ukážeme si také, jak vyřešit opačnou situaci, tedy najít funkční předpis aritmetické posloupnosti, známe-li hodnotu prvního členu a diferenci. Z rekurentního vzorce (5.13) v Definici 5.4.3 plynou následující rovnosti.

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d\\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d\\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d\\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)d) + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}$$

Pro aritmetickou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem a_1 a s diferencí d platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{5.14}$$

Příklad 5.46

5.46. Nalezněte funkční předpis pro aritmetickou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_1 = 5$ a $d = 4$.

Řešení: Dosazením do vzorce (5.14) dostaneme

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)d,\\
&= 5 + (n-1)\cdot 4,\\
&= 4n + 1.
\end{aligned}$$

Aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 5$ a diferencí $d = 4$ lze zapsat ve tvaru $\{4n+1\}_{n=1}^{\infty}$.

V některých aritmetických posloupnostech se setkáme s tím, že není zadán první člen, ale třeba šestý nebo osmý, obecně r-tý člen. Jak potom vypadá vzorec pro s-tý člen posloupnosti, známe-li ještě diferenci d? Při odvození vyjdeme ze vzorce (5.14).

$$\begin{aligned}
a_r &= a_1 + (r-1)d\\
a_s &= a_1 + (s-1)d\\
a_s - a_r &= \big[a_1 + (s-1)d\big] - \big[a_1 + (r-1)d\big]\\
&= a_1 + sd - d - a_1 - rd + d\\
&= sd - rd\\
&= (s-r)d
\end{aligned}$$

Pro všechna $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ je tedy $a_s - a_r = (s-r)\cdot d$, neboli

$$a_s = a_r + (s-r)\cdot d. \tag{5.15}$$

Pozorný čtenář si jistě povšiml, že vzorec (5.14) je speciálním případem vzorce (5.15), kde $s = n$ a $r = 1$.

Mezi základní vlastnosti aritmetické posloupnosti patří, že její po sobě jdoucí členy se liší o stále stejnou hodnotu - diferenci d. Rozdíl dvou sousedních členů posloupnosti a_{n+1} a a_n je tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ roven diferenci d.

Příklad 5.47

5.47. Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou aritmetické.

a) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{100\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\left\{\dfrac{n^2+7n+10}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Řešení:

a) Vyjádříme několik prvních členů posloupnosti $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

Potom je

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\\
a_3 - a_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\\
a_2 - a_1 &\neq a_3 - a_2.
\end{aligned}$$

V zadané posloupnosti nejsou rozdíly po sobě jdoucích členů stále stejné, posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ není aritmetická.

b) Posloupnost daná předpisem $\{100\}_{n=1}^{\infty}$ má všechny členy rovny číslu sto: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 100$. Rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je roven nule. Jedná se proto o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 0$.

c) Opět nalezneme několik prvních členů posloupnosti $\left\{\frac{n^2+7n+10}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1^2+7\cdot 1+10}{1+2} = \frac{18}{3} = 6\\
a_2 &= \frac{2^2+7\cdot 2+10}{2+2} = \frac{28}{4} = 7\\
a_3 &= \frac{3^2+7\cdot 3+10}{3+2} = \frac{40}{5} = 8\\
a_4 &= \frac{4^2+7\cdot 4+10}{4+2} = \frac{54}{6} = 9\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vidíme, že u prvních čtyř členů posloupnosti je každý následující člen o jednotku větší než předchozí člen. To nás svádí k závěru, že posloupnost je aritmetická. Musíme však dokázat, že uvedená vlastnost je splněna nejen pro první čtyři členy, ale pro všechny členy posloupnosti. To lze provést několika způsoby. Např. je možné vyjádřit rozdíl členů a_{n+1} a a_n a ukázat, že tento je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ roven hodnotě $d = 1$. Lze také použít následující postup.

$$\frac{n^2+7n+10}{n+2} = \frac{(n+2)(n+5)}{n+2} = n+5.$$

Poslední rovnost platí za předpokladu $n \neq -2$, což ovšem všechna $n \in \mathbb{N}$ splňují. Víme již, že každá posloupnost $\{an+b\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, kde $d = a$ a $a_1 = a+b$. Proto i posloupnost $\{n+5\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická s diferencí $d = 1$ a $a_1 = 6$.

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

V této kapitole odvodíme vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti. Nejprve se budeme zabývat jednodušší verzí této úlohy.

Příklad 5.48

5.48. Je dána posloupnost $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. Nalezněte vzorec pro výpočet součtu prvních n členů této posloupnosti, tj. nalezněte vzorec pro součet prvních n přirozených čísel.

Řešení: Označme součet prvních n členů posloupnosti symbolem s_n. Je tedy

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1+2\\
s_3 &= 1+2+3\\
&\vdots\\
s_n &= 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n. \qquad \ldots \textit{pro } n > 6 \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Součet pro s_n je možné zapsat i v opačném pořadí sčítanců.

$$s_n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1. \qquad (5.17)$$

Sečtením levých, resp. pravých stran výrazů (5.16) a (5.17) a následnými úpravami dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} s_n + s_n &= [1+n] + [2+(n-1)] + \ldots + [(n-1)+2] + [n+1] \\ 2s_n &= [n+1] + [n+1] + \ldots + [n+1] + [n+1] \\ 2s_n &= n \cdot (n+1) \\ s_n &= \frac{n}{2} \cdot (n+1). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Vzorec, podle kterého je možné vypočítat součet prvních n přirozených čísel, má tvar $s_n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$.

Vypočtený vzorec ověříme na několika příkladech.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1 \\ 1+2 &= \frac{2}{2} \cdot (2+1) = 3 \\ 1+2+3 &= \frac{3}{2} \cdot (3+1) = 6 \\ 1+2+3+4 &= \frac{4}{2} \cdot (4+1) = 10 \\ &\vdots \\ 1+2+3+\ldots+98+99+100 &= \frac{100}{2} \cdot (100+1) = 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Podle často zmiňované poznámky vypočítal úlohu (5.19) ve svých devíti letech KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 - 1855). Použil přitom postup, kterým jsme odvodili vzorec (5.18).

Příklad 5.49

5.49. Nalezněte vzorec pro výpočet součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti.

Řešení: Označme součet prvních n členů aritmetické posloupnosti symbolem s_n. Potom je

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ s_n &= a_1 + \big[a_1 + d\big] + \ldots + \big[a_1 + (n-2)d\big] + \big[a_1 + (n-1)d\big] \\ s_n &= \big[a_1 + (n-1)d\big] + \big[a_1 + (n-2)d\big] + \ldots + \big[a_1 + d\big] + a_1 \\ 2s_n &= \big[a_1 + a_1 + (n-1)d\big] + \big[a_1 + d + a_1 + (n-2)d\big] + \ldots \\ &\quad \ldots + \big[a_1 + (n-2)d + a_1 + d\big] + \big[a_1 + (n-1)d + a_1\big] \\ 2s_n &= [a_1 + a_n] + [a_1 + a_n] + \ldots + [a_1 + a_n] + [a_1 + a_n] \qquad (5.20) \\ 2s_n &= n \cdot (a_1 + a_n) \\ s_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \qquad (5.21) \end{aligned}$$

Výraz $[a_1 + a_n]$ se na pravé straně rovnosti (5.20) vyskytuje právě n-krát, z toho potom po úpravě plyne hledaná rovnost (5.21).

Shrneme zjištěné výsledky.

Pro aritmetickou posloupnost platí

a) n-tý člen aritmetické posloupnosti je dán vztahem

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{5.22}$$

b) Pro libovolné dva členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti platí vztah

$$a_s = a_r + (s-r)d. \tag{5.23}$$

c) Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí vztah

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n). \tag{5.24}$$

5.50. Firma *Skyfly* si vzala úvěr na nákup materiálu. S bankou si domluvila splátkový kalendář, podle kterého v první splátce zaplatí 5 000 Kč a v každé další splátce zaplatí o 100 Kč více než v předchozí splátce. Celkově bude firma *Skyfly* platit 36 splátek. Kolik peněz celkově firma při splácení zaplatí? **Příklad 5.50**

Řešení: Podle zadání platí

$$\begin{aligned} \text{první splátka} &= 5\,000 \text{ Kč} \\ \text{druhá splátka} &= 5\,100 \text{ Kč} \\ \text{třetí splátka} &= 5\,200 \text{ Kč} \\ \text{čtvrtá splátka} &= 5\,300 \text{ Kč atd.} \end{aligned}$$

Jednotlivé splátky tak můžeme považovat za členy konečné aritmetické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 5\,000$ a diferencí $d = 100$. Celkově firma *Skyfly* zaplatí sumu s_{36}, která odpovídá součtu všech členů této posloupnosti od a_1 do a_{36}.

$$\begin{aligned} s_{36} &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{36} \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + 35d) && \ldots \textit{ viz vzorec } (5.22) \\ &= 5\,000 + 5\,100 + 5\,200 + \ldots + 8500 && \ldots \textit{ dosazení hodnot} \\ &= \frac{36}{2} \cdot (5\,000 + 8\,500) && \ldots \textit{ viz vzorec } (5.24) \\ &= 18 \cdot 13\,500 \\ &= 243\,000 \end{aligned}$$

Firma *Skyfly* zaplatí ve všech splátkách dohromady 243 000 Kč.

Problém 5.50.1. Jak se změní celkově zaplacená částka, jestliže se splátky v situaci z předchozí úlohy budou pokaždé zvyšovat o 150 Kč?

5.4.2 Geometrická posloupnost

S geometrickou posloupností se často setkáváme např. v úlohách finanční matematiky, růstu populace atd.

5.51. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadána pomocí rekurentního vzorce **Příklad 5.51**

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n, \quad \text{kde } a_1 = 1.$$

Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána funkčním vzorcem $b_n = 512 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$. Vypočtěte prvních šest členů obou těchto posloupností.

Řešení: Členy zadaných posloupností jsou postupně čísla

$$\{a_n\}:\ 1,\, 2,\, 4,\, 8,\, 16,\, 32, \dots$$
$$\{b_n\}:\ 512,\, -256,\, 128,\, -64,\, 32,\, -16, \dots$$

Všimněte si, že s výjimkou prvního členu dostaneme každý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že předchozí člen vynásobíme číslem dva. Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má analogickou vlastnost. Každý její člen (opět kromě prvního členu) získáme vynásobením předchozího členu číslem $-\frac{1}{2}$.

Definice 5.4.4. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *geometrická posloupnost*, jestliže existuje číslo $q \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny členy posloupnosti platí rovnost

$$a_{n+1} = a_n \cdot q. \tag{5.25}$$

Číslo $q \in \mathbb{R}$ nazýváme *kvocientem* geometrické posloupnosti.

Níže jsou uvedeny příklady některých geometrických posloupností, resp. několika prvních členů geometrických posloupností

$\{a_n\}: 1,\, 3,\, 9,\, 27,\, 81,\, 243,\, \dots$	$a_1 = 1, q = 3$
$\{b_n\}: 9,\, 27,\, 81,\, 243,\, 729,\, 2\,187,\, \dots$	$a_1 = 9, q = 3$
$\{c_n\}: 3,\, 3,\, 3,\, 3,\, 3,\, 3,\, \dots$	$a_1 = 3, q = 1$
$\{d_n\}: 2,\, -2,\, 2,\, -2,\, 2,\, -2,\, \dots$	$a_1 = 2, q = -1$
$\{e_n\}: 1,\, \dfrac{1}{2},\, \dfrac{1}{4},\, \dfrac{1}{8},\, \dfrac{1}{16},\, \dfrac{1}{32},\, \dots$	$a_1 = 1, q = \dfrac{1}{2}$
$\{f_n\}: 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots$	$a_1 = 1, q = 0$
$\{g_n\}: 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots$	$a_1 = 0, q \in \mathbb{R}$

Posloupnosti $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ ukazují, že je rozumné nezabývat se těmi geometrickými posloupnostmi, ve kterých je $a_1 = 0$ nebo $q = 0$.

Z Definice 5.4.4 plyne, že posloupnost je geometrická, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ roven konstantě nezávislé na n. Z definice také plyne, že touto konstantou je právě kvocient posloupnosti. Toto pozorování nám umožňuje snadno rozhodnout, zda je zadaná posloupnost geometrická, či nikoliv.

Příklad 5.52

5.52. Zjistěme, zda jsou posloupnosti $\{2^{n+3}\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\left\{\dfrac{2}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ geometrické.

Řešení: V posloupnosti $\{2^{n+3}\}_{n=1}^{\infty}$ platí pro $(n+1)$-ní člen rovnosti

$$a_{n+1} = 2^{(n+1)+3} = 2^{n+4}.$$

Potom je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = \frac{2^n \cdot 2^4}{2^n \cdot 2^3} = 2.$$

Posloupnost je tedy geometrická s kvocientem $q = 2$.

V posloupnosti $\left\{\dfrac{2}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ lze $(n+1)$-ní člen vyjádřit ve tvaru

$$b_{n+1} = \frac{2}{(n+1)+3} = \frac{2}{n+4}.$$

Pro podíl dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti potom platí vztah

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{2}{n+4}}{\frac{2}{n+3}} = \frac{n+3}{n+4}.$$

Uvedený podíl tak závisí na hodnotě n, neboť s různou hodnotou n dostaneme různou hodnotu podílu $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Posloupnost proto není geometrická.

V následující úloze nalezneme obecné vyjádření n-tého členu zadané geometrické posloupnosti.

5.53. Nalezněte funkční vzorec pro vyjádření n-tého členu geometrické posloupnosti, kde $a_1 = 2$ a $q = 3$. **Příklad 5.53**

Řešení: Nejprve vyjádříme několik prvních členů posloupnosti.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 && = 2 \cdot 3^0\\
a_2 &= a_1 \cdot q = 2 \cdot 3 && = 2 \cdot 3^1\\
a_3 &= a_2 \cdot q = 2 \cdot 3 \cdot 3 && = 2 \cdot 3^2\\
a_4 &= a_3 \cdot q = 2 \cdot 3^2 \cdot 3 && = 2 \cdot 3^3\\
a_5 &= a_4 \cdot q = 2 \cdot 3^3 \cdot 3 && = 2 \cdot 3^4 \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Z uvedených členů lze nahlédnout, že vzorec pro n-tý člen posloupnosti má tvar

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}. \tag{5.26}$$

Ověříme, že tak tomu skutečně je. Ze vzorce (5.26) plyne vztah $a_{n+1} = 2 \cdot 3^n$. Potom je $a_{n+1} = 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 3 = a_n \cdot 3$. Při úpravě jsme využili odvozený vztah (5.26). Uvedené rovnosti platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, vzorec (5.26) je v souladu s rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n \cdot 3$, představuje tedy funkční vzorec pro vyjádření n-tého členu zadané geometrické posloupnosti.

Z Příkladu 5.53 lze nahlédnout, že n-tý člen obecně zadané geometrické posloupnosti s prvním členem a_1 a kvocientem q lze vyjádřit pomocí funkčního vzorce

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{5.27}$$

Ověříme tuto hypotézu. Ze zadaného předpokladu plynou rovnosti

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_n \cdot q.$$

Ukázali jsme, že je-li n-tý člen posloupnosti zadán výrazem (5.27), potom také vyhovuje rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = a_n \cdot q$ a představuje tak funkční předpis geometrické posloupnosti.

5.54. Vypočtěme patnáctý člen geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 5\,000$ a kvocientem $q = 1,02$. **Příklad 5.54**

Řešení: Požadovaný člen vypočteme dosazením zadaných hodnot do vzorce (5.27).

$$\begin{aligned}
a_{15} &= a_1 \cdot q^{15-1}\\
&= 5\,000 \cdot 1,02^{14}\\
&\doteq 5\,000 \cdot 1,319479\\
&\doteq 6\,597,394
\end{aligned}$$

Patnáctý člen posloupnosti má hodnotu $a_{15} = 6\,597,394$.

Stejně jako v případě aritmetické posloupnosti se budeme snažit najít vztah mezi s-tým a r-tým členem geometrické posloupnosti. Je $a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$, resp. $a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$. Potom je

$$\frac{a_s}{a_r} = \frac{a_1 \cdot q^{s-1}}{a_1 \cdot q^{r-1}} = q^{s-r}, \qquad \text{platí tedy vzorec} \quad a_s = a_r \cdot q^{s-r}.$$

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti

V následujícím odstavci si odvodíme vzorec pro součet prvních n členů této posloupnosti. Symbol s_n opět použijeme k označení součtu prvních n členů geometrické posloupnosti.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \\ s_n \cdot q &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \\ s_n - s_n \cdot q &= \left(a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}\right) - \\ &\quad - \left(a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n\right) \\ s_n(1-q) &= a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n) \end{aligned}$$

Za předpokladu, že $q \neq 1$, lze obě strany poslední rovnosti vydělit výrazem $(1-q)$. Tím dostaneme rovnost $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. Je-li $q = 1$, potom platí rovnosti $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Pro součet s_n pak dostaneme vztah $s_n = n \cdot a_n$.

Pro geometrickou posloupnost s prvním členem a_1 a kvocientem q platí

a) n-tý člen geometrické posloupnosti je dán vztahem

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{5.28}$$

b) Pro libovolné dva členy a_r, a_s geometrické posloupnosti platí vztah

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}. \tag{5.29}$$

c) Pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí vztah

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \ldots\ q \neq 1 \tag{5.30}$$

$$s_n = n \cdot a_{1.} \qquad \ldots\ q = 1 \tag{5.31}$$

Příklad 5.55

5.55. Pan Křeček si začátkem roku uložil jednorázově na spořicí účet částku ve výši $P = 25\,000$ Kč. Spořicí účet je úročen úrokovou sazbou $i = 2$ % p.a., přičemž úrok je připsán vždy na konci příslušného kalendářního roku. Jakou částku bude mít pan Křeček na svém účtu po uplynutí dvaceti let? Jiné okolnosti (daně, změnu úrokové míry atd.) neberte v úvahu.

Řešení: Označme částku na účtu na konci n-tého roku spoření symbolem a_n. Na začátku prvního roku pan Křeček uložil částku $P = 25\,000$ Kč, na konci prvního roku je k této částce připočten úrok ve výši $u = P \cdot \frac{i}{100} = 25\,000 \cdot 0,02 = 500$ Kč. Na konci prvního roku je na účtu částka

$$a_1 = P + P \cdot \frac{i}{100} = P \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) = 25\,000 \cdot (1 + 0,02) = 25\,500\ \text{Kč}.$$

Z výpočtu je zřejmé, že přičtením úroku ve výši i % z částky P k této částce dostaneme obnos, jehož výši lze vypočítat vztahem $P \cdot \left(1 + \frac{i}{10}\right)$. V druhém roce spoření se k částce a_1 přičte úrok ve výši 2 % z této částky, je tedy

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) = P\left(1 + \frac{i}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2 \\ &= 25\,000 \cdot (1 + 0,02)^2 = 26\,010\ \text{Kč}. \end{aligned}$$

Analogicky dostaneme

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^3 = 25\,000 \cdot 1,02^3 \doteq 26\,530\,\text{Kč} \\
a_4 &= a_3 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^4 = 25\,000 \cdot 1,02^4 \doteq 27\,061\,\text{Kč} \\
a_5 &= a_4 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^5 = 25\,000 \cdot 1,02^5 \doteq 27\,602\,\text{Kč} \\
&\vdots \\
a_{20} &= P \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^{20} = 25\,000 \cdot 1,02^{20} \doteq 37\,149\,\text{Kč}.
\end{aligned}$$

Z použitého způsobu výpočtu zjistíme, že na konci n-tého roku bude na účtu pana Křečka částka

$$a_n = P \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n, \tag{5.32}$$

kde P je původně uložená částka, i je úroková míra (v procentech) a n je doba trvání vkladu (v letech).

Problém 5.55.1. Jaká částka bude na účtu pana Křečka zmíněného v Příkladu 5.55 po dvaceti letech trvání vkladu, jestliže je účet úročen úrokovou mírou ve výši $i = 3\ \%$?

Příklad 5.56

5.56. Panu Křečkovi se spoření zalíbilo natolik, že začal spořit pravidelně. Na konci každého roku ukládá na spořicí účet částku 25 000 Kč. Tento spořicí účet je v polovině kalendářního roku úročen úrokovou sazbou $i = 2\ \%$ *p.a.* Jakou částku bude mít pan Křeček na svém účtu po uplynutí dvaceti let? Jiné okolnosti (daně, změnu úrokové míry atd.) neberte v úvahu.

Řešení: Označme částku na účtu na konci n-tého roku spoření symbolem s_n. Na konci prvního roku bude na účtu pouze částka $P = 25\,000$ (dle zadání nejsou v prvním roce spoření přičteny úroky). Je tedy

$$s_1 = 25\,000\,\text{Kč}.$$

V polovině druhého roku spoření bude k částce z minulého roku přičten úrok a navíc na konci roku pan Křeček přidá další vklad. Potom je

$$s_2 = 25\,000 + 25\,000 \cdot 1,02.$$

V polovině třetího roku bude částka z druhého roku zúročena dvěma procenty a navíc na konci roku pan Křeček přidá další vklad.

$$\begin{aligned}
s_3 &= 25\,000 + (25\,000 + 25\,000 \cdot 1,02) \cdot 1,02 \\
&= 25\,000 + 25\,000 \cdot 1,02 + 25\,000 \cdot 1,02^2
\end{aligned}$$

Dále bychom mohli pokračovat podobným způsobem. V polovině roku vždy přidáme úroky z předchozího období tím, že aktuální částku na účtu vynásobíme koeficientem 1,02 a na konci roku přidáme nový vklad ve výši 25 000 Kč. V n-tém roce spoření bude potom na účtu částka

$$s_n = 25\,000 + 25\,000 \cdot 1,02 + 25\,000 \cdot 1,02^2 + \ldots + 25\,000 \cdot 1,02^{n-1}. \tag{5.33}$$

Nyní vidíme, že jednotlivé sčítance v rovnosti (5.33) tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 25\,000$ a kvocientem $q = 1,02$. K součtu těchto sčítanců můžeme použít vzorec (5.24). S jeho využitím potom vypočteme uspořenou částku po dvaceti letech následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\ s_{20} &= 25\,000 \cdot \frac{1-1{,}02^{20}}{1-1{,}02} \\ &\doteq 607\,434\,\text{Kč} \end{aligned}$$

Po dvaceti letech bude mít pan Křeček na účtu uspořeno přibližně 607 434 Kč.

Příklad 5.56 nabízí jisté zobecnění v následujícím smyslu. Ukládáme-li během jednoho úrokovacího období částku P na účet s úrokovou mírou i (vyjádřenou v procentech), potom uspořená částka po n úrokovací obdobích má hodnotu

$$s_n = P \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{kde } q = 1 + \frac{i}{100}. \tag{5.34}$$

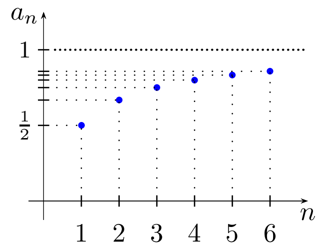
Problém 5.56.1. Jakou částku by pan Křeček ušetřil, pokud by po dobu 15 let ukládal na konci každého roku částku 50 000 Kč na účet s úrokovou mírou $i = 5\ \%$ $p.a$? Předpokládáme, že každý uložený vklad je úročen až v následujícím úrokovacím období. Jiné okolnosti (daně, změnu úrokové míry atd.) neberte v úvahu.

5.5 Limita posloupnosti

S posloupností čísel je spojen důležitý pojem limity posloupnosti reálných čísel. Přibližíme jej na posloupnosti čísel

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots,$$

jejíž n-tý člen je dán vzorcem $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Snadno nahlédneme, že všechny členy zadané posloupnosti jsou menší než jedna a že s rostoucím indexem n se jejich hodnota stále více přibližuje číslu jedna, viz Obrázek 5.20. Rozumíme tomu tak, že při volbě

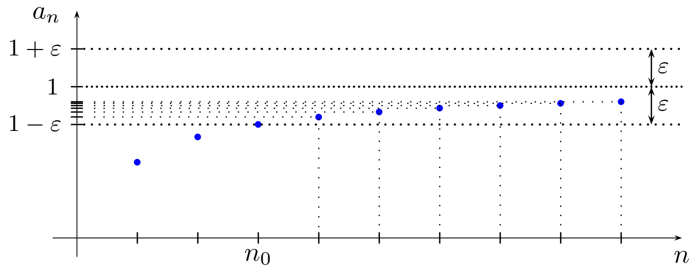


Obrázek 5.20: Hodnoty posloupnosti se s rostoucí hodnotou blíží k číslu jedna.

libovolného reálného čísla $\varepsilon > 0$, je možné najít v posloupnosti a_n takový člen s indexem n_0, za kterým se všechny zbývající členy liší od čísla jedna o méně, než je námi zvolené číslo ε. Potom říkáme, že posloupnost konverguje k číslu jedna, resp. že limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číslo jedna.

Uvedené pozorování můžeme shrnout následujícím způsobem. Ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo n_0, že všechny členy posloupnosti s indexem n, kde $n \geq n_0$, patří do okolí $(1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon)$ bodu jedna, viz Obrázek 5.21. Ukažme, že tomu tak skutečně je. Obecný člen posloupnosti je dán předpisem $a_n = \frac{n}{n+1}$. Hledáme, pro která n jsou vzhledem k danému $\varepsilon > 0$ splněny nerovnosti $1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon$, tedy

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \varepsilon. \tag{5.35}$$



Obrázek 5.21: Pro $n > n_0$ patří všechny hodnoty a_n do okolí $(1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon)$ bodu jedna.

Úpravami postupně dostaneme následující nerovnosti.

$$-\varepsilon < \frac{n}{n+1} - 1 < \varepsilon \qquad \ldots\ \textit{odečtení čísla 1 v nerovnicích (5.35)}$$

$$-\varepsilon < \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} < \varepsilon \qquad \ldots\ \textit{náhrada čísla 1 analogickým výrazem}$$

$$-\varepsilon < \frac{-1}{n+1} < \varepsilon \qquad \ldots\ \textit{algebraická úprava}$$

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1} > -\varepsilon \qquad \ldots\ \textit{vynásobení číslem } (-1)$$

Pravá strana nerovnice je splněna pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $\varepsilon > 0$. Levou stranu nerovnosti upravíme do tvaru

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1} \qquad \ldots\ \textit{algebraická úprava}$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \ldots\ \textit{algebraická úprava}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Je-li například $\varepsilon = \frac{1}{10}$, musí být $n > 9$, tj. hodnotu n_0 položíme rovnu $n_0 = 9$. Bude-li $\varepsilon = \frac{1}{100}$, potom požadovanou podmínku splňují všechna $n > 99$. V tomto případě bude $n_0 = 99$. Je zřejmé, že číslo n_0 závisí na zvolené hodnotě ε. Zmenší -li se ε, většinou se zvětší odpovídající hodnota n_0. Je dobré si uvědomit, že hodnota n_0 není číslem ε stanovena jednoznačně. Jestliže jsme totiž našli k hodnotě ε příslušné n_0, potom podmínce (5.35) vyhovuje také jakékoliv $n > n_0$.

Definice 5.5.1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnu číslu a, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 takové, že pro všechna n, kde $n > n_0$, je splněna nerovnost

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{5.36}$$

Okolnost, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnu číslu a, zapisujeme pomocí symbolu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Příklad 5.57

5.57. Určete hodnotu limity posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je n-tý člen dán předpisem $a_n = \frac{1}{n}$.

Řešení: Výpočtem několika prvních členů posloupnosti dostaneme

$$\{a_n\} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots$$

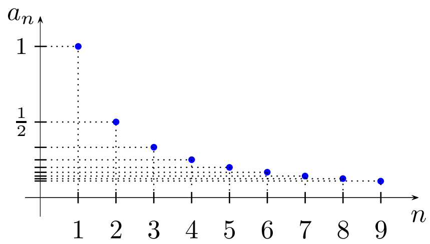
Je zřejmé, že s rostoucí hodnotou indexu n míří hodnoty posloupnosti k nule. Ověříme to dle definice. Zvolme příslušné $\varepsilon > 0$. Potom podle definice musíme ukázat, že je možné ke každé takové hodnotě ε najít příslušné $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n > n_0$ bude splněna nerovnost

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{resp.} \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že výrazy na obou stranách nerovnice jsou nezáporné, je možné v zápisu vynechat absolutní hodnotu. Potom platí

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{právě když} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

a stačí položit $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, viz Obrázek 5.22.



Obrázek 5.22: Několik prvních členů posloupnosti $a_n = 1/n$

Příklad 5.58

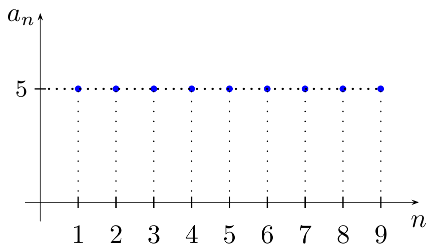
5.58. Určete hodnotu limity posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ve které je n-tý člen dán předpisem $a_n = 5$.

Řešení: V tomto případě je řešení jednoduché. Konstantní posloupnost nabývá jediné hodnoty pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a tato hodnota je současně limitou posloupnosti. V případě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 5$ je tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$. Dokážeme toto tvrzení podle definice.

Ke každému $\varepsilon > 0$ stačí zvolit $n_0 = 1$. Potom pro všechna $n > n_0 = 1$ je $a_n = 5$ a platí

$$|a_n - a| = |5 - 5| = 0 < \varepsilon.$$

Ukázali jsme, že ke každému $\varepsilon > 0$ stačí položit $n_0 = 1$ a podmínka (5.36) je splněna. Tím jsme podle Definice 5.5.1 dokázali, že platí $\lim_{n\to\infty} 5 = 5$, viz Obrázek 5.23.



Obrázek 5.23: Několik prvních členů posloupnosti $a_n = 5$

5.6 Elementární funkce

Významnou roli mezi všemi funkcemi hrají tzv. *elementární funkce*. Za elementární považujeme takové funkce, které vznikly z tzv. *základních elementárních funkcí* pomocí početních operací sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí a dále pak pomocí skládání funkcí. S některými ze základních elementárních funkcí jste se již seznámili na základní i střední škole. Patří mezi ně například funkce polynomické, exponenciální a logaritmické, funkce goniometrické a cyklometrické.

5.6.1 Polynomické funkce

V následující kapitole si připomeneme některé vlastnosti funkcí ve tvaru polynomů (mnohočlenů). Polynomické funkce nám umožňují vytvářet řadu jednoduchých užitečných modelů. Později uvidíte, že je možné modelovat celou řadu situací pomocí lineárních či kvadratických funkcí, které obě patří mezi polynomické funkce.

Definice 5.6.1. Polynomickou funkcí rozumíme funkci, kterou je možné vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad (5.37)$$

kde koeficienty a_i mohou být libovolná reálná čísla, pouze předpokládáme $a_n \neq 0$ (tj. koeficient u nejvyšší mocniny v polynomu předpokládáme různý od nuly). Stupněm polynomu rozumíme číslo, které odpovídá nejvyšší mocnině proměnné, dle naší definice jí je číslo n.

Nejčastěji používanými polynomickými funkcemi jsou lineární, resp. kvadratické funkce, které jsou zadány pomocí polynomů prvního, resp. druhého stupně. Vzhledem k jejich častému použití budeme těmto dvěma funkcím věnovat samostatné kapitoly.

$f(x) = 3x + 5$ ... *příklad lineární funkce*

$g(x) = x^2 + 2x - 8$ ... *příklad kvadratické funkce*

$h(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ... *příklad kubické funkce*

$m(x) = 3x^5 - 4x^3 + 11$ ... *funkce zadaná polynomem pátého stupně*

5.6.2 Lineární funkce

Lineární funkce patří mezi nejjednodušší funkce a je zřejmě i jednou z nejpoužívanějších funkcí vůbec.

Definice 5.6.2. *Lineární funkce* je dána předpisem

$$f(x) = kx + q, \qquad (5.38)$$

kde k a q jsou pevně daná reálná čísla.

Snadno si odvodíme, že definičním oborem lineární funkce je množina $\mathbb{R}$. Je-li ve vztahu (5.38) koeficient k roven nule, potom dostáváme speciální případ lineární funkce, tzv. konstantní funkci. Taková funkce nabývá pro všechna $x \in D(f)$ stále stejnou funkční hodnotu $f(x) = q$. Grafem lineární funkce je přímka.

Směrnice lineární funkce

Číslo k ve vzorci (5.38) nazýváme *směrnice* lineární funkce. Význam směrnice si vysvětlíme v několika následujících úlohách.

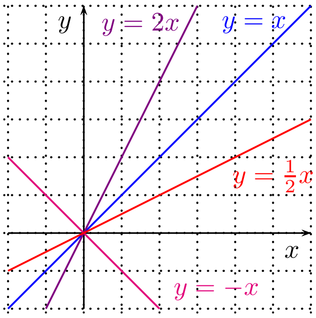
Příklad 5.59

5.59. Mějme lineární funkci danou předpisem $f(x) = 2x - 3$. Porovnáním se vzorcem (5.38) vidíme, že hodnoty koeficientů zadané lineární funkce jsou $k = 2$ a $q = -3$. V Tabulce 5.2 jsou uvedeny funkční hodnoty pro některé hodnoty x. Z Tabulky 5.2 lze

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Tabulka 5.2: Hodnoty funkce $f(x) = 2x - 3$ pro vybrané hodnoty x.

vyčíst některé vlastnosti lineární funkce. Všimněte si, že zvětšením hodnoty x o jednotku se funkční hodnota ve všech případech zvětšila o 2 jednotky, což odpovídá hodnotě směrnice k. Platí takové pravidlo obecně? Je pravda, že hodnota funkce f v bodě



$x+1$ se liší o hodnotu směrnice k v porovnání s hodnotou funkce v bodě x? Snadným výpočtem ukážeme, že tomu tak skutečně je.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= k(x+1)+q && \ldots \textit{funkční hodnota v bodě } x+1 \\ &= kx+k+q \\ &= kx+q+k && \ldots \textit{výraz } kx+q \textit{ je roven hodnotě } f(x) \\ &= f(x)+k \end{aligned}$$

Rovnost $f(x+1) = f(x)+k$ můžeme chápat tak, že kdykoliv se hodnota proměnné x zvýší o jednotku, funkční hodnota se změní o hodnotu směrnice k. Hodnotu x jsme volili libovolně, můžeme tedy předpokládat, že uvedené vztahy platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Z uvedeného příkladu vyplývá charakteristický rys lineární funkce. Vzroste-li hodnota proměnné x o jednotku na hodnotu $x+1$, potom přírůstek funkční hodnoty je vždy stejný a odpovídá hodnotě směrnice k. Je přitom jedno, zda došlo ke zvýšení z hodnoty $x = 6$ na hodnotu $x = 7$, z hodnoty $x = 2,54$ na hodnotu $x = 3,54$ nebo z hodnoty $x = -2,3$ na hodnotu $x = -1,3$. Stále bude platit

$$f(6)+k = f(7), \qquad f(2,54)+k = f(3,54), \qquad f(-2,3)+k = f(-1,3),$$

resp.

$$f(7)-f(6) = f(3,54)-f(2,54) = f(-1,3)-f(-2,3) = k.$$

Právě popsaná vlastnost směrnice k nám umožňuje rozhodnout, zda-li je k popisu vztahu mezi dvěma proměnnými v nějaké reálné situaci vhodné použít lineární funkci.

Příklad 5.60

5.60. Uvažujme situaci, ve které nastoupíme do vozu taxislužby. Taxikář si účtuje 30 Kč za každý ujetý kilometr. Je k popisu závislosti ceny jízdného na uražené vzdálenosti vhodná lineární funkce?

Řešení: Všimněte si, že pokaždé, když se uražená vzdálenost v taxíku zvýší o jeden kilometr, zvýší se cena jízdného o 30 Kč. Nezáleží přitom, zda se uražená vzdálenost zvýšila z 11 km na 12 km, nebo z 25 km na 26 km, přírůstek ceny bude v obou případech 30 Kč. Znamená to, že k popisu vztahu mezi vzdáleností a cenou je vhodná lineární funkce, jejíž směrnice má hodnotu $k = 30$.

Příklad 5.61

5.61. Pan Novák vložil na účet v bance jednorázově 15 000 Kč. Víme, že k původnímu vkladu jsou každý rok přičteny úroky ve výši 2 % z původně vložené částky. Je lineární funkce vhodná k popisu závislosti množství peněz na účtu pana Nováka podle počtu let trvání vkladu?

Řešení: Ze zadání plyne, že výše úroku činí 2 % z původně vložené částky, tedy 300 Kč. Každý rok se panu Novákovi zvýší množství peněz na účtu o 300 Kč. Tedy zvýší-li se doba trvání vkladu z pěti na šest let, resp. z osmi na devět let, resp. z 21 na 22 let, pokaždé se částka na účtu navýší o stejný úrok ve výši 300 Kč. Hledaná funkce je lineární a pro její směrnici platí $k = 300$.

Příklad 5.62

5.62. Původní cena automobilu byla 300 000 Kč a jeho cena se každý měsíc snižuje o 1 % z ceny v předchozím měsíci. Funkce $P(t)$ uvádí cenu automobilu P v čase t. Je tato funkce lineární?

Řešení: Po prvním měsíci cena klesla o 3 000 Kč na částku 297 000 Kč. Po druhém měsíci cena klesla o 1 % z ceny 297 000 Kč, tedy o 2 970 Kč. Je zřejmé, že změna ceny po jednom měsíci se v různých měsících liší, což je ve sporu se základní vlastností směrnice lineární funkce. Funkce, která popisuje cenu automobilu v jednotlivých měsících, nemůže být lineární funkce.

Vraťme se k Příkladu 5.60. Pokud taxíkem ujedeme jeden kilometr, zvýší se cena jízdného o 30 Kč. Ujedeme-li dva kilometry, zvýší se cena jízdného o dvojnásobek 30 Kč, tedy o 60 Kč atd. Cena jízdného se ovšem zvýší o 60 Kč při jakémkoliv zvýšení uražené vzdálenosti o dva kilometry, např. zvýší-li se uražená vzdálenost z hodnoty pět kilometrů na sedm kilometrů. Jak se obecně změní cena jízdného, zvýší-li se uražená vzdálenost z hodnoty x_1 na hodnotu x_2?

Použití symbolu Δ. Změní-li se hodnota proměnné x z hodnoty x_1 na hodnotu x_2, potom rozdíl $x_2 - x_1$ nazýváme diference (rozdíl) proměnné x a k jeho označení používáme symbol Δx. Je tedy

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Symbol Δ je písmenem řecké abecedy a odpovídá velkému písmenu D latinské abecedy. Výraz Δx vyjadřuje, o kolik se změnila hodnota proměnné x, resp. jaký je přírůstek hodnoty proměnné x. Poznamenejme, že pokud je $x_2 < x_1$, může být tento přírůstek roven zápornému číslu. Analogicky, symbol Δy odpovídá přírůstku proměnné y atd. Pro symbol $\Delta f(x)$ platí

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1).$$

Hodnota $\Delta f(x)$ vyjadřuje, o kolik se změnila funkční hodnota, jestliže se proměnná x změnila z hodnoty x_1 na hodnotu x_2 atd.

Nyní se opět vrátíme k Příkladu 5.60 a zapíšeme známé údaje pomocí symbolu Δ. Označme přitom přírůstek uražené vzdálenosti symbolem Δx a odpovídající navýšení ceny jízdného symbolem ΔP. Víme, že pro $\Delta x = 1$ je $\Delta P = 30$. Dále pro $\Delta x = 2$ je $\Delta P = 60$. Snadno nahlédneme, že mezi Δx a ΔP platí vztah

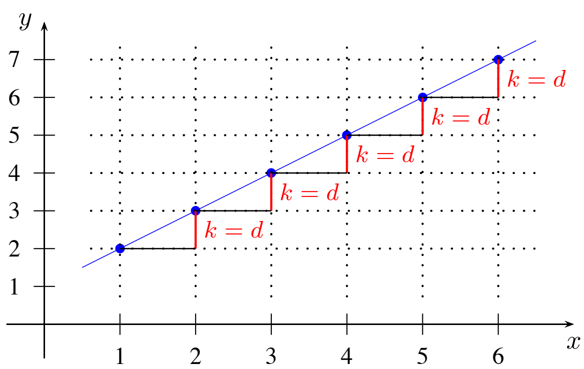
$$\Delta P = 30 \cdot \Delta x, \qquad \text{resp.} \qquad 30 = \frac{\Delta P}{\Delta x}.$$

V uvedeném vztahu má číslo 30 význam směrnice. Tento výsledek můžeme zobecnit pro jakoukoliv lineární funkci se směrnicí k. Je $\Delta f(x) = k \cdot \Delta x$. Odtud dostáváme důležitý vzorec, který nám umožňuje vypočítat směrnici lineární funkce

$$k = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{5.39}$$

Vzorec (5.39) je velmi důležitý a v následujících kapitolách bude hrát významnou roli. Je proto vhodné si jej dobře zapamatovat.

Nyní poukážeme na důležitou souvislost mezi lineární funkcí a aritmetickou posloupností. V Kapitole 5.4.1 na straně 240 jsme zavedli pojem aritmetické posloupnosti a diference aritmetické posloupnosti. V Příkladu 5.46 jsme potom ukázali, že posloupnost, jejíž n-tý člen vypočteme podle vztahu $a_n = 4n + 1$ je aritmetická s prvním členem $a_1 = 5$ a diferencí $d = 4$. Jistě si dokážete představit, že funkce $y = 4x + 1$ definovaná pouze na množině $\mathbb{N}$ bude nabývat stejné hodnoty jako uvedená posloupnost. Podle této analogie odpovídá směrnice lineární funkce diferenci aritmetické posloupnosti.



Obrázek 5.24: Souvislost funkčních hodnot lineární funkce a aritmetické posloupnosti, resp. souvislost hodnoty směrnice k a diference d

A co koeficient q?

Stejně jako směrnice k má jistý význam v předpisu lineární funkce (5.38) i koeficient q. Položme $x = 0$, potom rovnost $f(x) = kx + q$ přejde do tvaru $f(0) = k \cdot 0 + q$, tedy $f(0) = q$. Koeficient q tedy vyjadřuje, jaká je hodnota funkce f v bodě $x = 0$. Ve slovních úlohách, ve kterých budeme hledat předpis lineární funkce, má koeficient q často význam počáteční hodnoty, tedy hodnoty funkce na počátku děje při nulové hodnotě argumentu.

Příklad 5.63

5.63. V Příkladu 5.60 jsme zjistili, že lineární funkce je vhodná k vyjádření ceny jízdného v závislosti na uražené vzdálenosti. Přidejme předpoklad, že nástupní sazba v taxíku činí 25 Kč. Jaká je v tomto případě hodnota koeficientu q?

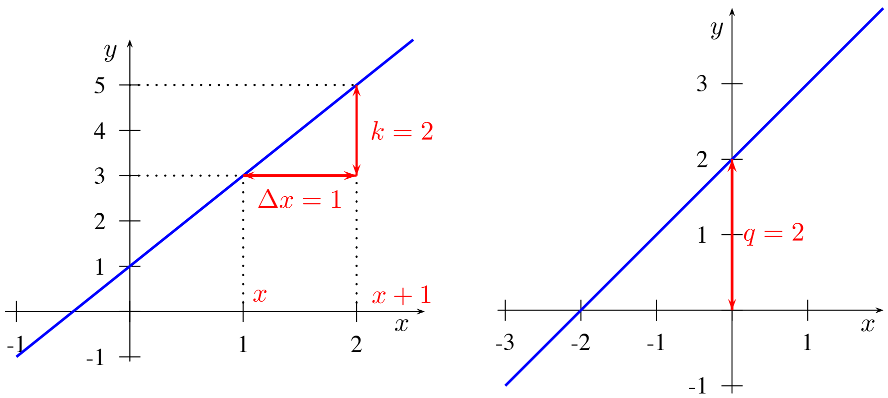
Řešení: Víme, že koeficient q má význam funkční hodnoty (v našem případě ceny jízdného) pro $x = 0$ (v našem případě pro 0 ujetých kilometrů). Díky nástupní sazbě zaplatíme 25 Kč, i když uražená vzdálenost v tu chvíli je rovna nule. Proto je hodnota koeficientu $q = 25$. Předpis lineární funkce potom zní $P(s) = 30s + 25$, kde s je vzdálenost ujetá taxíkem a P je odpovídající cena jízdného.

Příklad 5.64

5.64. V Příkladu 5.61 jsme pracovali s lineární funkcí, která popisovala výši částky, která se nachází na účtu pana Nováka v jednotlivých letech trvání vkladu. Jaká je v tomto případě hodnota koeficientu q?

Řešení: Pan Novák na účet vložil 15 000 Kč, v čase $t = 0$ bylo množství peněz na účtu rovno této sumě. Proto je $q = 15\,000$ a předpis dané funkce zní $P(t) = 300t + 15\,000$, kde $P(t)$ je množství peněz na účtu pana Nováka po t letech trvání vkladu.

Grafem lineární funkce je přímka. Při pohledu na graf lineární funkce bychom měli být schopni ihned říci, jaký je předpis této funkce. Stačí k tomu určit hodnoty k a q. Hodnotu q určíme snadno. Víme, že graf funkce prochází bodem o souřadnicích $[0, q]$, což je bod, ve kterém daná přímka protíná osu y. K určení hodnoty směrnice



(a) Směrnice k ukazuje, o kolik vzroste funkční hodnota při zvětšení nezávisle proměnné o jednotku. Na obrázku je zobrazen graf funkce $y = 2x + 1$.

(b) Koeficient q ukazuje, jaká je funkční hodnota pro $x = 0$. Na obrázku je zobrazen graf funkce $y = x + 2$.

Obrázek 5.25: Významy koeficientů k a q v předpisu lineární funkce $y = kx + q$

k zase stačí zjistit, o kolik se změnila funkční hodnota, jestliže se některá hodnota x zvýšila o jednotku.

V některých úlohách se setkáme s tím, že známe souřadnice dvou bodů, kterými prochází přímka. Tuto přímku můžeme považovat za graf lineární funkce a ptáme se na předpis této lineární funkce. Pro takový nalezený předpis lineární funkce ve tvaru $y = kx + q$ potom často používáme název *rovnice přímky*.

Příklad 5.65

5.65. Nalezněte předpis lineární funkce $y = kx + q$, jejíž graf prochází body o souřadnicích $A = [3, 2]$ a $B = [9, 5]$.

Řešení: Uvedeme dvě možnosti, jak úlohu vyřešit. První z nich spočívá ve výpočtu směrnice přímky k a určení hodnoty koeficientu q. Víme, že směrnice přímky je číslo, které udává, o kolik vzroste funkční hodnota funkce (tedy hodnota souřadnice y), jestliže se hodnota nezávisle proměnné x zvýší o jednotku. V našem případě se hodnota proměnné x zvýšila o šest jednotek, hodnota proměnné y se zvýšila o tři jednotky. Protože hodnota y se mění rovnoměrně v závislosti na změně x, pak se při zvýšení proměnné x o jednu jednotku zvýší hodnota y o polovinu jednotky. Směrnice je potom rovna $k = 1/2$, viz vzorec (5.39). Koeficient q udává, v jaké „výšce" přímka protíná osu y. Vzhledem k hodnotě směrnice je zřejmé, že je-li pro $x = 3$ hodnota y rovna dvěma, potom pro $x = 2$ je $y = 1,5$, pro $x = 1$ je $y = 1$ a pro $x = 0$ je $y = \frac{1}{2}$, což je i hodnota q. Proto je předpis funkce dán výrazem $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Druhý způsob výpočtu je založen na dosazení souřadnic bodů A a B do předpisu funkce $y = kx + q$. Tím vznikne soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Ze souřadnic bodů A a B víme, že pro $x = 3$ je $y = 2$ a pro $x = 9$ je $y = 5$. Dosazením těchto hodnot do předpisu funkce získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3k + q &= 2 \\ 9k + q &= 5. \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou $k = \frac{1}{2}$ a $q = \frac{1}{2}$, tedy předpis funkce je $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

5.66. Která z následujících dvou tabulek obsahuje hodnoty lineární funkce? Jaký je předpis této lineární funkce? **Příklad 5.66**

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	5	3	0	-2	-5	-7

x	0	2	4	6	8	10	12
$g(x)$	5	3	1	-1	-3	-5	-7

Řešení: Nejdříve se zabývejme hodnotami v první tabulce. Vidíme, že přírůstky hodnoty x jsou stále rovny dvěma, měly by tedy být stále stejné i přírůstky funkčních hodnot. Pro přírůstky funkce f dostáváme

$$\begin{aligned} f(2) - f(0) &= 3 - 5 \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(4) - f(2) &= 0 - 3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Přírůstky funkce se mění, funkce $f(x)$ nemůže být lineární funkcí.

Pro funkci $g(x)$ a její přírůstky $\Delta g(x)$ platí

$$\begin{aligned} g(2) - g(0) &= 3 - 5 \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(8) - g(6) &= -3 - (-1) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(4) - g(2) &= 1 - 3 \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(10) - g(8) &= -5 - (-3) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(6) - g(4) &= -1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(12) - g(10) &= -7 - (-5) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Všechny přírůstky $\Delta g(x)$ jsou stejné, funkce $g(x)$ je lineární funkce. Nyní nalezneme její předpis, tj. nalezneme hodnoty koeficientů k a q ve výrazu $g(x) = kx + q$. Vždy, když se hodnota x zvýšila o dvě jednotky, funkční hodnota se snížila o dvě jednotky. Vzhledem ke vzorci (5.39) dostaneme rovnost

$$k = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Pro hodnotu směrnice platí $k = -1$. Hodnotu koeficientu q určíme také snadno, stačí určit funkční hodnotu funkce g v bodě $x = 0$. Je $q = g(0) = 5$, přičemž hodnotu $g(0)$ jsme zjistili z výše uvedené tabulky. Předpis funkce proto zní $g(x) = -x + 5$.

Příklad 5.67

5.67. Nalezněte rovnici přímky p procházející body

$$p: \ A = [1,1] \text{ a } B = [5,1]$$

a rovnici přímky q, která prochází body o souřadnicích

$$q: \ A = [1,1] \text{ a } B = [1,5].$$

Řešení: Přímka p prochází body, jejichž y-ové souřadnice jsou stejné. Proto je tato přímka rovnoběžná s osou x (nakreslete si obrázek). Vzhledem k tomu je daná přímka tvořena body, jejichž všechny y-ové souřadnice jsou rovny 1. Z tohoto důvodu je přímka p určená rovnicí $y = 1$. Tuto rovnici lze přiblížit tak, že vyjadřuje množinu všech bodů, jejichž y-ová souřadnice je rovna 1.

Přímka q prochází body, jejichž x-ové souřadnice jsou stejné. Proto je tato přímka rovnoběžná s osou y (opět pomůže obrázek), všechny x-ové souřadnice jsou rovny 1 a z tohoto důvodu je přímka q určená rovnicí $x = 1$. Tato rovnice vyjadřuje množinu všech bodů, jejichž x-ová souřadnice je rovna 1.

Poznamenejme, že přímka p je grafem konstantní funkce $f(x) = 1$. Naproti tomu, přímka q nemůže být grafem žádné funkce $y = f(x)$, neboť nesplňuje podmínku, že jedné hodnotě nezávisle proměnné x přísluší právě jedna hodnota závisle proměnné y.

5.6.3 Lineární modely používané v ekonomii

Lineárními modely budeme rozumět lineární funkce popisující (ať již přesně nebo alespoň dostatečně přibližně) vztahy, se kterými se setkáváme v běžném životě. Vzhledem k tomu, že budeme pracovat s ekonomickými veličinami, pro které v ekonomické teorii existuje tradiční označení, přebereme toto označení a budeme ho používat i v následující části učebnice. Začneme několika příklady zahrnujícími pojmy *celkové náklady* TC, *celkový příjem* TR a *celkový zisk* π[7]).

Příklad 5.68

5.68. Vrátíme se k Příkladu 5.60 a upřesníme jeho zadání. V lednu 2012 nabízela jistá firma v Ústí nad Labem své taxislužby s následujícími cenami: sazba za nastoupení do vozidla 30 Kč, jízda se zákazníkem 25 Kč za ujetý kilometr.

a) Vypočtěte celkové náklady zákazníka na ujetí x km vozem taxislužby.

b) Využijte předchozí výsledek k výpočtu celkových nákladů zákazníka za jízdu dlouhou 9 km.

c) Jaké jsou celkové náklady zákazníka na ujetí pátého kilometru?

d) Nakreslete graf zobrazující celkové náklady zákazníka jako funkci ujeté vzdálenosti x.

Řešení:

a) Máme určit celkové náklady TC v závislosti na délce jízdy x, neboli určit předpis pro $TC(x)$ jako funkci proměnné x. Uvedeme několik příkladů. Je

$$\begin{aligned} TC(1) &= 25 \cdot 1 + 30 = 55 && \ldots\ 1 \textit{ km po } 25 \textit{ Kč/km plus } 30 \textit{ Kč} \\ TC(2) &= 25 \cdot 2 + 30 = 80 && \ldots\ 2 \textit{ km po } 25 \textit{ Kč/km plus } 30 \textit{ Kč} \\ TC(3) &= 25 \cdot 3 + 30 = 105 && \ldots\ 3 \textit{ km po } 25 \textit{ Kč/km plus } 30 \textit{ Kč} \end{aligned}$$

Z uvedených příkladů je zřejmý vzor ve formě lineární funkce $f(x) = mx + b$, s jehož pomocí vyjádříme celkové náklady zákazníka ve tvaru

$$TC(x) = 25x + 30. \tag{5.40}$$

[7]) Označení celkových nákladů pochází z anglického *Total Costs*, celkového příjmu z anglického *Total Revenue*. K označení zisku by bylo vhodné použití písmene P, z anglického *Profit*, ale toto označení se používá pro označení ceny (anglicky *Price*). Proto se k označení celkového zisku používá písmeno řecké abecedy π, které představuje analogií písmene P v latince.

Všimněte si, že směrnice lineární funkce $m = 25$ udává cenu za ujetí jednoho kilometru. V tomto smyslu nazýváme tuto směrnici *mezními náklady* a značíme ji symbolem MC. Mezní náklady tedy představují hodnotu, o kterou se zvýší celkové náklady, zvýší-li se hodnota x o jednotku. Hodnota výrazu $25x$ se mění s hodnotou proměnné x, výraz nazýváme *variabilní náklady* a značíme symbolem VC. Absolutní člen v předpisu lineární funkce (5.40) se nemění, jeho hodnotu v tomto případě nazýváme *fixní náklady* a označujeme jej symbolem FC.[8]) Hodnota fixních nákladů FC není ovlivněna počtem ujetých kilometrů. Obecně můžeme velikost nákladů zapsat ve formě lineární funkce ve tvaru

$$TC(x) = mx + b,$$

kde m je velikost mezních nákladů *MC*, mx představuje velikost variabilních nákladů VC a výraz b udává fixní náklady FC. Poznamenejme, že v ekonomii vyjadřujeme analogický vztah ve tvaru $TC = VC + FC$.

b) Celkové náklady zákazníka na ujetí devíti kilometrů vypočteme dosazením do vzorce (5.40).

$$TC(9) = 25 \cdot 9 + 30 = 255 \text{ Kč}$$

Devět kilometrů jízdy bude stát zákazníka taxislužby za popsaných podmínek celkem 255 Kč.

c) Při výpočtu nákladů zákazníka na ujetí pátého kilometru můžeme postupovat následujícím způsobem. Nalezneme náklady na ujetí čtyř kilometrů.

$$TC(4) = 25 \cdot 4 + 30 = 130 \text{ Kč}$$

Vypočteme náklady na ujetí pěti kilometrů.

$$TC(5) = 25 \cdot 5 + 30 = 155 \text{ Kč}$$

Potom náklady zákazníka na ujetí pátého kilometru činí

$$TC(5) - TC(4) = 155 - 130 = 25 \text{ Kč} = MC.$$

Jistě nás nepřekvapí, že nám vyšla hodnota mezních nákladů. Připomeňme, že tyto nám představují náklady na každou přidanou jednotku, v tomto případě náklady na každý další ujetý kilometr.

d) Obrázek 5.26 zobrazuje graf funkce celkových nákladů. Na vodorovné ose zobrazujeme počet ujetých kilometrů x, na svislou osu nanášíme náklady zákazníka TC za použití taxislužby. Počáteční bod grafu zobrazuje velikost fixních nákladů FC (tj. nákladů, které máme, aniž bychom ujeli jediný kilometr jízdy). Mezní náklady MC nám určují velikost směrnice m dané přímky.

Problém 5.68.1. Jak by se změnil předpis nákladové funkce $TC(x)$, kdyby se cena za jeden ujetý kilometr zvýšila na hodnotu 35 Kč.

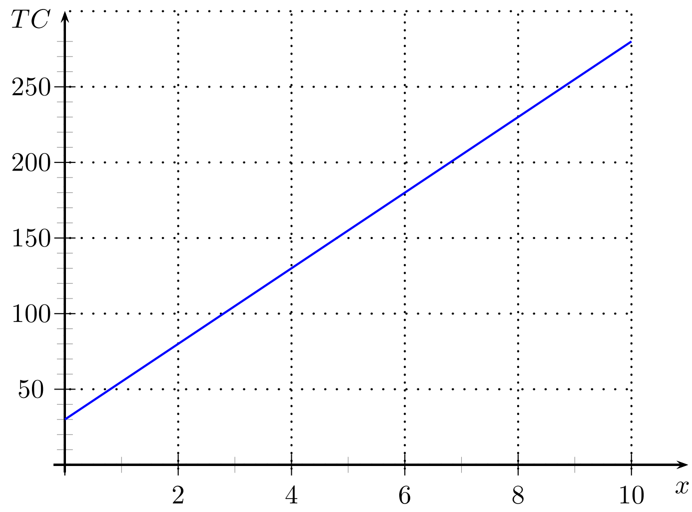
Problém 5.68.2. Jak by se změnil předpis nákladové funkce $TC(x)$, kdyby se cena za nastoupení do vozidla taxislužby snížila na hodnotu 15 Kč.

Náklady, příjem a zisk

Nyní si můžeme shrnout pojmy, které jsme používali v předchozím příkladu, a přidáme několik nových.

---

[8]) Symbol *MC* pochází z anglického *Marginal Costs*, označení *VC* z anglického *Variable Costs* a symbol *FC* z anglického *Fixed Costs*.



Obrázek 5.26: Graf funkce celkových nákladů ve tvaru $TC(x) = 25x + 30$

Definice 5.6.3. *Funkce celkových nákladů* TC vyjadřuje celkové náklady jako funkci počtu položek q. Funkce celkových nákladů ve tvaru $TC(q) = mq + b$ se nazývá lineární funkce celkových nákladů.

Množství mq nazýváme variabilní náklady (v ekonomii značíme VC), hodnotu b nazýváme fixní náklady (v ekonomii značíme FC). Směrnice m označuje veličinu mezní náklady (v ekonomii označujeme symbolem MC).

Definice 5.6.4. *Celkovým příjmem* TR (v ekonomii se celkový příjem značí též slovy obrat, resp. tržby) rozumíme celkově přijatou platbu za přijatou protihodnotu (zboží, službu atd.).

Je-li TR celkový příjem za prodej q kusů zboží, každý kus za cenu p peněžních jednotek (korun, eur, dolarů atd.), potom velikost tohoto příjmu je popsána lineární funkcí

$$TR = p \cdot q.$$

Poznamenejme, že v ekonomii vyjadřujeme analogický vztah ve tvaru $TR = P \cdot Q$, kde P je jednotková cena a Q je množství zboží. Poznamenejme, že veličinu p můžeme chápat jako tzv. *mezní příjem* (značíme MR). Mezní příjem představuje pojem analogický k pojmu mezní náklady a vyjadřuje příjem z každé další prodané jednotky zboží. Jistě nás nepřekvapí, že ve vyjádření funkce $TR(q)$ chybí absolutní člen b. Připomeňme, že jeho hodnota určuje celkový příjem v případě, kdy jsme neprodali jediný kus zboží, tj. pro $q = 0$. Samozřejmě, že v případě, kdy je počet prodaných kusů zboží roven nule, je roven nule i náš celkový příjem z prodeje.

Definice 5.6.5. *Zisk* π představuje „čistý“ výnos, tedy množství peněz, které nám zůstane z celkového příjmu po odečtení celkových nákladů.

Zisk, celkový příjem a náklady jsou tedy spojeny rovností

$$\pi = TR - TC.$$

Jsou-li celkové náklady vyšší než celkový příjem, dosahujeme záporného zisku a říkáme, že jsme ve ztrátě. Jsou-li celkové náklady rovny celkovému příjmu, potom nehospodaříme ani ve ztrátě, ani v zisku - zisk je roven nule. Počet q prodaných položek, při nichž je celkový příjem roven nákladům ($TR = TC$), nazýváme *bod zvratu*.

Příklad 5.69

5.69. Rodinné pekařství vyrábí a prodává (mimo jiné) výborný koláč. Denní náklady pekařství na výrobu q kusů těchto koláčů jsou popsány vztahem

$$TC(q) = 7q + 240$$

a příjem plynoucí z prodeje x kusů tohoto koláče činí

$$TR(q) = 15q.$$

Denní zisk z výroby a prodeje q kusů koláče je potom

$$\begin{aligned}
\pi(q) &= TR(q) - TC(q) && \ldots \textit{ vztah pro vyjádření zisku} \\
&= 15q - (7q + 240) && \ldots \textit{ dosazení za } TR(q) \textit{ a } TC(q) \\
&= 8q - 240.
\end{aligned}$$

Bod zvratu vypočteme z rovnice

$$\begin{aligned}
TR(q) &= TC(q) && \ldots \textit{ rovnice pro vyjádření bodu zvratu} \\
15q &= 7q + 240 && \ldots \textit{ dosazení za } TR(q) \textit{ a } TC(q) \\
8q &= 240 \\
q &= 30.
\end{aligned}$$

Bod zvratu činí $q = 30$ kusů koláčů. Při výrobě a prodeji nižšího počtu koláčů utrpí pekařství ztrátu. Při výrobě většího počtu koláčů má pekařství zisk, jehož výši vypočteme ze vztahu $\pi(q) = 8q - 240$ Kč.

Příklad 5.70

5.70. Majitel firmy vyrábějící trička s potiskem zjistil, že ve čtvrtek firma průměrně potiskne a prodá 200 kusů triček a její náklady přitom činí 25 000 Kč. V pátek jsou náklady 30 000 Kč při potisku a prodeji 250 kusů triček.

a) Na základě uvedených informací nalezněte lineární nákladovou funkci. Vypočtěte mezní náklady a fixní náklady.

b) Firma prodává potištěná trička za cenu 150 Kč. Určete vztah vyjadřující velikost celkového příjmu.

c) Nalezněte funkci vyjadřující velikost zisku v závislosti na počtu prodaných kusů triček. Kde se nachází bod zvratu?

Řešení:

a) Hledáme funkci ve tvaru $TC(q) = mq + b$, kde q je počet potištěných a prodaných triček a $TC(q)$ jsou celkové náklady spojené s prodejem q triček. V zadání je uvedeno, že pro $q = 200$ jsou celkové náklady $TC = 25\,000$, pro $q = 250$ jsou celkové náklady $TC = 30\,000$. Obě dvojice údajů si můžeme představit jako souřadnice bodů $[q, TC(q)]$ na grafu nákladové funkce, viz Obrázek 5.27. V takovém případě víme, že graf funkce nákladů prochází body o souřadnicích $[200,\ 25\,000]$ a $[250,\ 30\,000]$ a naším úkolem je určit předpis této lineární funkce.

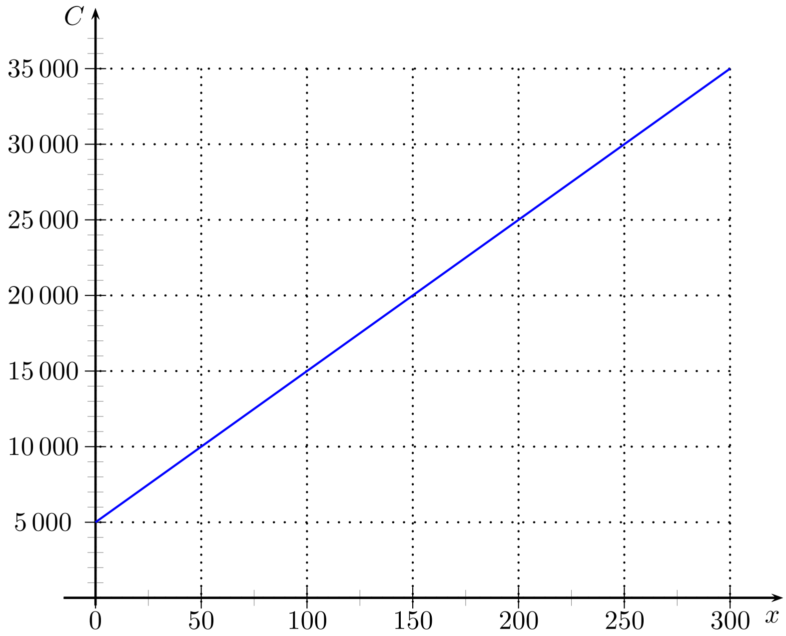
   Podobnou úlohu jsme již řešili v Příkladu 5.65 na straně 256. V analogii s uvedenou úlohou nejprve vypočteme směrnici dané lineární funkce.

$$m = \frac{TC(q_2) - TC(q_1)}{q_2 - q_1} = \frac{30\,000 - 25\,000}{250 - 200} = 100$$

   Prozatím jsme zjistili, že předpis funkce má tvar $TC(q) = 100q + b$. Vypočteme ještě hodnotu b. Víme, že tato hodnota odpovídá funkční hodnotě pro $q = 0$. Vzhledem k tomu, že směrnice funkce má hodnotu rovnu 100, potom při poklesu q o jednu jednotku klesne velikost celkových nákladů o sto jednotek, při poklesu q o 200 jednotek poklesnou celkové náklady o $200 \cdot 100$ jednotek, tedy o 20 000 Kč. Pro $q = 0$ jsou tedy náklady rovny $25\,000 - 20\,000 = 5\,000$ Kč, a to je i hodnota členu b. Předpis funkce je dán vztahem

$$TC(q) = 100q + 5\,000.$$

   Mezní náklady mají hodnotu směrnice, tedy $MC = 100$ Kč/kus a fixní náklady mají hodnotu $FC = 5\,000$ Kč.



Obrázek 5.27: Graf nákladové funkce ve tvaru $C(x) = 100x + 5\,000$

b) Firma prodává trička po 150 Kč za kus. Předpis pro funkci vyjadřující velikost celkového příjmu $TR(q)$ při prodeji q kusů triček má tvar

$$TR(q) = 150 \cdot q.$$

c) Zisk firmy $\pi(q)$ v závislosti na počtu q prodaných triček vyjádříme vztahem

$$\begin{aligned} \pi(q) &= TR(q) - TC(q) && \ldots \textit{ vztah pro vyjádření zisku} \\ &= 150q - (100q + 5\,000) && \ldots \textit{ dosazení za } TR(q) \textit{ a } TC(q) \\ &= 50q - 5\,000. \end{aligned}$$

Bod zvratu můžeme vyjádřit z rovnice $TR(q) = TC(q)$ (jako v Příkladu 5.69), nebo z rovnice $\pi(q) = 0$, neboť víme, že v bodu zvratu firma realizuje nulový zisk (má příjmy stejně velké jako náklady a tyto se navzájem odečtou). Vybereme si druhou možnost. Tím dostaneme

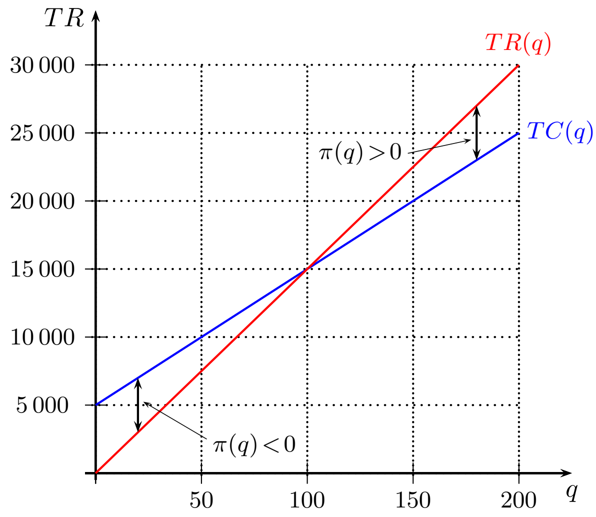
$$\begin{aligned} 0 &= \pi(q) && \ldots \textit{ vztah pro vyjádření bodu zvratu} \\ &= 50q - 5\,000 && \ldots \textit{ dosazení za } \pi(q) \\ q &= \frac{5\,000}{50} && \ldots \textit{ vyjádření } q \textit{ z rovnice} \\ &= 100. && \ldots \textit{ vypočtený bod zvratu} \end{aligned}$$

Firma bude zisková, pokud bude prodávat více než 100 kusů potištěných triček denně.

Právě uvedená úloha má názorné grafické vyjádření. Zakreslíme grafy funkcí $TC(q)$ a $TR(q)$ do stejných souřadných os. Na Obrázku 5.28 jsou uvedeny grafy funkcí

$$\begin{aligned} TC(q) &= 100q + 5\,000 \\ TR(q) &= 150q \end{aligned}$$

Bod zvratu je bod, ve kterém mají obě funkce stejnou funkční hodnotu a jejich grafy se proto protínají. Z grafu je zřejmé, že bod zvratu nastane pro $q = 100$ kusů triček. Z grafu lze též vyčíst velikost zisku resp. ztráty $\pi(q) = 50q - 5\,000$, kde tato velikost je dána délkou svislé přímky mezi grafy obou funkcí pro dané q.



Obrázek 5.28: Bod zvratu

Poptávka a nabídka

V běžném životě se, s výjimkou některých druhů zboží, setkáváme s tím, že ochota lidí koupit daný výrobek klesá s rostoucí cenou daného výrobku. Počet q prodaných výrobků při ceně P určuje *poptávku* po tomto zboží. Tradičně se pro označení poptávky používá symbol D (z anglického *Demand*).

Příklad 5.71

5.71. Pěstitel zeleniny prodává ve svém stánku u rušné silnice ředkvičky. Chce zjistit, jak jejich cena ovlivňuje množství prodaných svazečků ředkviček za jeden den. Zjistil, že při ceně 7 Kč prodá během jednoho dne 270 svazků ředkviček. Zvýšením ceny na 9 Kč poklesl zájem o jeho zboží a prodal pak pouze 250 svazků ředkviček.

a) Nalezněte model, který by vyjádřil poptávku D jako lineární funkci poptávaného množství q v závislosti na ceně p. Tj. vypočtěte hodnoty koeficientů m, b v předpisu funkce $q = m \cdot p + b$.

b) Jak lze v tomto případě vysvětlit význam směrnice m lineární funkce a absolutního členu b?

c) Jak by se podle tohoto modelu měla změnit cena jednoho svazečku, aby pěstitel prodal za jeden den 300 svazků ředkviček?

Řešení:

a) Nalezení příslušného modelu znamená určení předpisu lineární funkce ve tvaru $q = mp + b$, kde q je množství poptávaného zboží při ceně p. Hodnoty m a b proto musíme nalézt tak, aby při $p = 7$ bylo $q = 270$ a současně při $p = 9$ bylo $q = 250$. V analogii s Příkladem 5.65 je

$$\begin{aligned} m &= \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} && \textit{\dots vztah pro vyjádření směrnice} \\ &= \frac{250 - 270}{9 - 7} && \textit{\dots dosazení konkrétních hodnot} \\ &= -10 && \textit{\dots vypočtená hodnota směrnice } m \\ q &= -10p + b && \textit{\dots dosazení vypočtené směrnice do předpisu funkce} \end{aligned}$$

Víme, že pro $p = 7$ je $q = 270$. Dosazením těchto hodnot do předpisu funkce dostaneme rovnici, ze které můžeme vypočítat hodnotu členu b.

$$\begin{aligned} 270 &= -10 \cdot 7 + b \\ b &= 340 \end{aligned}$$

Hledaný model poptávky má tvar

$$q = -10p + 340, \quad \text{resp.} \quad q = 340 - 10p.$$

b) Směrnice $m = -10$ udává, o kolik svazků se změní množství poptávaného zboží, jestliže cena jednoho svazečku stoupne o 1 Kč. Je zřejmé, že každé zvýšení ceny o 1 Kč vede k snížení počtu prodaných svazečků o deset kusů.

Hodnota $b = 340$ uvádí, kolik svazečků ředkviček se „prodá“ za cenu $p = 0$, tedy denní počet zájemců o ředkvičky, pokud by je pěstitel rozdával zadarmo.

Zde se samozřejmě můžeme oprávněně ptát na smysluplnost modelu. Právě na tomto místě je vhodné si uvědomit, že jsme nalezli pouze model, který může poukazovat na skutečné chování. Jeho věrohodná vypovídací schopnost je často omezena na nějakou podmnožinu $\mathbb{R}$.

c) Ve vztahu $q = -10p + 340$ máme určit, pro jakou cenu p je $q = 300$.

$$\begin{aligned}
q &= -10p + 340 && \ldots \textit{ vyjádření poptávky } D \\
10p &= 340 - q && \ldots \textit{ osamostatnění proměnné } p \\
p(q) &= 34 - \frac{q}{10} && \ldots \textit{ vyjádření } p \textit{ jako funkce proměnné } q \\
p(300) &= 34 - \frac{300}{10} && \ldots \textit{ dosazení známé hodnoty } q = 300 \\
&= 4 && \ldots \textit{ vyjádření hledané hodnoty } p
\end{aligned}$$

V nalezeném modelu $q = 340 - 10p$ prodá pěstitel 300 svazků ředkviček denně při ceně 4 Kč za jeden svazek.

Problém 5.71.1. Jak by se změnila poptávka D, kdyby pěstitel při ceně 7 Kč prodal za den 320 svazků ředkviček a poptávané množství při ceně 9 Kč se nezměnilo? Při jaké ceně by potom pěstitel prodal za jeden den 215 svazků ředkviček?

Shrnutí - poptávka

Funkce poptávky vyjadřuje poptávané množství q (počet prodaných kusů zboží za danou časovou jednotku) při ceně p za jeden kus zboží. Poznamenejme, že v ekonomii se tento pojem označuje názvem *rovnice poptávky*. Lineární funkce poptávky má tvar $q(p) = mp + b$, kde q značí poptávané množství při ceně p.

Význam směrnice m
Hodnota směrnice m uvádí, jak se změní poptávané množství při nárůstu ceny zboží o jednu peněžní jednotku. Směrnice m mívá v tomto případě většinou zápornou hodnotu, čímž je naznačeno, že při růstu ceny dojde k poklesu množství poptávaného zboží.

Význam koeficientu b
Hodnota koeficientu b říká, jaká by byla poptávka při ceně $p = 0$, tedy v případě, kdy by se dané zboží rozdávalo zadarmo.

Dodejme, že v ekonomii je zvykem vyjadřovat funkci poptávky ve tvaru $p(q) = aq + b$, tedy ve tvaru, ve kterém je cena funkcí poptávky. V takovém případě si stanovíme, jaké množství výrobků se má prodat v daném období, a pomocí funkce poptávky vypočteme cenu, při které se toto množství prodá.

V předchozí části jsme viděli, že s rostoucí cenou zboží se snižuje počet zákazníků, kteří jsou ochotni si dané zboží zakoupit. S rostoucí cenou zboží však stoupá počet producentů, kteří jsou ochotni dané zboží vyrábět a dodávat na trh. Všechny dvojice ceny a příslušného nabízeného množství tvoří tzv. nabídku. Vztah, který popisuje nabídku jako funkci nabízeného množství zboží v závislosti na ceně, nazýváme funkce nabídky (v ekonomii též *rovnice nabídky*).

Příklad 5.72

5.72. Budeme pokračovat v Příkladu 5.71. Předpokládáme, že zvyšující se cena přesvědčí ostatní pěstitele, aby i oni začali nabízet své zboží. V tabulce jsou uvedeny počty prodejných i nabízených svazků ředkviček při uvedených cenách.

cena	[Kč/svazek]	7	9
poptávka	[počet prodejných svazečků/den]	270	250
nabídka	[počet svazečků umístěných na trh/den]	180	220

a) Nalezněte model lineární funkce nabídky a lineární funkce poptávky.

b) Jaká by měla být cena p jednoho svazku ředkviček, při které bude poptávané množství rovno nabízenému počtu svazků? Jaký počet svazečků se při této ceně, nazývané též rovnovážná cena, prodá? Co se stane, jestliže si pěstitelé účtují nižší než rovnovážnou cenu? Co se stane, je-li cena jednoho svazku vyšší než rovnovážná cena?

Řešení:

a) Funkci poptávky při zadaných údajích jsme již vyjádřili v Příkladu 5.71 ve tvaru $q = 340 - 10p$. K nalezení funkce nabídky použijeme třetí řádek tabulky. Při ceně $p = 7$ Kč je odpovídající nabízené množství rovno $q = 180$ svazečkům, při ceně $p = 9$ Kč je nabízeno $q = 220$ svazků. Graf příslušné lineární funkce tedy prochází body o souřadnicích $[7,\ 180]$ a $[9,\ 220]$. Pro její směrnici m platí

$$m = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{220 - 180}{9 - 7} = 20.$$

Pro funkci nabídky potom platí vztah

$$\begin{aligned} q &= m \cdot p + b \\ &= 20p + (180 - 20 \cdot 7) \\ &= 20p + 40. \end{aligned}$$

b) Máme-li zjistit, při jaké ceně je poptávka rovna nabídce, hledáme řešení rovnice

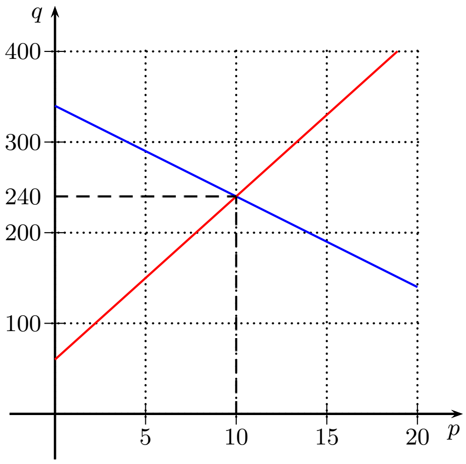
$$\begin{aligned} \text{poptávané množství} &= \text{nabízené množství} \\ 340 - 10p &= 20p + 40 \\ -30p &= -300 \\ p &= \frac{-300}{-30} = 10. \end{aligned}$$

Rovnovážná cena činí 10 Kč. Při této ceně je na trh umístěno a posléze prodáno

$$\begin{aligned} q &= 340 - 10p && \ldots \textit{ dosazení do funkce poptávky} \\ &= 340 - 10 \cdot 10 \\ &= 240 \\ q &= 20p + 40 && \ldots \textit{ dosazení do funkce nabídky} \\ &= 20 \cdot 10 + 40 \\ &= 240. \end{aligned}$$

V obou případech nám vyšlo 240 svazečků ředkviček denně. Má-li se vyrovnat nabídka ředkviček s poptávkou po nich, je nutné za uvedených podmínek prodávat 240 svazků, každý po 10 Kč.

Je zřejmé, že budou-li se ředkvičky prodávat za nižší cenu, převáží poptávané množství nad nabízeným množstvím, což nazýváme převisem poptávky a vznikne nedostatek ředkviček. Bude-li naopak cena vyšší, než je rovnovážná cena, bude na trhu nabízeno více ředkviček, než o kolik je zájem a na trhu vznikne přebytek ředkviček, nebo-li převis nabídky nad poptávkou.



Obrázek 5.29: Rovnováha mezi poptávkou a nabídkou

Shrnutí - nabídka

Funkce nabídky vyjadřuje nabídku jako závislost nabízeného množství kusů zboží q (za danou časovou jednotku) na ceně p (za jeden kus zboží). Lineární funkce nabídky má tvar $q(p) = mp + b$, kde q značí množství nabízeného zboží při ceně p.
Je běžné, že s rostoucí cenou zboží roste množství zboží umístěného na trh, proto je směrnice m lineární funkce nabídky většinou kladná.

Rovnovážná cena
Řekneme, že nabídka a poptávka *jsou v rovnováze,* když množství nabízeného zboží odpovídá množství poptávaného zboží. Příslušnou hodnotu ceny, při které se poptávka vyrovná nabídce, nazýváme *rovnovážná cena*.

5.6.4 Kvadratická funkce

V předchozí kapitole jsme se zabývali lineárními funkcemi. Tyto funkce jsou užitečné, ovšem nevystačíme s nimi při řešení mnohých úloh z reálného světa. Jistě si vybavíte některé situace, ve kterých grafické vyjádření vztahu mezi dvěma veličinami není přímka, ale „zahnutá“ křivka. Nejjednodušší funkcí, jejímž grafem není přímka, je tzv. kvadratická funkce.

Definice 5.6.6. *Kvadratická funkce* je taková funkce, jejíž předpis může být zapsán ve tvaru

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{5.41}$$

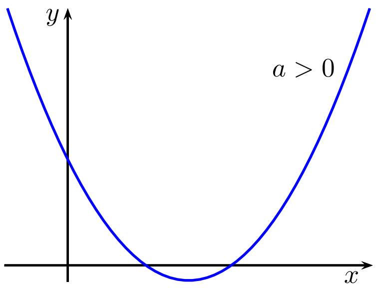
kde a, b, c jsou pevně zvolená reálná čísla a navíc platí $a \neq 0$.

Ve vzorci (5.41) nazýváme výraz ax^2 kvadratický člen, bx lineární člen a číslo c absolutní člen kvadratické funkce. Příklady kvadratických funkcí s vyznačením hodnot koeficientů u jednotlivých členů

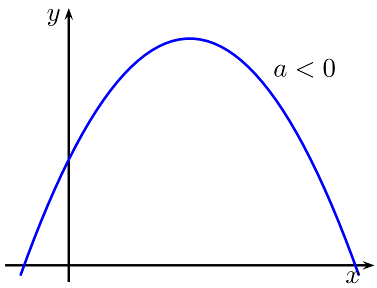
$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^2 - 10x + 5 && \ldots \quad a = 4, && b = -10, && c = 5\\
g(x) &= 6 - 5x^2 && \ldots \quad a = -5, && b = 0, && c = 6\\
R(p) &= -4\,800p^2 + 12\,000p && \ldots \quad a = -4\,800, && b = 12\,000, && c = 0.
\end{aligned}$$

Graf kvadratické funkce. Grafem kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ je křivka, kterou nazýváme parabola. Uvedeme některé její vlastnosti.

Je-li koeficient kvadratického členu kladný, tj. pro $a > 0$, potom je daná kvadratická funkce konvexní, je-li $a < 0$, je kvadratická funkce konkávní ve všech bodech svého definičního oboru.



(a) Pro $a > 0$ je funkce $y = ax^2 + bx + c$ konvexní.



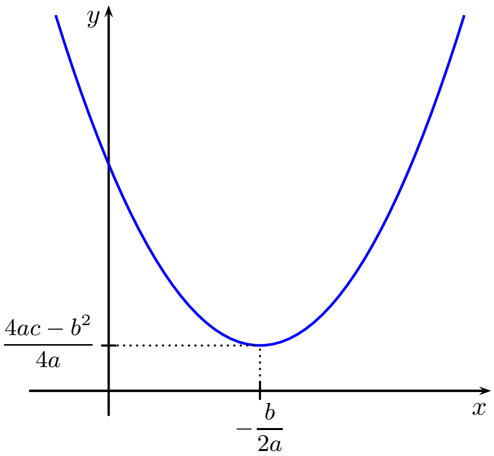
(b) Pro $a < 0$ je funkce $y = ax^2 + bx + c$ konkávní.

Obrázek 5.30: Vypuklost grafu kvadratické funkce vzhledem ke koeficientu a

V pozdějším textu odvodíme, že pro x-ovou, resp. y-ovou souřadnici vrcholu paraboly platí vztahy

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad \text{resp.} \quad y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Parabola je osově souměrná vzhledem ke svislé ose, která prochází jejím vrcholem.



Obrázek 5.31: Souřadnice vrcholu grafu kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$

Průsečíky grafu funkce s osou x vypočteme ze vztahu $f(x) = 0$, tedy pomocí řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, jejíž některé způsoby řešení uvedeme v následující kapitole.

Kvadratická rovnice

Při řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ hledáme taková x, pro která je hodnota odpovídající funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ rovna nule. Z grafického pohledu víme, že funkční hodnota v daném bodě x odpovídá „výšce" příslušného bodu grafu nad osou x. Je-li funkční hodnota v daném bodě rovna nule, je i výška příslušného bodu grafu nad osou x nulová, a proto daný bod grafu leží na ose x. Řešením rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou tedy souřadnice průsečíků grafu kvadratické funkce s osou x

5.73. Je dána kvadratická funkce $y = 2x^2 + 3x - 9$. Určete funkční hodnoty funkce pro $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **Příklad 5.73**

Řešení: Hodnoty funkce v zadaných bodech získáme dosazením těchto čísel místo x.

Např. funkční hodnotu v bodě 0, tj. $f(0)$, dostaneme položením $x = 0$ v předpisu funkce atd.

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 9$$
$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 9 = -9$$
$$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 9 = -4.$$

Analogickým výpočtem bychom obdrželi funkční hodnoty i pro další hodnoty x, viz Tabulka 5.3.

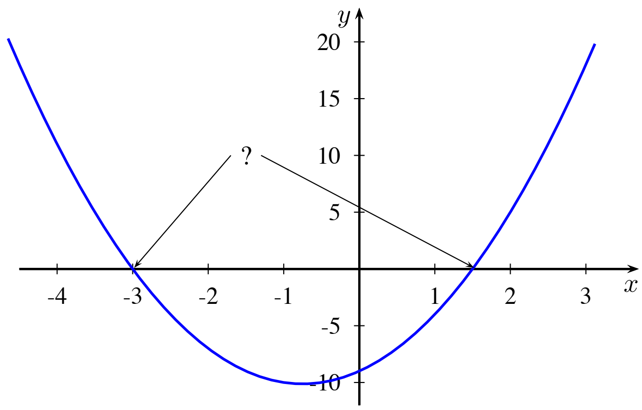
x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	-9	-4	5	18	35

Tabulka 5.3: Hodnoty funkce $f(x) = 2x^2 + 3x - 9$ ve vybraných bodech x

Příklad 5.74

5.74. V předchozí úloze jsme počítali funkční hodnoty pro jistá zadaná x. Nyní se pomocí zjištěných výsledků z předchozí úlohy pokuste odhadnout, pro jakou hodnotu proměnné x bude funkční hodnota $f(x)$ rovna nule, tj. vypočtěte x-ovou souřadnici průsečíku grafu funkce s osou x.

Řešení: Při pohledu do Tabulky 5.3 lze předpokládat, že hledaný nulový bod funkce



Obrázek 5.32: Průsečíky grafu kvadratické funkce $f(x) = 2x^2 + 3x - 9$ s osou x, resp. grafické zobrazení kořenů kvadratické rovnice $2x^2 + 3x - 9 = 0$

leží v intervalu $x \in (1, 2)$. Mohli bychom se pokusit hledanou hodnotu x určit přesněji, např. výpočtem hodnot funkce pro $x \in \{1,2;\ 1,4;\ 1,6;\ 1,8\}$. Příslušné funkční hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce.

x	1,2	1,4	1,6	1,8
$y = f(x)$	-2,52	-0,88	0,92	2,88

Analogicky k předchozímu výkladu lze odhadnout, že nulový bod funkce bude vyhovovat nerovnostem $1,4 < x < 1,6$. Podobně bychom mohli postupovat dál a určovat hodnotu nulového bodu stále přesněji. Naštěstí v tomto případě známe rychlejší a přesnější postup, kterak hledaný nulový bod funkce najít. Tento způsob řešení má základ v takzvaném *doplnění na čtverec*, kterému se budeme věnovat v následující části.

Doplnění na čtverec

Doplněním na čtverec rozumíme úpravu (převedení) kvadratického trojčlenu x^2+px+q na součet druhé mocniny[9]) lineárního dvojčlenu a jisté konstanty, tedy do tvaru

$$x^2 + px + q = (x + a)^2 + b, \tag{5.42}$$

kde čísla $a, b \in \mathbb{R}$ musíme najít tak, aby vyhovovala rovnosti (5.42). Rozepsáním tohoto výrazu dostaneme rovnost

$$(x + a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b = x^2 + p\,x + q,$$

ve které porovnáním s trojčlenem $x^2 + px + q$ snadno odvodíme vztah mezi konstantou p a a ve tvaru $2a = p$, resp. $a = p/2$ a pak dopočítáme hodnotu konstanty b. Pro lepší porozumění si dopočítejte chybějící členy v následujících příkladech.

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + \ldots$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + \ldots$

c) $(x + 4)^2 = x^2 + \ldots x + \ldots$

d) $(x - 5)^2 = x^2 - \ldots x + \ldots$

e) $(x + a)^2 = x^2 + (2a)x + \ldots$

5.75. Doplňte trojčlen $x^2 - 4x + 5$ na čtverec. **Příklad 5.75**

Řešení: Koeficient u lineárního členu má hodnotu $p = -4$, proto je $a = -4/2 = -2$. Výraz $(x + a)^2$ má tedy tvar $(x - 2)^2$. Protože $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$, tak vidíme, že k výrazu $(x - 2)^2$ musíme přičíst číslo 1, abychom dostali $x^2 - 4x + 5$. Platí tedy rovnost

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 2)^2 + 1.$$

5.76. Doplňte trojčlen $x^2 + 5x - 7$ na čtverec. **Příklad 5.76**

Řešení: Koeficient u lineárního členu má nyní hodnotu $p = 5$. Pro koeficient a tak platí $a = 5/2$. Výraz $(x+a)^2$ má nyní tvar $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$. Protože $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2+5x+\frac{25}{4}$, tak vidíme, že od výrazu $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ musíme odečíst číslo $\frac{53}{4}$, neboť $\frac{25}{4} - \frac{53}{4} = -\frac{28}{4} = -7$. Tím jsme dostali rovnost

$$x^2 + 5x - 7 = \left(x^2 + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{53}{4}.$$

5.77. Doplňte trojčlen $4x^2 + 8x - 15$ na čtverec. **Příklad 5.77**

Řešení: V tomto případě není zadaný trojčlen ve tvaru $x^2 + px + q$, proto jej nejprve vyjádříme tak, abychom s ním v tomto tvaru mohli pracovat. Je

$$4x^2 + 8x - 15 = 4 \cdot \left(x^2 + 2x - \frac{15}{4}\right).$$

Nyní doplníme trojčlen ze závorky na čtverec. Snadno nahlédneme, že $p = 2$, tedy $a = 1$. Roznásobením $(x+1)^2$ dostaneme výraz $x^2 + 2x + 1$. Od něho musíme odečíst člen $\frac{19}{4}$, neboť

$$1 - \frac{19}{4} = \frac{4}{4} - \frac{19}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Doplněním na čtverec kvadratického trojčlenu $x^2 + 2x - \frac{15}{4}$ je výraz $(x + 1)^2 - \frac{19}{4}$. Nyní se „vrátíme“ k původně zadanému trojčlenu, který byl čtyřikrát větší.

$$4x^2 + 8x - 15 = 4 \cdot \left(x^2 + 2x - \frac{15}{4}\right) = 4 \cdot \left[(x + 1)^2 - \frac{19}{4}\right] = 4(x + 1)^2 - 19$$

[9]) Dříve se často druhá mocnina výrazu nazývala čtvercem tohoto výrazu. Tento název má původ v dřívějším geometrickém charakteru početních úprav. Název „přežívá“ v řadě matematických pravidel dodnes, viz např. zmíněné doplnění na čtverec, metoda nejmenších čtverců, Pythagorova věta, atd.

Souřadnice vrcholu paraboly. Doplnění na čtverec nám umožňuje získat některé informace o grafu kvadratické funkce, resp. o jejím průběhu. Mějme kvadratickou funkci $f(x) = ax^2 + bx + c$, kterou doplněním na čtverec převedeme do tvaru

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

viz vztah (5.45) v odvození kořenů kvadratické rovnice na straně 271. Předpokládejme, že koeficient a u kvadratického členu je kladný, funkce $f(x)$ je tedy konvexní na celém definičním oboru, má tedy globální minimum, které na jejím grafu tvoří vrchol paraboly. Ptáme se, pro jakou hodnotu x nabývá funkce $f(x)$ tuto nejmenší funkční hodnotu. Výraz $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ musí být nezáporný, jeho nejmenší možná hodnota je nula, přičemž tuto hodnotu nabývá pro $x = -\frac{b}{2a}$. V bodě s touto x-ovou souřadnicí je hodnota funkce

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(0 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

a tato hodnota je současně y-souřadnicí vrcholu paraboly. Je-li tedy dána kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, potom vrchol jejího grafu má souřadnice

$$[x_v, y_v] = \left[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]. \tag{5.43}$$

Analogicky bychom ukázali, že stejné souřadnice vrcholu má kvadratická funkce i pro případ $a < 0$. V tomto případě ovšem bude tento vrchol zobrazovat globální maximum funkce.

Pokud je předpis kvadratické funkce uvedený rovnou ve tvaru doplněném na čtverec, je zjištění souřadnic vrcholu ještě jednodušší. Nechť je dán předpis kvadratické funkce ve tvaru

$$f(x) = (x + m)^2 + n.$$

Potom pro souřadnice vrcholu příslušné paraboly platí díky stejnému zdůvodnění jako v předchozím případě následující vztah

$$[x_v, y_v] = [-m, n]. \tag{5.44}$$

Příklad 5.78

5.78. Vypočtěte souřadnice vrcholu grafu funkce $f(x) = x^2 + 6x + 12$ a rozhodněte, pro která $x \in D(f)$ je funkce rostoucí, resp. klesající.

Řešení: Máme zadánu kvadratickou funkci, jejím grafem je tedy parabola. Souřadnice jejího vrcholu můžeme vypočítat dosazením do vzorce (5.43), nebo je můžeme „přímo vidět“ z předpisu funkce doplněného na čtverec. Ukážeme si obě možnosti. V předpisu funkce jsou koeficienty jednotlivých členů rovny $a = 1, b = 6, c = 12$. Použitím vzorce (5.43) dostaneme

$$[x_v, y_v] = \left[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right] = \left[-\frac{6}{2}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 12 - 6^2}{4 \cdot 1}\right] = [-3,\ 3].$$

Druhá možnost spočívá ve vyjádření předpisu funkce ve tvaru doplněném na čtverec.

$$x^2 + 6x + 12 = (x + 3)^2 + 3$$

Souřadnice vrcholu jsou podle vzorce (5.44) rovny

$$[x_v, y_v] = [-3,\ 3].$$

Nyní vyřešíme, pro jaká x je zadaná funkce rostoucí, resp. klesající. Koeficient kvadratického členu je kladný ($a = 1 > 0$). Funkce $f(x)$ je proto konvexní, pro všechna $x < x_v$ je funkce $f(x)$ klesající a pro všechna $x > x_v$ je $f(x)$ rostoucí funkce.

Nyní si ukažme, jakým způsobem můžeme využít metodu doplnění na čtverec při řešení libovolné kvadratické rovnice. Některé jednodušší úpravy jsou vynechány, pokuste se vždy domyslet, jaký krok výpočtu byl proveden.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \textit{zadání kvadratické rovnice}\\
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \textit{algebraická úprava}\\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && \textit{provedení doplnění na čtverec}\\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && \textit{algebraická úprava pravé strany rovnice} \quad (5.45)\\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} && \textit{odmocnění obou stran rovnice}\\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \textit{výsledný vztah pro kořeny rovnice}
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že znaménko $\pm$ se používá ke zkrácení zápisu. Ve skutečnosti tím označujeme, že daný výraz se skládá ze dvou různých výrazů, přičemž v jednom z nich použijeme znaménko $+$ (plus), ve druhém znaménko $-$ (minus). Nyní víme, že kořeny kvadratické rovnice můžeme vypočítat ze vztahů

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5.46}$$

5.79. Nalezněte kořeny rovnice $2x^2 + 3x - 9 = 0$. **Příklad 5.79**

Řešení: Tuto úlohu jsme se již vlastně snažili vyřešit v Příkladu 5.74. Tehdy jsme zjistili, že hledaný kořen (nulový bod funkce) by měl ležet v rozmezí $1,4 < x < 1,6$. Nyní tento (a další) kořen vypočteme přesně pomocí vztahů uvedených v rovnici (5.46). Porovnáním zadané rovnice s kvadratickou rovnicí v základním tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ dostaneme $a = 2$, $b = 3$ a $c = -9$. Dosazením do (5.46) získáme

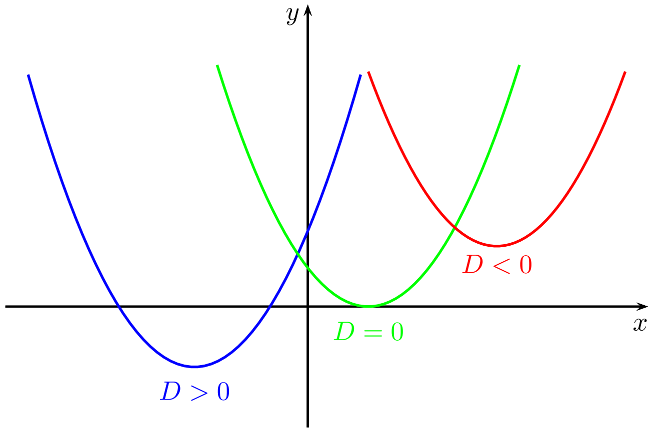
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4}.$$

Pro jednotlivé kořeny tak dostáváme

$$x_1 = \frac{-3 + 9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \qquad x_2 = \frac{-3 - 9}{4} = \frac{-12}{4} = -3.$$

Zadaná rovnice má dva nulové body $x_1 = 1,5$ a $x_2 = -3$.

Počet řešení kvadratické rovnice. V obou vzorcích (5.46) vystupuje člen $b^2 - 4ac$. Tento výraz nazýváme *diskriminant* kvadratické rovnice (funkce) a označujeme ho písmenem D. Řešíme-li kvadratickou rovnici na množině reálných čísel, potom znaménko hodnoty diskriminantu ovlivňuje počet kořenů této rovnice.



Obrázek 5.33: Souvislost znaménka diskriminantu a polohy grafu kvadratické funkce (resp. počtu kořenů příslušné kvadratické rovnice) $y = ax^2 + bx + c$, kde $a > 0$

Počet kořenů kvadratické rovnice vzhledem k hodnotě diskriminantu

a) Je-li $D > 0$, potom kvadratická rovnice $ax^2+bx+c = 0$ má právě dva kořeny x_1, x_2, jejichž hodnotu vypočteme ze vztahu (5.46). V takovém případě graf kvadratické funkce protíná osu x ve dvou různých bodech.

b) Je-li $D = 0$, potom kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má právě jeden kořen x, pro nějž vzorec (5.46) poskytuje hodnotu $x = -\dfrac{b}{2a}$. Graf kvadratické funkce se dotýká osy x pouze jediným bodem, tímto bodem je vrchol paraboly.

c) Je-li $D < 0$, potom ve vzorci (5.46) neexistuje odmocnina z diskriminantu a kvadratická rovnice nemá kořeny na množině reálných čísel. Graf funkce se celý nachází buď nad osou x, nebo celý pod osou x.

Použití kvadratických funkcí v ekonomii

Připomeňme, že v Kapitole 5.6.3 na straně 258 jsme se seznámili s pojmem celkový příjem, který znamenal celkový peněžní příjem plynoucí z jedné nebo několika plateb za prodané zboží. Jeho výpočet je snadný. Prodáme-li q kusů zboží, každý kus za p peněžních jednotek, potom celkový příjem TR je dán vzorcem

$$TR = pq.$$

Ve stejné kapitole jsme popsali i pojem funkce poptávky, který popisuje zájem kupujících o nákup zboží při dané ceně.

Příklad 5.80

5.80. Marketingové oddělení nakladatelství odhadlo funkci poptávky po vydávané knize mapující život oblíbené celebrity vzorcem ve tvaru

$$q = -50p + 22\,500,$$

kde p je cena dané knihy a q je množství prodaných knih při ceně p během jednoho roku. Za jakou cenu by se měla kniha prodávat, aby nakladatelství mělo nejvyšší možný celkový příjem z prodeje této knihy?

Řešení: Označme celkový příjem nakladatelství symbolem TR. Potom je

$$\begin{aligned} TR &= p \cdot q && \ldots \textit{ vzorec pro výpočet celkového příjmu} \\ &= p \cdot (-50p + 22\,500) && \ldots \textit{ dosazení za q pomocí funkce poptávky} \\ &= -50p^2 + 22\,500p && \ldots \textit{ zjednodušení} \end{aligned}$$

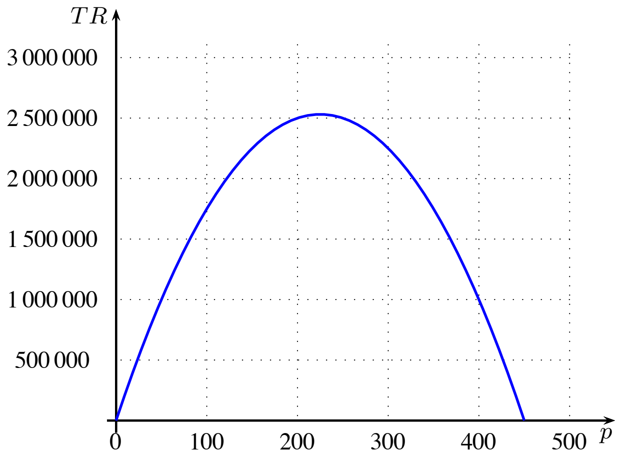
Chceme tedy zjistit, pro jakou hodnotu proměnné p nabývá funkce

$$TR(p) = -50p^2 + 22\,500p$$

svou nejvyšší hodnotu, tj. své maximum. Povšimněte si, že nalezený vzorec určuje kvadratickou funkci s koeficienty $a = -50$, $b = 22\,500$ a $c = 0$. Koeficient u kvadratického členu je záporný, funkce $TR(p)$ je konkávní a její vrchol označuje nejvyšší možnou funkční hodnotu. Víme, že pro souřadnice vrcholu grafu funkce platí vztah (5.43). V našem případě dostaneme

$$\begin{aligned} [p_v, TR_v] &= \left[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right] \\ &= \left[-\frac{22\,500}{2 \cdot (-50)}, \frac{4 \cdot (-50) \cdot 0 - 22\,500^2}{4 \cdot (-50)}\right] \\ &= \left[\frac{22\,500}{100}, \frac{506\,250\,000}{200}\right] \\ &= [225,\ 2\,531\,250]. \end{aligned}$$

Souřadnice vrcholu na vodorovné ose činí 225. Při této hodnotě tedy funkce $TR(p)$



Obrázek 5.34: Grafické zobrazení velikosti tržeb nakladatelství v závislosti na ceně knihy

nabývá svou největší hodnotu. Na základě těchto výsledků můžeme danému nakladatelství doporučit prodávat knihy za 225 Kč. Celkový příjem nakladatelství odpovídá funkční hodnotě v maximu, tedy souřadnici vrcholu na svislé ose. Víme, že tato činí 2 531 250. Nejvyšší hodnota celkového příjmu činí 2 531 250 Kč a tato bude dosažena při ceně prodávané knihy $p = 225$ Kč.

Problém 5.80.1. Jak by se změnila optimální cena vedoucí k maximálnímu celkovému příjmu, pokud by poptávka po knize byla popsána rovností

$$q(p) = -32p + 11\,520,$$

kde p je cena dané knihy a q je množství prodaných knih při ceně p během jednoho roku.

Příklad 5.81

5.81. Nakladatelství ABC Print odhaduje budoucí prodej své nově vydávané knihy *Kalendář dávných věků* pomocí funkce poptávky ve tvaru

$$q = 2\,300 - 5p,$$

kde q je počet celkově prodaných výtisků za jeden rok při ceně p za jeden kus. Jakou prodejní cenu by mělo nakladatelství stanovit, aby dosáhlo na nejvyšší možný roční příjem?

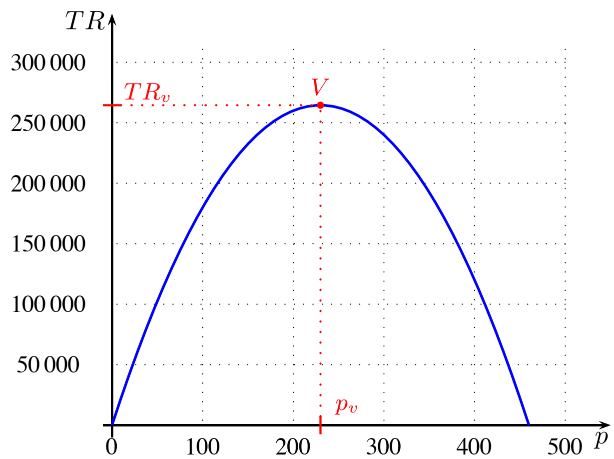
Řešení: Celkový příjem můžeme vyjádřit v závislosti na ceně prodávané publikace.

$$\begin{aligned} TR &= p \cdot q && \ldots \textit{ vzorec pro celkový příjem} \\ TR(p) &= p \cdot (2\,300 - 5p) && \ldots \textit{ vyjádření q z funkce poptávky} \\ &= 2\,300p - 5p^2 && \ldots \textit{ roznásobení výrazu} \end{aligned}$$

Ptáme se, při jaké ceně p bude hodnota veličiny TR nejvyšší. Všimněte si, že vztah mezi TR a p je určen kvadratickou funkcí $TR(p) = ap^2 + bp + c$, kde $a = -5$, $b = 2\,300$ a $c = 0$. Hodnota koeficientu a je záporná, funkce $TR(p)$ je tedy konkávní a bude nabývat své maximum ve vrcholu, jehož souřadnice určíme pomocí vztahu (5.43). Souřadnice p_v vrcholu V na vodorovné ose je

$$p_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2\,300}{2 \cdot (-5)} = 230.$$

Tato hodnota p_v uvádí nejvyšší bod grafu příslušné kvadratické funkce a také udává cenu, při které firma dosáhne na nejvyšší roční příjem. Ze vztahu $TR(p) = 2\,300p - 5p^2$



Obrázek 5.35: Grafické zobrazení velikosti tržeb nakladatelství v závislosti na ceně knihy

můžeme vypočítat, jak vysoký tento příjem bude.

$$\begin{aligned} TR(p) &= 2\,300p - 5p^2 \\ TR(230) &= 2\,300 \cdot 460 - 5 \cdot (460)^2 \\ &= 264\,500 \end{aligned}$$

Nejvyšší celkový roční příjem dosáhne nakladatelství při ceně $p = 230$ Kč a jeho výše bude $TR = 264\,500$ Kč. Poznamenejme, že obě tyto hodnoty odpovídají souřadnicím vrcholu $V = [230,\ 264\,500]$ v grafu funkce na Obrázku 5.35. Později se naučíme hledat nejvyšší, resp. nejmenší hodnoty funkce obecnějším způsobem.

Poptávka, příjem a zisk

Příklad 5.82

5.82. Společnost uvádí na trh novou společenskou hru. Firma při marketingovém průzkumu odhadla pro nový výrobek funkci poptávky ve tvaru $q = 3\,000 - 2p$, kde q představuje počet prodaných kusů hry za jeden měsíc při ceně p. Finanční oddělení společnosti vypočetlo fixní náklady na výrobu hry ve výši 20 000 Kč měsíčně a variabilní náklady spojené s výrobou, distribucí a prodejem hry ve výši 100 Kč za jeden kus hry. Vypočtěte, za jakou cenu by měla být hra prodávána, aby firma dosáhla na nejvyšší možný měsíční zisk.

Řešení: Celkové náklady firmy lze vyjádřit ve tvaru

$$TC(q) = 100q + 20\,000,$$

kde část $100q$ určuje velikost variabilních nákladů a část 20 000 představuje fixní náklady. Vzhledem k tomu, že některé funkce máme vyjádřené v závislosti na proměnné q a další jako funkce proměnné p, zapíšeme $TC(q)$ jako funkci proměnné p, abychom všechny funkce měli vyjádřené pomocí jediné proměnné.

$$\begin{aligned}
TC(q) &= 100q + 20\,000 && \dots \textit{ původní znění nákladové funkce}\\
TC(p) &= 100 \cdot (3\,000 - 2p) + 20\,000 && \dots \textit{ dosazení za veličinu } q \textit{ z funkce poptávky}\\
&= 300\,000 - 200p + 20\,000 && \dots \textit{ zjednodušení výrazu}\\
&= 320\,000 - 200p && \dots \textit{ vyjádření nákladové funkce pomocí } p
\end{aligned}$$

Víme, že pro celkový příjem TR platí vztah $TR(p) = q \cdot p$. Zisk π firmy vypočteme odečtením celkových nákladů TC od celkového příjmu TR.

$$\begin{aligned}
\pi(p) &= TR(p) - TC(p) && \dots \textit{ vzorec pro vyjádření zisku } \pi\\
&= q \cdot p - TC(p) && \dots \textit{ vyjádření } TR(p)\\
&= (3\,000 - 2p) \cdot p - (320\,000 - 200p) && \dots \textit{ dosazení konkrétních hodnot}\\
&= -2p^2 + 3\,200p - 320\,000 && \dots \textit{ roznásobení a zjednodušení}
\end{aligned}$$

Zisk firmy jsme vyjádřili pomocí kvadratické funkce $\pi(p) = ap^2 + bp + c$, kde $a = -2$, $b = 3\,200$ a $c = -320\,000$. Nyní snadno nalezneme cenu p, při které funkce $\pi(p)$ nabývá svou největší hodnotu, a to jako souřadnici vrcholu grafu příslušné funkce.

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{3\,200}{2 \cdot (-2)} = 800$$

Nejvyšší zisk firma dosáhne tehdy, bude-li hru prodávat za 800 Kč. Její zisk vypočteme dosazením vypočtené ceny do funkčního předpisu.

$$\begin{aligned}
\pi(p) &= -2p^2 + 3\,200p - 320\,000\\
&= -2 \cdot (800)^2 + 3\,200 \cdot 800 - 320\,000\\
&= 960\,000
\end{aligned}$$

Měsíční zisk firmy bude roven 960 000 Kč.

5.6.5 Exponenciální funkce

V kapitole 5.6.4 jsme ukázali, jak lze vytvořit mnoho nelineárních modelů pomocí kvadratické funkce. V některých nelineárních případech je však vhodné používat i jiné než kvadratické modely. Jedná se například o modely vytvořené pomocí exponenciální funkce v souvislosti s popisem populačního růstu, radioaktivního rozpadu, složeného úročení, učení se (resp. zapomínání) a mnoha dalších případů.

Definice 5.6.7. *Exponenciální funkce* je taková funkce, jejíž předpis může být zapsán ve tvaru

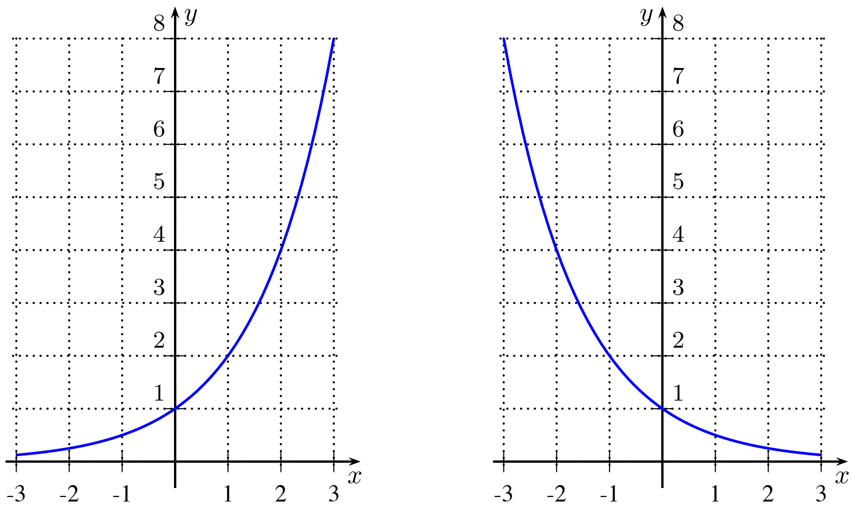
$$f(x) = K\,a^x, \tag{5.47}$$

kde koeficienty K a a jsou pevně zvolená reálná čísla a navíc platí $K \neq 0$ a $a > 0$, $a \neq 1$. Číslo a nazýváme *základem* exponenciální funkce, proměnná x představuje mocninu (exponent), kterým umocňujeme základ.

Poznamenejme, že terminologie ohledně exponenciálních funkcí není úplně jednotná. V některých učebnicích se můžete setkat s definicí exponenciální funkce ve tvaru $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. V této učebnici jsme se přiklonili k obecnější definici, která je vhodnější při modelovém řešení úloh z reálného světa.

Definičním oborem exponenciální funkce je množina všech reálných čísel. Oborem hodnot je pak množina kladných reálných čísel. Požadavek na kladnou hodnotu základu a plyne z toho důvodu, abychom se vyhnuli výrazům typu $(-5)^{1/2}$, jejichž hodnota není definována v množině reálných čísel (což ukážeme v dalším textu).

V Obrázku 5.36 jsou uvedeny příklady grafu exponenciální funkce v případě, kdy je $K > 0$ (konkrétně je $K = 1$) a základ exponenciální funkce je $a > 1$, resp. $0 < a < 1$. Je zřejmé, že pro $a > 1$ je příslušná exponenciální funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající. Dále lze snadno nahlédnout, že pro $K > 0$ jsou v obou případech funkční



(a) Graf exponenciální funkce $f(x) = a^x$ pro základ $a > 1$, zde konkrétně graf funkce $f(x) = 2^x$.

(b) Graf exponenciální funkce $f(x) = a^x$ pro základ $0 < a < 1$, zde konkrétně graf funkce $f(x) = (1/2)^x$.

Obrázek 5.36: Grafy exponenciální funkce pro $a > 1$, resp. $0 < a < 1$

hodnoty kladné pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$. Analogicky, pokud by bylo $K < 0$, funkční hodnoty by pro všechna $x \in \mathbb{R}$ byly záporné.

Zastavme se ještě chvíli u funkčních hodnot pro různé hodnoty x. Je dobře známo, že původní význam mocniny spočíval v opakovaném násobení základu tolikrát, kolik činila hodnota exponentu. Např. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, tj. pětkrát vynásobíme číslo tři sebou samým. Taková definice je však smysluplná pouze tehdy, je-li exponent přirozené číslo. Jak však rozumět číslům $2^0, 2^{-3}, 2^{3/5}, \ldots$?

Historická poznámka 5.6.8. Podobné otázky, které vedou k rozšíření původního významu daného pojmu, se v matematice hojně vyskytují a jejich zodpovězení často vede k rozvoji příslušné matematické disciplíny. Isaac Newton (1642 – 1727) zavedl v roce 1676 následující definice, které umožňují vypočítat hodnotu exponenciální funkce i pro jiná než přirozená čísla.

Definice 5.6.9. Pro $a > 0$ platí

$$a^0 = 1 \tag{5.48}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \tag{5.49}$$

$$a^{-m} = 1/a^m. \tag{5.50}$$

Oprávněnost (chcete-li *krása*) uvedených Newtonových definic plyne ze skutečnosti, že uvedené vzorce vedou ke spojitým funkcím, a obecně přijímané pravidlo $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ je smysluplné pro všechny exponenty, ať již to jsou přirozená čísla, či nikoliv.

V dalším textu uvádíme příklady některých exponenciálních funkcí spolu s výpočtem funkčních hodnot v některých bodech definičního oboru. V příkladech jsou uvedeny i příslušné hodnoty koeficientů K a a pro danou funkci.

$f(x) = 5^x$

$K = 1,\ a = 5$

$f(3) = 5^3 = 125$

$f(-4) = 5^{-4} = \dfrac{1}{5^4} = \dfrac{1}{625}$

$f(0) = 5^0 = 1$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$

$g(x) = 2^{-x} = \left(2^{-1}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

$K = 1,\ a = 1/2$

$g(1) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

$g(-2) = 2^{-(-2)} = 2^2 = 4$

$g(0) = 2^0 = 1$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$h(x) = 5 \cdot 3^x$

$K = 5,\ a = 3$

$h(2) = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$

$h(-1) = 5 \cdot 3^{-1} = 5 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

$h(0) = 5 \cdot 3^0 = 5 \cdot 1 = 5$

$k(x) = 4 \cdot 3^{-2x} = 4 \cdot \left(3^{-2}\right)^x = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^x$

$K = 4,\ a = 1/9$

$k(2) = 4 \cdot 3^{(-2)\cdot(2)} = 4 \cdot 3^{-4} = \dfrac{4}{81}$

$k(-1) = 4 \cdot 3^{(-2)\cdot(-1)} = 4 \cdot 3^2 = 36$

$k(0) = 4 \cdot 3^{(-2)\cdot(0)} = 4 \cdot 3^0 = 4 \cdot 1 = 4$

V uvedených příkladech jste jistě postřehli rovnost $f(0) = K$. Snadno ověříme, že tato rovnost platí obecně. Je totiž $f(0) = K \cdot a^0 = K \cdot 1 = K$. Při řešení úloh budeme tuto vlastnost často používat k určení hodnoty konstanty K. Z rovnosti $f(0) = K$ také plyne, že graf funkce $f(x) = K \cdot a^x$ protíná osu y v bodě K.

Vlastnosti exponenciální funkce. Je zřejmé, že při práci s exponenciální funkcí je nutné zvládat operace s mocninami. Připomeneme proto některá nejdůležitější pravidla. V daných vzorcích předpokládáme, že hodnoty u a v jsou kladná čísla, hodnoty x a y mohou být jakákoliv reálná čísla.

pravidlo	příklad 1)	příklad 2)
$u^x u^y = u^{x+y}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$	$3^{2-x} = 3^2 \cdot 3^{-x}$
$\dfrac{u^x}{u^y} = u^{x-y}$	$\dfrac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$	$5^{x-3} = \dfrac{5^x}{5^3} = \dfrac{5^x}{125}$
$\dfrac{1}{u^x} = u^{-x}$	$4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{5^x} = 5^{-x}$
$u^0 = 1$	$5^0 = 1$	$x^0 = 1$ pro $x \neq 0$
$(u^x)^y = u^{x\cdot y}$	$\left(4^2\right)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6 = 4\,096$	$5^6 = 5^{2\cdot 3} = \left(5^2\right)^3 = 25^3$
$(u \cdot v)^x = u^x v^x$	$15^2 = (5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2 = 225$	$2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1\,000$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)^x = \dfrac{u^x}{v^x}$	$(1,5)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16}$	$\dfrac{6^4}{3^4} = \left(\dfrac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$

Při řešení rovnic, které obsahují neznámou v exponentu, lze s výhodou použít následující dvě pravidla (opět za předpokladu, že $u > 0, v > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Rovnost } u^x = u^y \text{ platí tehdy a pouze tehdy, jestliže } x = y. \tag{5.51}$$

Je-li navíc $x \neq 0$, potom

$$u^x = v^x \quad \text{tehdy a pouze tehdy, jestliže} \quad u = v. \tag{5.52}$$

Příklad 5.83

5.83. Nalezněte řešení rovnice $5^{2t+16} = 5^{1-3t}$.

Řešení: Na levé i pravé straně rovnice jsou exponenciální funkce se stejným základem. Vzhledem k pravidlu uvedenému ve vzorci (5.51) musí platit rovnost

$$\begin{aligned} 2t + 16 &= 1 - 3t \\ 5t &= -15 \\ t &= -3. \end{aligned}$$

Rovnice $5^{2t+16} = 5^{1-3t}$ má jediný kořen $t = -3$.

Rozpoznání základu exponenciální funkce

V kapitole 5.6.2 jsme si ukázali, jak se v lineárních modelech projeví význam směrnice lineární funkce. Analogický význam nyní přisoudíme i základu exponenciální funkce a. Vyjdeme přitom z následujících rovností

$$\begin{aligned} f(x) &= K \cdot a^x && \ldots \textit{ definice funkce} \\ f(x+1) &= K \cdot a^{x+1} && \ldots \textit{ funkční hodnota v bodě } x+1 \\ &= K \cdot a^x \cdot a^1 && \ldots \textit{ použití vztahu } a^{x+y} = a^x \cdot a^y \\ &= a \cdot K \cdot a^x && \ldots \textit{ úprava výrazu} \\ &= a \cdot f(x). && \ldots \textit{ porovnání s funkční hodnotou v bodě } x \end{aligned}$$

Z uvedených rovností je patrné, že zvětšením hodnoty nezávislé proměnné o jednotku se hodnota funkce změní a-krát. Podle tohoto pravidla snadno poznáme, kdy je k popisu dané situace vhodná exponenciální funkce. Jestliže z povahy věci plyne, že se hodnota funkce změní a-krát, kdykoliv se hodnota nezávisle proměnné zvětší o jednotku (nebo o nějakou jinou, ale pevně danou hodnotu), potom lze k popisu dané situace použít exponenciální funkci o základu a (nebo jiném základu odvozeném od čísla a).

V tomto smyslu představuje exponenciální funkce analogii ke geometrické posloupnosti, ve které každý následující člen představoval q-násobek předchozího členu. Základ exponenciální funkce je potom analogií ke kvocientu geometrické posloupnosti.

Příklad 5.84

5.84. Cena nově koupeného automobilu činí $450\,000$ Kč. Každý rok klesne cena automobilu o $10\ \%$ vzhledem k hodnotě z předchozího roku. Popište tuto závislost ceny automobilu na době uplynulé od jeho koupě pomocí vhodného funkčního předpisu. Vypočtěte cenu vozidla po 2,5 letech, resp. 5 letech od nákupu.

Řešení: Hodnota konstanty K bude rovna $450\,000$ Kč, neboť se jedná o hodnotu funkce pro $t = 0$. Pokles o $10\ \%$ z dané hodnoty A vypočteme vynásobením této hodnoty číslem $0,9$. Je totiž

$$A - 0,1A = A(1 - 0,1) = A \cdot 0,9.$$

V každém následujícím roce (tj. v čase $t+1$) je cena $0,9$-násobkem ceny z předchozího roku (tj. v čase t). Základ a je tedy roven $a = 0,9$ a předpis funkce zní

$$P(t) = 450\,000 \cdot (0,9)^t,$$

kde $P(t)$ je cena automobilu po uplynutí t let po jeho zakoupení. Cenu po 2,5, resp. 5 letech vypočteme dosazením příslušných hodnot do funkčního předpisu.

$$\begin{aligned} P(2,5) &= 450\,000 \cdot 0,9^{2,5} \\ &= 450\,000 \cdot 0,768\,4334 \\ &= 345\,795 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P(5) &= 450\,000 \cdot 0,9^{5} \\ &= 450\,000 \cdot 0,590\,49 \\ &= 265\,720,5 \end{aligned}$$

Hodnota automobilu po 2,5, resp. 5 letech od nákupu činí 345 795 Kč, resp. 265 720 Kč.

Příklad 5.85

5.85. Moorův zákon je empirické pravidlo, které uvádí, že výkon počítačových procesorů se každých 18 měsíců zdvojnásobí. Popište toto pravidlo pomocí exponenciální funkce. Vypočtěte, kolikrát se zvětší výkon počítače za 45 měsíců v porovnání s výkonem v čase $t = 0$.

Řešení: Označme výkon v čase $t = 0$ symbolem P_0. Čas t budeme uvádět v měsících. Potom pro předpis funkce platí vztah

$$P(t) = P_0 \cdot 2^{t/18},$$

kde $P(t)$ je výkon PC po uplynutí doby t měsíců. Po uplynutí 18 měsíců je výraz v exponentu roven jedné a je

$$P(18) = P_0 \cdot 2^{18/18} = 2\,P_0.$$

Po uplynutí každých dalších 18 měsíců se výraz v exponentu vždy zvětší o jednotku a dojde ke zdvojnásobení hodnoty oproti době před 18 měsíci, viz

$$\begin{aligned} P(36) &= P_0 \cdot 2^{36/18} \\ &= P_0 \cdot 2^2 \\ &= 4\,P_0 \\ &= 2\,P(18) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P(54) &= P_0 \cdot 2^{54/18} \\ &= P_0 \cdot 2^3 \\ &= 8\,P_0 \\ &= 2\,P(36) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P(72) &= P_0 \cdot 2^{72/18} \\ &= P_0 \cdot 2^4 \\ &= 16\,P_0 \\ &= 2\,P(54). \end{aligned}$$

V čase $t = 45$ měsíců bude výkon počítače

$$\begin{aligned} P(45) &= P_0 \cdot 2^{45/18} \\ &= P_0 \cdot 2^{5/2} \\ &= P_0 \cdot \sqrt{2^5} \\ &= P_0 \cdot 4\sqrt{2} \\ &\doteq 5,66 \cdot P_0. \end{aligned}$$

Po uplynutí 45 měsíců vzroste výkon počítače na přibližně $5,66$-násobek původní hodnoty, tj. hodnoty v čase $t = 0$.

5.6.6 Modely využívající exponenciální funkce

V následující kapitole podrobněji rozebereme tři případy, kdy s pomocí exponenciální funkce můžeme modelovat různé úlohy z reálného prostředí. Jedná se o popis růstu populací, radioaktivní rozpad a složené úročení.

Růst populace Popisem růstu populace rozumíme vyjádření velikosti populace (počtu jejích prvků) v čase. Zřejmě nejjednodušším případem je popis růstu populace bakterií. Předpokládejme, že u jistého druhu bakterií probíhá množení tak, že se nově vytvořená bakterie rozdělí během 17 minut na dvě nové bakterie. Za tohoto předpokladu se každých 17 minut zdvojnásobí počet všech bakterií v sledované populaci. Počáteční velikost populace označíme symbolem N_0, jaký je potom počet bakterií $N(t)$ v čase t?

V krátkém období, ve kterém jsou vytvořeny předpoklady pro zdárný rozvoj bakterií, lze počet bakterií $N(t)$ popsat exponenciální funkcí

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{t/d}, \tag{5.53}$$

kde t je čas, N_0 je počet bakterií v čase $t = 0$ (tj. počet bakterií na počátku měření) a d je tzv. *čas zdvojení*, tj. čas, za který dojde k zdvojnásobení počtu bakterií. Podobným vztahem můžeme modelovat i růst lidské populace ve vybraných státech, populace některých druhů zvířat atd. Všimněte si, že pro $t = d$ je

$$N(d) = N_0 \cdot 2^{d/d} = N_0 \cdot 2^1 = 2N_0,$$

což skutečně ukazuje, že po uplynutí času d se velikost populace v uvedeném modelu zdvojnásobí.

Příklad 5.86

5.86. V roce 2000 žilo v Nigerii přibližně 111 milionu lidí a je odhadováno, že počet obyvatel země se zdvojnásobí přibližně za 20 let. Za předpokladu, že čas zdvojení je stále 20 let, vypočtěte (a zaokrouhlete na celé miliony)

a) kolik obyvatel žilo v Nigerii v roce 2010,

a) jaký počet obyvatel můžeme očekávat podle tohoto modelu v Nigerii v roce 2017?

Řešení: Rok 2000 pro nás představuje počátek „měření“, v tomto roce je tedy $t = 0$. V roce 2010 bude $t = 10$, analogicky pro rok 2017 je $t = 17$. Dosazením konkrétních hodnot do vzorce (5.53) vytvoříme model exponenciálního růstu ve tvaru

$$N(t) = 111 \cdot 2^{t/20}. \tag{5.54}$$

Dosazením hodnot $t = 10$ a $t = 17$ do funkčního předpisu (5.54) a následným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} N(10) &= 111 \cdot 2^{10/20} \\ &= 111 \cdot 2^{1/2} \\ &= 111 \cdot \sqrt{2} \\ &\doteq 157 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N(17) &= 111 \cdot 2^{17/20} \\ &= 111 \cdot \sqrt[20]{2^{17}} \\ &= 111 \cdot 1{,}8 \\ &\doteq 200. \end{aligned}$$

Podle vytvořeného modelu žilo v Nigerii v roce 2010 přibližně 157 milionu obyvatel. V roce 2017 by podle modelu měla velikost populace v Nigerii dosáhnout počtu 200 milionů obyvatel.[10])

Problém 5.86.1. V zásobnících teplé vody se nachází jistý druh bakterie. Předpokládejme, že doba zdvojení populace bakterie činí čtyři hodiny. Po chemickém čištění zůstalo v zásobníku celkem 1 000 bakterií. Za předpokladu, že doba zdvojení populace je stálá, vypočtěte množství bakterií

a) po dvou hodinách od čištění, b) po uplynutí 50 hodin.

Radioaktivní rozpad. V roce 1896 zjistil Henri Becquerel, že fotografický papír, podložený pod kouskem horniny zvané smolenec, zčerná, jako by byl osvětlen, přestože byl před světlem chráněný. Začal tento úkaz zkoumat a zjistil, že daná hornina vydává do té doby neznámý druh záření. Později se manželům Curiovým podařilo podat vysvětlení tohoto jevu a rozpracovat teorii radioaktivních materiálů. V takových látkách dochází k samovolnému rozpadu atomového jádra, přičemž se uvolňuje energie ve formě již zmíněného tzv. radioaktivního záření. S radioaktivními materiály se nyní setkáváme v mnoha odvětvích lidské činnosti. Lékařům pomáhají při léčení a diagnostice různých chorob, tvoří základ jaderné energetiky, používají se v palivových článcích pro satelitní družice, v požárních hlásičích atd.

Předpokládejme, že v čase $t = 0$ máme k dispozici množství N_0 určitého radioaktivního izotopu. Tento izotop je ovšem nestabilní, rozpadá se a přitom vyzařuje

[10]) Podle údajů UNFPA (the United Nations Population Fund) žilo v Nigerii v roce 2010 přibližně 158 milionu lidí, viz *http://www.unfpa.org/public/*. Na ověření věrohodnosti odhadu modelu pro rok 2017 si budeme muset ještě počkat.

radioaktivní záření. Tímto množství látky v čase t exponenciálně klesá. V praxi se k popisu rychlosti poklesu používá pojem *poločas rozpadu*. Tento termín vyjadřuje, za jak dlouho se množství látky sníží na polovinu původního stavu. K popisu množství látky v průběhu času tak můžeme použít model využívající poločas rozpadu ve tvaru

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/d} = N_0 \cdot 2^{-t/d}, \tag{5.55}$$

kde $N(t)$ je množství látky v čase t, N_0 je počáteční množství látky, tj. množství látky v čase $t = 0$ a konstanta d je poločas rozpadu dané látky. Stejně jako u růstu populace je vhodné si všimnout, že po uplynutí doby odpovídající poločasu rozpadu, tj. pro $t = d$ je

$$N(d) = N_0 \cdot 2^{-d/d} = N_0 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}\,N_0,$$

což potvrzuje, že podle tohoto modelu se množství látky skutečně sníží na polovinu původního stavu.

5.87. Pozitronová emisní tomografie (PET) je lékařské vyšetření z oboru nukleární medicíny, při kterém se do těla pacienta vpraví malé množství radioaktivního izotopu fluoru ^{18}F s poločasem rozpadu 110 minut. Předpokládejme, že na počátku máme k dispozici 100 miligramů uvedeného izotopu. Jaké množství této látky zůstane **Příklad 5.87**

a) po uplynutí 50 minut, b) po uplynutí 12 hodin.

Řešení: Vzhledem k tomu, že poločas rozpadu je uveden v minutách, musíme ve vzorci (5.55) obě doby vyjádřit také v minutách. Čas v úloze a) je již v minutách vyjádřen, v úloze b) platí, že 12 hodin odpovídá 720 minutám. Dosazením hodnot $t = 50$, resp. $t = 720$ do funkčního předpisu (5.55) a následným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} N(50) &= 100 \cdot 2^{-50/110} \\ &= 100 \cdot 2^{-5/11} \\ &= 100 \cdot 0,730 \\ &\doteq 73 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N(720) &= 100 \cdot 2^{-720/110} \\ &= 100 \cdot 2^{-72/11} \\ &= 100 \cdot 0,011 \\ &\doteq 1,1. \end{aligned}$$

Po uplynutí 50 minut se původní množství sníží na přibližně 73 miligramů, po uplynutí 12 hodin zůstane „pouze“ 1,1 miligramu látky.

Problém 5.87.1. Dalším často používaným izotopem v nukleární medicíně je metastabilní radionuklid technecium $^{99\mathrm{m}}$Tc s poločasem rozpadu 6 hodin. Je-li na počátku v čase $t = 0$ k dispozici 245 miligramů látky, vypočtěte její hmotnost

a) po uplynutí dvou hodin, b) po uplynutí jednoho dne.

Složené úročení. Naším dalším tématem zamíříme do oblasti financí. Při uložení peněz do banky nám banka zaplatí odměnu ve formě *úroku*. Velikost úroku většinou vyjadřujeme v procentech uložené částky a toto množství procent nazýváme *úrokovou mírou* (značíme symbolem r). Jestliže finance získané ve formě úroku opět uložíme do banky, je nám v příštím období připočten úrok z původně uložené částky a také úrok z již uložených úroků. Způsob připisování úroků, při kterém se velikost úroku vypočítává i z již přiznaných úroků, nazýváme *složené úročení*.

5.88. Na účet bylo vloženo $P = 25\,000$ Kč. Finanční prostředky na účtu jsou zhodnocovány úrokovou mírou $r = 1,6\ \%$. Pro zjednodušení předpokládejme, že z výnosu ve formě úroku nejsou odváděny daně. Kolik peněz bude na účtu po jednom, pěti, resp. deseti letech? **Příklad 5.88**

Řešení: Označme symbolem $P(0)$ původně vloženou částku, symbolem $P(1)$ částku po uplynutí jednoho roku spoření, tj. po přičtení prvního úroku atd. Obecně symbolem $P(t)$ budeme značit velikost uspořené částky po uplynutí t let.

Na konci prvního roku dostane střadatel ke svým uloženým penězům úrok u ve výši $1,6$ % vkladu, tedy

$$u = 25\,000 \cdot \frac{1,6}{100} = 400\,\text{Kč}.$$

Po uplynutí jednoho roku spoření bude mít na účtu původní vklad zvětšený o přičtený úrok

$$\begin{aligned}
P(1) &= P + u && \ldots \textit{ přičtení úroku} \\
&= 25\,000 + 25\,000 \cdot \frac{1,6}{100} && \ldots \textit{ číselné vyjádření úroku } u \\
&= 25\,000 \cdot \left(1 + \frac{1,6}{100}\right) && \ldots \textit{ vytknutí částky } 25\,000 \textit{ Kč} \\
&= 25\,000 \cdot 1,016 && \ldots \textit{ zjednodušení výrazu v závorce} \\
&= 25\,400.\ \text{Kč}. && \ldots \textit{ výsledná částka po roce spoření}
\end{aligned}$$

V předchozím výpočtu si povšimněte, že přičtení úroku ve výši $1,6$ % odpovídá vynásobení původní částky číslem $1,016$. Obecně, zvětšíme-li jistou částku o p procent, potom je nová částka rovna $(1 + p/100)$-násobku původního obnosu. Každý rok se tedy částka na účtu zvětší na 1,016-násobku z hodnoty v předchozím roce. Následující tabulka ukazuje, jak můžeme vypočítat budoucí hodnotu uložených peněz po t letech spoření. Z Tabulky 5.4 snadno nahlédneme, že platí následující vztahy.

čas t	0	1	2	3
budoucí hodnota $P(t)$	25 000	25 400	25 806,40	26 219,30
násobky	P	$P \cdot 1,016$	$P \cdot 1,016^2$	$P \cdot 1,016^3$

Tabulka 5.4: Přírůstání hodnoty $P(t)$ v čase t jako násobky čísla 1,016

$$\begin{aligned}
P(1) &= 25\,000 \cdot 1,016^1 = 25\,400,00\,\text{Kč}, \\
P(5) &= 25\,000 \cdot 1,016^5 = 27\,065,03\,\text{Kč}, \\
P(10) &= 25\,000 \cdot 1,016^{10} = 29\,300,64\,\text{Kč},
\end{aligned}$$

V tomto místě si opět připomeneme geometrickou posloupnost. Množství peněz na účtu v každém roce můžeme považovat za členy geometrické posloupnosti, kde prvním členem je hodnota $P(0) = 25\,000$ Kč a kvocientem posloupnosti je hodnota $q = 1,016$. Ze vzorce (5.29) na straně 248 potom snadno vyjádříme předpis pro výpočet $P(t)$ ve tvaru $P(t) = P \cdot (1.016)^t$. Je dobrým zvykem zapisovat uvedený vzorec ve tvaru

$$P(t) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t,$$

kde P je takzvaná *současná hodnota*, tedy množství peněz uložených v čase $t = 0$ ($P = 25\,000$), t je doba trvání vkladu a r je úroková míra (uvedená v procentech), tj. podíl velikosti úroku k částce, ze které se úrok vypočítává.

Nyní předpokládejme, že úroky se nepřipisují jednou ročně, ale jednou za tři měsíce (tj. čtyřikrát za rok) se k uložené částce připočte úrok daný čtvrtinou roční úrokové míry. Tato událost nastane celkem čtyřikrát za rok, budoucí hodnotu uložených peněz pak můžeme vypočítat ze vztahu

$$P(t) = P \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{100}\right)^{4t} = P \cdot \left(1 + \frac{r}{4 \cdot 100}\right)^{4t}.$$

Připomeňme, že roční úrokovou míru jsme zvyklí označovat symbolem $p.a.$ umístěným za tímto číslem, viz např. $r = 1,6\,\%\,p.a.$ Toto označení vzniklo z latinského *per annum* (za rok).

Definice 5.6.10. Složené úročení
Označme jednorázově investovanou částku (*současnou hodnotu investice*) symbolem P. Tato současná hodnota je investována na dobu t let s neměnnou roční úrokovou mírou r, celkem m-krát za rok je připočtena poměrná část úroku. Potom *budoucí hodnotu investice* vypočteme ze vztahu

$$P(t) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{m \cdot 100}\right)^{mt}. \tag{5.56}$$

Je-li tento úrok připočítáván jednou ročně, dostáváme vztah

$$P(t) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t}. \tag{5.57}$$

5.89. Investor uložil částku 75 000 Kč do investičního fondu a to na dobu pěti let. Fond garantuje, že v uvedeném období bude každý měsíc připisovat úroky ve výši $r = 7,2\,\%$ $p.a.$ Jaká je budoucí hodnota této investice za předpokladu, že investor bude každý měsíc reinvestovat připsané úroky? **Příklad 5.89**

Řešení: Ze zadání plyne $P = 75\,000$ Kč, $r = 7,2\,\%$, $m = 12$ a $t = 5$ let. Dosazením do vztahu (5.56) dostaneme

$$\begin{aligned} P(5) &= 75\,000 \cdot \left(1 + \frac{7,2}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot 5} \\ &= 75\,000 \cdot (1,006)^{60} \\ &\doteq 75\,000 \cdot 1,43179 \\ &\doteq 107\,384 \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Problém 5.89.1. Jak by se změnila budoucí hodnota investice z minulého příkladu, pokud by se úroky připočítávaly pouze

a) čtvrtletně, b) pololetně, b) jednou za rok?

5.6.7 Eulerovo číslo e

Při řešení Problému 5.89.1 jste jistě zaznamenali, že se zkracováním období mezi připisováním úroků roste budoucí hodnota investice. Z tohoto pohledu se pro investora zdá být výhodné, pokud se úrok připisuje co nejčastěji. Nyní budeme sledovat, co se stane, jestliže ve vzorci (5.56) necháme růst hodnotu m nade všechny meze. Bude budoucí hodnota investice také růst nade všechny meze?

Abychom mohli právě popsanou situaci rozebrat blíže, předpokládejme, že do banky uložíme 1 Kč na dobu jednoho roku s úrokovou mírou $r = 100\,\%\,p.a.$, kde úrok v poměrné výši připisujeme m-krát ročně. Dosazením uvedených hodnot do vzorce (5.56) dostaneme pro budoucí hodnotu po jednom roce trvání investice vztah

$$P(m) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}. \tag{5.58}$$

V Tabulce 5.5 jsou uvedeny hodnoty výnosů pro různá m. Uvedená tabulka naznačuje, že hodnota výrazu (5.58) neroste s rostoucím m nade všechny meze, ale blíží se k jisté hodnotě, kterou již nepřekročí. Tuto hraniční (limitní) hodnotu výrazu $(1 + 1/m)^m$ nazýváme *Eulerovo číslo* (někdy též *Eulerova konstanta*). Hodnotu této konstanty nelze vyjádřit přesně, je to iracionální číslo a spolu s Ludolfovým číslem π představuje jednu z nejvýznamnějších konstant používaných v matematické analýze. Pro označení tohoto

počet připsání m	1	2	10	100	1 000	1 000 000
výnos po roce $P(m)$	2	$2,25$	$2,59374$	$2,70481$	$2,71692$	$2,71828$

Tabulka 5.5: Zvyšování hodnoty výrazu $(1 + 1/m)^m$ s rostoucí hodnotou m

čísla používáme symbol e a přibližná hodnota zaokrouhlená na deset desetinných míst činí[11])

$$\mathrm{e} = 2,7182818284\ldots$$

Představme si situaci, že úrok přičítáme *spojitě*, tj. v každém časovém okamžiku dojde k přičtení poměrné části úroku. Takový způsob přičítání úroků nazýváme *spojité úročení*. Investice ve výši jedné koruny a při úrokové míře $r = 100\ \%$ se během jednoho roku zhodnotí na částku $P = 2,72$ Kč (zaokrouhleno na halíře).

Málokdy (spíš vůbec) se stane, aby investor ukládal jednu korunu na jeden rok při úrokové míře $r = 100\ \%$. V obecném případě s vloženou částkou P, roční úrokovou mírou r (pro zjednodušení budeme v následujícím výpočtu uvažovat tuto hodnotu již vydělenu stem - nebude tedy vyjádřená v procentech), dobou spoření t lze obecný vzorec pro spojité úročení odvodit z následujícího výpočtu.

$$\begin{aligned} P(t) &= P \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \\ &= P \cdot \left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{mt} \\ &= P \cdot \left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{(m/r)rt} \\ &= P \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{m/r}\right]^{rt} \end{aligned} \tag{5.59}$$

Pro velká m nabývá velkých hodnot i výraz m/r. Proto můžeme výraz

$$\left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{m/r}$$

pro velká m považovat za rovný číslu e a ve vzorci (5.59) jej takto nahradit. Tím dostaneme vzorec

$$P(t) = P \cdot \mathrm{e}^{rt}, \tag{5.60}$$

kde P je vložený obnos, t je doba trvání investice a r představuje roční úrokovou míru (po vydělení sty procenty).

Příklad 5.90

5.90. Investor vložil částku 20 000 Kč do podílového fondu, přičemž fond připisuje úroky ve výši 6 % $p.a.$, které připisuje spojitě. Vyjádřete, jakou hodnotu má investice v čase t a vypočtěte její výši po pěti letech od uložení.

Řešení: V uvedeném příkladu je úroková míra rovna šesti procentům, ve vztahu (5.60) musíme proto dosadit $r = 0,06$, uložená částka je $P = 20\,000$ Kč. Potom je

$$P(t) = 20\,000 \cdot \mathrm{e}^{0,06t}.$$

Budoucí hodnota investice po pěti letech bude rovna

$$\begin{aligned} P(5) &= 20\,000 \cdot \mathrm{e}^{0,06\cdot 5} \\ &= 20\,000 \cdot \mathrm{e}^{0,3} \\ &\doteq 26997,17\ \text{Kč}. \end{aligned}$$

Hodnotu investice v čase lze určit pomocí vztahu $P(t) = 20\,000 \cdot \mathrm{e}^{0,06t}$. Po pěti letech bude hodnota investice po zaokrouhlení na celé koruny rovna $p(5) = 26997$ Kč.

[11]) Není samozřejmě nutné si uvedenou hodnotu pamatovat na uvedený počet cifer. Pro běžné výpočty si stačí pamatovat přibližnou hodnotu $\mathrm{e} \doteq 2,72$

Problém 5.90.1. Investor vložil do podílového fondu částku 80 000 Kč. Jaká je výše této částky po 2,5 letech při roční úrokové míře 5 %, jestliže jsou úroky připisovány

a) každý měsíc složeným úročením, b) spojitým úročením.

Radiouhlíková metoda určování stáří. Radiouhlíková metoda pomáhá určovat přibližné stáří organických materiálů. Za objev této metody obdržel Američan WILLARD F. LIBBY (1908 - 1980) v roce 1960 Nobelovu cenu za chemii.

V ovzduší je běžně přítomen radioaktivní izotop uhlíku ^{14}C, který vzniká interakcí atmosférického dusíku s neutrony kosmického záření. Vzniklý radioaktivní uhlík se sloučí s kyslíkem a vzniká radioaktivní oxid uhličitý. Ten je přijímán všemi rostlinami na Zemi, a tím se izotop ^{14}C dostává do potravinového řetězce. Živé organizmy během svého života přijímají „obyčejný" uhlík i výše uvedený izotop a vzájemný poměr obou prvků je po dobu života daného organizmu stálý. Po smrti organizmu zůstává množství obyčejného uhlíku v jeho těle neměnné. Radioaktivní izotop ^{14}C se však začíná rozpadat a jeho množství v těle organizmu klesá s poločasem rozpadu 5 730 let. Ze zjištěného poměru ^{14}C ku ^{12}C lze potom určit přibližné stáří organizmu.

Předpokládejme, že v okamžiku úmrtí (přesněji: v okamžiku ukončení přijímání potravy) je v organizmu množství N_0 izotopu ^{14}C. Toto množství s přibývajícím časem klesá podle vztahu

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} && \ldots \textit{ viz vzorec (5.55)} \\ &= N_0 \cdot 2^{-t/5730} && \ldots \textit{ je } 1/2 = 2^{-1} \\ &= N_0 \cdot \left(2^{-1/5730}\right)^t && \ldots \textit{ použití vztahu } a^{bc} = \left(a^b\right)^c \\ &= N_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}000121t}. && \ldots \textit{ neboť } 2^{-1/5730} \doteq \mathrm{e}^{0{,}000121} \end{aligned} \tag{5.61}$$

kde $N(t)$ je množství látky za dobu t (v letech) od úmrtí organizmu.

5.91. Z poraženého stromu byl vyroben rám obrazu. Měřením bylo zjištěno, že obsahuje 200 miligramů radioaktivního izotopu ^{14}C. Vypočtěte množství této látky po uplynutí **Příklad 5.91**

a) 4 000 let, b) 30 000 let.

Řešení: Dosazením $N_0 = 200$ miligramů do rovnice (5.61) dostaneme vztah

$$N(t) = 200 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}000121t}.$$

Potom je

$$\begin{aligned} N(4\,000) &= 200 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}000121 \cdot 4\,000} & N(30\,000) &= 200 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}000121 \cdot 30\,000} \\ &= 200 \cdot 0{,}61631 & &= 200 \cdot 0{,}02652 \\ &= 123{,}26 \text{ miligramů}, & &= 5{,}30 \text{ miligramů}. \end{aligned}$$

Po uplynutí 4 000, resp. 30 000 let, zůstane v rámu obrazu $123{,}26$ miligramů, resp. $5{,}30$ miligramů izotopu ^{14}C.

V předchozím příkladu jsme použili důležitou exponenciální funkci, jejímž základem bylo Eulerovo číslo e, tj. funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$. Později uvidíme, že tato funkce má významnou roli v matematické analýze. Hodnoty této funkce se přímým výpočtem získávají „nesnadno". Lze je proto najít ať již v nejrůznějších matematických tabulkách nebo na kalkulátorech. Při výpočtu hodnot této funkce pomocí PC se v nejrůznějších programech často používá označení $f(x) = \exp(x)$. K přibližnému výpočtu hodnoty e^x byl nalezen vzorec

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{5.62}$$

kde výrazy $1!, 2!, \ldots n!$ představují faktoriály čísel $1, 2, \ldots n$. Pro upřesnění poznamenejme, že pro x blízká nule postačuje k dostatečně přesnému výpočtu relativně malý počet sčítanců. Pro x, která nejsou blízká nule, potřebujeme sečíst k dostatečně přesnému výpočtu velké množství sčítanců. Např. pro určení hodnoty e^1 s přesností jedné setiny potřebujeme sečíst prvních pět členů řady (5.62), pro určení hodnoty e^{10} s přesností jedné setiny již potřebujeme sečíst prvních 31 členů řady (5.62).

5.6.8 Logaritmická funkce

V předchozí kapitole jsme se zabývali různými exponenciálními modely. Přitom jsme si nepoložili některé důležité otázky.

a) Za jak dlouho vzroste velikost uvažované populace na trojnásobek původní velikosti?

b) Kolik úrokovacích období musí uplynout (tj. kolikrát se musí k původnímu vkladu přičíst úrok) k zdvojnásobení hodnoty původního vkladu?

c) Za jak dlouho se sníží množství radioaktivního materiálu na desetinu původní hodnoty?

K úspěšnému řešení těchto úloh budeme využívat takzvané logaritmy, resp. logaritmickou funkci.

Historická poznámka

Myšlenku logaritmů objevil JOHN NAPIER (1550-1617). Název *logaritmus* vznikl spojením dvou řeckých slov *logos* (poměr, smysl, výpočet) a *arithmos* (číslo). Slovo logaritmus tedy můžeme přeložit ve významu „výpočetní číslo“. K objevu logaritmů Napiera přivedla vlastnost exponenciální funkce $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. V Tabulce 5.6 jsou uvedeny některé mocniny čísla dvě. Nyní si představte, že chceme vypočítat součin $32 \cdot 128$. Potom platí následující výpočet.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

Tabulka 5.6: Některé přirozené mocniny čísla 2

$$
\begin{aligned}
32 \cdot 128 &= 2^5 \cdot 2^7 && \ldots \textit{ dané mocniny odečteme z tabulky} \\
&= 2^{5+7} && \ldots \textit{ použijeme pravidlo } 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} \\
&= 2^{12} && \ldots \textit{ sečteme hodnoty v exponentu} \\
&= 4\,096 && \ldots \textit{ hodnotu } 2^{12} \textit{ odečteme z tabulky}
\end{aligned}
$$

K číslům 32, resp. 128 jsme našli odpovídající čísla pět a sedm (tzv. logaritmy čísel 32 a 128), tyto jsme sečetli a z tabulky zjistili, které číslo má hodnotu logaritmu rovnu 12. To bylo právě číslo 4 096.

Všimněte si, že jediná početní operace, kterou jsme museli provést, bylo sčítání čísel 5 a 7. Tím jsme výpočet součinu dvou čísel převedli na součet dvou čísel a vyhledání příslušných hodnot v tabulkách. Možná se vám uvedené „zlepšení“ bude zdát nepodstatnou změnou. Představte si ovšem, že máte opakovaně násobit např. dvě pětimístná čísla. Pak takový postup ušetří mnoho času.

Tabulka 5.6 má ovšem jeden nedostatek. Je příliš „řídká“ v tom smyslu, že pokud bychom chtěli vypočítat součin např. $37 \cdot 83$, tak bychom odpovídající hodnoty v Tabulce 5.6 nenašli. Tento nedostatek můžeme obejít tím, že vyjádříme mocniny jiného čísla, například 1,01, resp. budeme přírůstky mocnin uvažovat po menších krocích než po jedné, například po setině. Takové tabulky byly v minulosti skutečně sestaveny a byly často používány.

Historická poznámka 5.6.11. Logaritmické tabulky vznikaly na přelomu šestnáctého a sedmnáctého století. Prvními autory byli skotský šlechtic JOHN NAPIER (1550 - 1617), švýcarský hodinář a počtář JOST BÜRGI (1552-1632) a anglický matematik HENRY BRIGGS (1561 - 1630). Z tohoto pohledu je zajímavé, že k významnému rozvoji logaritmů došlo i na území Čech. V době vlády císaře Rudolfa II. patřila Praha mezi nejvýznamnější evropská centra vzdělanosti. Pobývala zde řada osobností - dánský astronom TYCHO DE BRAHE (1546 - 1601), JOHANN KEPLER (1572 - 1630), který se po smrti Braheho stal dvorním hvězdářem Rudolfa II. a také Bürgi. Kepler při svém pražském pobytu zpracovával údaje o poloze nebeských těles a odvodil zde dva ze svých tří známých zákonů o pohybu nebeských těles. Bürgi prováděl složité astronomické výpočty pro Keplera. Kepler i Bürgi ke svým výpočtům používali tabulky logaritmů. Kepler používal Napierovy tabulky, Bürgi si své tabulky odvodil a v roce 1620 i vydal.

V dnešní době kalkulaček a osobních počítačů není samozřejmě nutné provádět podobné výpočty pomocí logaritmických tabulek. Význam logaritmů se tím ovšem nezmenšil. Logaritmy se stále používají při řešení úloh spojených s exponenciální funkcí. S jejich pomocí například vypočteme řešení úloh zmíněných v úvodu této kapitoly.

Příklad 5.92

5.92. V Tabulce 5.6 lze nalézt logaritmy k číslům $2, 4, 8, 16, \ldots$. Jsou jimi po řadě čísla $1, 2, 3, 4, \ldots$. Nyní si představte, že princip výpočtu logaritmu zůstal zachován, pouze jsou nyní v tabulce uvedeny mocniny čísla tři. Čemu by se potom rovnal logaritmus čísel $9, 81, 243, 2\,187$?

Řešení: Nejprve uvedeme tabulku s mocninami čísla tři. V druhém řádku tabulky na-

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^n	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561	19 683	59 049

Tabulka 5.7: Některé přirozené mocniny čísla 3

lezneme zadané hodnoty a v prvním řádku odečteme příslušné hodnoty logaritmů. Je $9 = 3^2$, proto je logaritmem čísla 9 číslo 2. Dále platí rovnost $243 = 3^5$, proto je logaritmem čísla 243 číslo 5 atd.

V Tabulce 5.6 bylo číslo tři logaritmem čísla osm, v Tabulce 5.7 bylo číslo tři logaritmem čísla 27. Hodnota logaritmu tedy závisí na základu a exponenciální funkce $f(x) = a^x$, ke které se vztahuje. Základ dané exponenciální funkce je roven i tzv. základu logaritmu. Připomeňme, že exponenciální funkce $f(x) = a^x$ byla definována pouze pro $a > 0, a \neq 1$. Nyní můžeme vyslovit definici logaritmické funkce.

Definice 5.6.12. Mějme proměnnou $x > 0$ a číslo a, které vyhovuje podmínkám $a > 0$ a současně $a \neq 1$. Funkci $f(x) = \log_a x$ nazýváme *logaritmickou funkcí* o základu a, je-li pro funkční hodnoty $f(x) = y$ je splněna podmínka

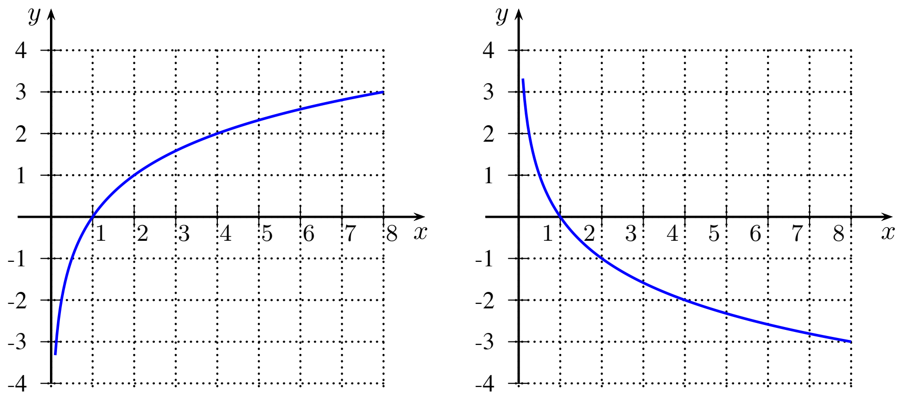
$$y = \log_a x \qquad \text{právě tehdy, když platí} \quad a^y = x. \tag{5.63}$$

Symbol $\log_3 27$, resp. $\log_5 x$ čteme „logaritmus čísla 27 při základu tři“, resp. „logaritmus x při základu pět“.

Vlastnosti logaritmické funkce

V Kapitole 5.3.6 na straně 235 jsme popsali pojem inverzní funkce. Podle rovnosti (5.63) v Definici 5.6.12 je logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$ inverzní funkcí k exponenciální funkci $f(x) = a^x$. Víme, že pro $\in (0, 1)$, resp. $a > 1$ je funkce $f(x) = a^x$ klesající, resp. rostoucí, proto bude funkce $f(x) = \log_a x$ pro $\in (0, 1)$, resp. $a > 1$ také klesající, resp. rostoucí funkcí. Logaritmická funkce je proto prostá na celém definičním oboru.

Ze vzájemné inverznosti obou uvedených funkcí také snadno odvodíme definiční obor a obor hodnot logaritmické funkce. Obor hodnot exponenciální funkce je roven množině $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Této množině tedy musí odpovídat i definiční obor logaritmické funkce. Logaritmy proto můžeme vypočítat pouze z kladných čísel. Definiční obor exponenciální funkce je roven množině $\mathbb{R}$ a tato množina je potom oborem hodnot logaritmické funkce.



(a) Graf logaritmické funkce $f(x) = \log_a x$ pro základ $a > 1$, zde je konkrétně uveden graf funkce $f(x) = \log_2 x$.

(b) Graf logaritmické funkce $f(x) = \log_a x$ pro základ $0 < a < 1$, zde konkrétně graf funkce $f(x) = \log_{0,5} x$.

Obrázek 5.37: Grafy logaritmické funkce pro $a > 1$, resp. $0 < a < 1$

Příklad 5.93

5.93. Vypočtěte hodnotu výrazu $\log_5 125$.

Řešení: Použitím vzorce (5.63) z Definice 5.6.12 vidíme, že ze vztahu $y = \log_5 125$ plyne rovnost $5^y = 125$.

$$\begin{aligned} 5^y &= 125 && \dots \textit{ plyne z definice logaritmické funkce} \\ 5^y &= 5^3 && \dots \textit{ neboť } 5^3 = 125 \\ y &= 3 && \dots \textit{ viz vzorec (5.51) na straně 278} \end{aligned}$$

Logaritmus 125 při základu 5 je roven třem, tedy $\log_5 125 = 3$.

Příklad 5.94

5.94. Vypočtěte hodnotu výrazu $\log_{16} 4$.

Řešení: Opět použijeme vzorec (5.63) a rovnost $y = \log_{16} 4$ zapíšeme ve tvaru $16^y = 4$. Potom je

$$\begin{aligned} 16^y &= 4 && \dots \textit{ plyne z definice logaritmické funkce} \\ 16^y &= 16^{1/2} && \dots \textit{ neboť } 4 = \sqrt{16} = 16^{1/2} \\ y &= \frac{1}{2}. && \dots \textit{ viz důsledek } u = v \textit{ plynoucí z předpokladu } a^u = a^v \end{aligned}$$

Hodnota logaritmu je neceločíselná a platí $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

Příklad 5.95

5.95. Vypočtěte hodnotu výrazu $\log_5 0,04$.

Řešení: Pomocí vzorce (5.63) převedeme rovnost $y = \log_5 0,04$ do tvaru $5^y = 0,04$. Potom platí

$$\begin{aligned} 5^y &= 0,04 && \dots \textit{ plyne z definice logaritmické funkce} \\ &= \frac{1}{25} && \dots \textit{ neboť } 0,04 = 1/25 \\ 5^y &= 5^{-2} && \dots \textit{ neboť } 1/25 = 5^{-2} \\ y &= -2. && \dots \textit{ opět viz důsledek } u = v \textit{ plynoucí z předpokladu } a^u = a^v \end{aligned}$$

Hodnota logaritmu vyšla záporná a platí $\log_5 0,04 = -2$.

Pomocí vztahu (5.63) můžeme zdůvodnit i následující rovnosti. Ve všech uvedených případech přitom předpokládáme, že $a > 0$, $a \neq 1$ a $x > 0$.

$$\log_a 1 = 0 \qquad \ldots \textit{ neboť } a^0 = 1 \tag{5.64}$$
$$\log_a a = 1 \qquad \ldots \textit{ neboť } a^1 = a \tag{5.65}$$
$$\log_a a^x = x \qquad \ldots \textit{ neboť } a^x = a^x \tag{5.66}$$

Rovnost (5.66) nám umožňuje vyjádřit řešení některých exponenciálních rovnic tak, že obě strany rovnice zlogaritmujeme pomocí logaritmu o stejném základu, jako je základ exponenciální funkce vyskytující se v rovnici. Tento postup využívá skutečnost, že pokud se sobě dvě čísla u a v rovnají, potom se rovnají i jejich logaritmy o společném základu. Vzhledem k tomu, že logaritmus je prostá funkce, platí i opačné tvrzení, tedy rovnají-li se hodnoty $\log_a u$ a $\log_a v$, potom se rovnají i čísla u a v.

5.96. Vyjádřete řešení rovnice $2^x = 55$ pomocí logaritmů. **Příklad 5.96**

Řešení: Řešení uvedené rovnice bychom snadno nalezli, pokud by se nám podařilo najít vyjádření čísla 55 ve tvaru mocniny čísla dva. Ovšem číslo 55 není celočíselnou mocninou dvou, a tak tento postup nemůžeme použít. Využijeme tedy možnost zlogaritmovat obě strany rovnice, a to logaritmem o základu dva.

$$\begin{aligned} 2^x &= 55 && \ldots \textit{zadání rovnice} \\ \log_2 2^x &= \log_2 55 && \ldots \textit{zlogaritmování obou stran rovnice} \\ & && \textit{logaritmem o základu dva} \\ x &= \log_2 55 && \ldots \textit{využití rovnosti } (5.66), \textit{ tj. } \log_2 2^x = x \end{aligned}$$

Je tedy $x = \log_2 55$.

Otázkou zůstává, jak přesněji určit hodnotu výrazu $\log_2 55$. K tomu nám pomohou některé další vlastnosti logaritmů.

pravidlo	*příklad*
$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_3(10 \cdot 15) = \log_3 10 + \log_3 15$
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\log_2\left(\frac{15}{7}\right) = \log_2(15) - \log_2(7)$
$\log_a b^x = x \log_a b$	$\log_3 \frac{1}{5} = \log_3 5^{-1} = -\log_3 5$
$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$, kde $c > 0, c \neq 1$	$\log_7 91 = \frac{\ln 91}{\ln 7} = \frac{\log 91}{\log 7}$

V poslední rovnosti pracujeme s funkcemi $\ln x$ a $\log x$. Výraz $\ln x$ nazýváme *přirozený logaritmus* čísla x a platí pro něj rovnost $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$. Jedná se tedy o logaritmus, jehož základem je Eulerovo číslo e. Inverzní funkcí k této funkci je exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$. Druhý výraz $\log x$ nazýváme *dekadický logaritmus* čísla x a platí pro něj vztah $\log x = \log_{10} x$. Jedná se tedy o logaritmus o základu 10. Oba tyto logaritmy představují často používané funkce a jejich hodnoty je možné najít v tabulkách nebo vyčíslit na kalkulačkách či v počítači. Poslední uvedená rovnost nám umožňuje vyjádřit hodnotu logaritmu o libovolném základu pomocí funkcí $\ln x$ a $\log x$. Ukázku použití naznačuje následující úloha.

5.97. Vyjádřete řešení rovnice $2^x = 55$. **Příklad 5.97**

Řešení: V předchozí úloze jsme našli řešení zadané rovnice ve tvaru $x = \log_2 55$. Nyní použijeme rovnost $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ k vyjádření řešení pomocí přirozeného, resp.

dekadického logaritmu a jeho dopočítání pomocí kalkulátoru.

$$\begin{aligned}
\log_2 55 &= \frac{\log 55}{\log 2} && \ldots\ \textit{výpočet pomocí dekadického logaritmu}\\
&\doteq \frac{1{,}740\,362}{0{,}301\,029} && \ldots\ \textit{výpočet pomocí kalkulátoru}\\
&\doteq 5{,}781 && \ldots\ \textit{vypočtená hodnota}\\
\log_2 55 &= \frac{\ln 55}{\ln 2} && \ldots\ \textit{výpočet pomocí přirozeného logaritmu}\\
&\doteq \frac{4{,}007\,333}{0{,}693\,147} && \ldots\ \textit{výpočet pomocí kalkulátoru}\\
&\doteq 5{,}781 && \ldots\ \textit{vypočtená hodnota}
\end{aligned}$$

Řešením rovnice $2^x = 55$ je $x = \log_2 55$. Přibližná hodnota tohoto logaritmu činí $x = 5{,}781$.

Příklad 5.98

5.98. Vyjádřete řešení rovnice $212 \cdot 14{,}25^{-t/12} = 1\,060$.

Řešení: Opět využijeme možnost zlogaritmovat obě strany rovnice. K tomuto kroku si můžeme vybrat logaritmus o jakémkoliv (definovaném) základu. Zvolíme logaritmus o základu e, tedy přirozený logaritmus.

$$\begin{aligned}
&212 \cdot 14{,}25^{-t/12} = 1\,060 && \ldots\ \textit{zadaná rovnice}\\
&\ln\left(212 \cdot 14{,}25^{-t/12}\right) = \ln 1\,060 && \ldots\ \textit{zlogaritmování obou stran rovnice}\\
&\ln 212 + \ln 14{,}25^{-t/12} = \ln 1\,060 && \ldots\ \textit{použití vztahu } \log_a x + \log_a y = \log_a xy\\
&\ln 14{,}25^{-t/12} = \ln 1\,060 - \ln 212 && \ldots\ \textit{algebraická úprava}\\
&\ln 14{,}25^{-t/12} = \ln\left(\frac{1\,060}{212}\right) && \ldots\ \textit{použití vztahu } \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

K tomuto výsledku jsme mohli dojít i rychleji, například vydělením obou stran rovnice číslem 212 hned na počátku výpočtu a následným zlogaritmováním obou stran rovnice. Po této poznámce budeme pokračovat ve výpočtu.

$$\begin{aligned}
-\frac{t}{12} \cdot \ln 14{,}25 &= \ln 5 && \ldots\ \textit{použití vztahu } \log_a b^x = x \log_a b\\
t &= -12 \cdot \frac{\ln 5}{\ln 14{,}25} && \ldots\ \textit{algebraická úprava}\\
t &\doteq -12 \cdot \frac{1{,}609\,438}{2{,}656\,757} && \ldots\ \textit{výpočet pomocí kalkulátoru}\\
t &\doteq -7{,}269 && \ldots\ \textit{algebraická úprava}
\end{aligned}$$

Rovnice $212 \cdot 14{,}25^{-t/12} = 1\,060$ má řešení, jehož hodnota činí přibližně $t = -7{,}269$.

Problém 5.98.1. Nalezněte řešení níže uvedených rovnic ve tvaru výrazu s logaritmy a vypočtěte přibližnou hodnotu těchto výrazů.

a) $3^x = 63$

b) $5 \cdot 4^x = 28$

c) $4^{3x+5} = 92$

d) $17 \cdot 2^{5-3x} = 223$

Již jsme zmínili, že exponenciální a logaritmická funkce o stejném základu jsou vzájemně inverzní funkce. Z definice inverzní funkce plyne, že složením dvou vzájemně inverzních funkcí vznikne identická funkce $y = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$. Je-li $f(x) = a^x$, potom je $f^{-1}(x) = \log_a x$ a pro všechna $x \in (0, \infty)$ platí

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = a^{\log_a x} = x.$$

Z uvedené rovnosti plynou některé další vzorce, např.

$$x = \mathrm{e}^{\ln x} \qquad \dots \textit{ pro všechna } x \in (0,\, \infty) \tag{5.67}$$

$$a^b = \mathrm{e}^{\ln\left(a^b\right)} = \mathrm{e}^{b\,\ln a}. \qquad \dots \textit{ pro všechna } a \in (0,\, \infty),\ b \in \mathbb{R} \tag{5.68}$$

Vzorec (5.68) nám pomáhá vyjádřit některé funkce pomocí jiného předpisu, který je vhodnější k výpočtům.

5.99. S pomocí vzorce (5.68) vyjádřete funkci $f(x) = x^{\sin x}$, kde $x \in (0,\, \infty)$, pomocí jiného předpisu. **Příklad 5.99**

Řešení: Dosazením do uvedeného vzorce dostaneme

$$x^{\sin x} = e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)} = e^{\sin x \ln x}.$$

Pro všechna $x > 0$ tedy platí $x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$.

Problém 5.99.1. Pomocí vzorce (5.68) nalezněte další možné předpisy zadaných funkcí.

a) $f(x) = x^x$ b) $f(x) = x^{\ln x}$

5.6.9 Modely využívající logaritmické funkce

Logaritmy jsou užitečné nejen k vyjádření řešení exponenciální rovnice. Často se s nimi můžeme setkat při popisu jevů s velkým rozsahem funkčních hodnot. Například intenzita nejtiššího zvuku, který může člověk zaznamenat (tj. uslyšet), je bilionkrát menší než intenzita zvuku, který již může trvale poškodit sluch. Logaritmy nám v tomto případě pomohou „zhustit" měřítko, ve kterém intenzitu měříme, do zvládnutelných mezí. Hodnota logaritmů se totiž mění velmi pomalu. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty dekadických a přirozených logaritmů vybraných násobků čísla deset.

n	$x = 10^n$	$\log x$	$\ln x$
1	10	1	2,303
3	1 000	3	6,908
6	1 000 000	6	13,816
9	1 000 000 000	9	20,723
12	1 000 000 000 000	12	27,631

Tabulka 5.8: Ukázka „pomalého" růstu logaritmů $\log x$ a $\ln x$

Weber-Fechnerův zákon Typickou ukázkou použití logaritmů je tzv. Weber-Fechnerův zákon, který uvádí vztah mezi intenzitou zvukového podnětu a intenzitou vjemu, který tento zvukový podnět v lidech vyvolá. Lidský organismus je úžasný (kromě jiného) v tom, jak je schopný rozlišovat změnu podnětu při jeho malé intenzitě (například spadnutí jehly v tiché místnosti), tak i při vysoké úrovni podnětů (hluk při startu letadla).

Možná si vzpomenete na známý fakt, že pokaždé, když hladina intenzity zvuku L vzroste desetkrát, říkáme, že hodnota L vzrostla o 10 dB. Je to dáno tím, že změnu intenzity vjemu ΔL vnímáme logaritmicky. Platí tedy vztah

$$\Delta L = L - L_0 = 10 \log \frac{I}{I_0}, \tag{5.69}$$

kde I_0 je intenzita zvuku, který v nás vyvolá vjem o intenzitě L_0, I je intenzita zvuku, který v nás vyvolá vjem o intenzitě L. Obvykle se hodnotou I_0 rozumí tzv. *práh slyšitelnosti* pro výšku (frekvenci) tónu 1 000 Hz, tj. minimální intenzita zvuku, kterou ještě „průměrné" lidské ucho vnímá. Pro uvedenou frekvenci tónu je $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ a odpovídající intenzita vjemu $L_0 = 0$ dB.

Příklad 5.100

5.100. Představme si, že intenzita zvuku se zvýšila stokrát, resp. milionkrát. O kolik decibelů se potom změnila hladina intenzity zvuku, tj. o kolik decibelů se změnil náš zvukový vjem?

Řešení: Nejprve se budeme zabývat stonásobným vzrůstem intenzity zvuku. Nechť I_0 je původní intenzita. Potom hodnota I je stokrát větší než I_0, tedy $I = 100 \cdot I_0$. Dosazením do vztahu (5.69) dostaneme

$$\begin{aligned}
\Delta L &= 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} && \dots \textit{ dosazení do vztahu (5.69)} \\
&= 10 \cdot \log \frac{100\, I_0}{I_0} && \dots \textit{ je } I = 100\, I_0 \\
&= 10 \cdot \log 100 && \dots \textit{ zkrácení } I_0 \textit{ ve zlomku} \\
&= 10 \cdot 2 && \dots \textit{ je } \log 100 = \log_{10} 100 = 2\textit{, neboť } 10^2 = 100 \\
&= 20 \text{ dB}
\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že intenzita zvuku se zvýšila milionkrát. Již rychleji tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}
\Delta L &= 10 \cdot \log \frac{1\,000\,000\, I_0}{I_0} && \dots \textit{ je } I = 100\, I_0 \\
&= 10 \cdot \log 1\,000\,000 && \dots \textit{ zkrácení } I_0 \textit{ ve zlomku} \\
&= 10 \cdot 6 && \dots \textit{ je } \log 1\,000\,000 = 6\textit{, neboť } 10^6 = 1\,000\,000 \\
&= 60 \text{ dB.}
\end{aligned}$$

Vzroste-li intenzita zvuku stokrát, resp. milionkrát, vzroste intenzita našeho zvukového vjemu o 20 dB, resp. o 60 dB.

Pro názornou představu uvedeme následující příklad.

Příklad 5.101

5.101. Předpokládejme dva zvukové signály, první s intenzitou zvuku $I_1 = 10^{-5}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, druhý s intenzitou $I_2 = 10^{-2}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. Zvýšíme hlasitost obou signálů o 10 dB a sledujeme, jak se v obou případech změní intenzita zvuku.

Řešení: Označme zadanou intenzitu zvuku v obou případech symbolem I_i. Po zvýšení intenzity vjemu o 10 dB vzroste intenzita zvuku na hodnotu I.

$$\begin{aligned}
\Delta L &= 10 \cdot \log \frac{I}{I_i} && \dots \textit{ dosazení do vzorce} \\
10 &= 10 \cdot \log \frac{I}{I_i} && \dots \textit{ intenzita vjemu se změnila o } \Delta L = 10 \textit{ dB} \\
1 &= \log \frac{I}{I_i} && \dots \textit{ algebraická úprava} \\
10 &= \frac{I}{I_i} && \dots \textit{ neboť } 10^1 = I/I_i \\
I &= 10\, I_i && \dots \textit{ algebraická úprava}
\end{aligned}$$

V obou případech tedy zvýšení hlasitosti o 10 dB vede k desetinásobnému zvětšení intenzity zvuku. V prvním případě hodnota I vzrostla na $I = 10^{-4}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, tedy o $\Delta I = 10^{-4} - 10^{-5} = 0{,}000\,09\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. V druhém případě hodnota I vzrostla na $I = 10^{-1}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, tedy o $\Delta I = 10^{-1} - 10^{-2} = 0{,}09\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. Zatímco náš vjem se v obou případech změnil stejně (o 10 dB), ve skutečnosti se intenzita zvuku zvýšila druhém případě tisíckrát více než v prvním případě.

Tuto situaci si můžete představit i pomocí jiných než akustických veličin. Představte si, že v ruce držíte závaží o hmotnosti 20 gramů a přidáte další závaží o stejné hmotnosti. Potom přírůstek hmotnosti budete vnímat úplně jinak, než pokud byste v ruce drželi závaží o hmotnosti 10 kg a někdo vám přidal opět závaží s hmotností 20 gramů. V druhém případě si přidaného závaží možná ani nevšimnete. Z toho plyne, že i pro vnímání hmotnosti platí Weber-Fechnerův zákon.

Richterova stupnice. Se vzorcem analogickým k (5.69) se můžeme setkat v řadě dalších veličin, které mají obrovský rozsah možných funkčních hodnot. V roce 1935 například americký seismolog CHARLES RICHTER (1900-1985) navrhl logaritmickou stupnici pro vyjadřování intenzity zemětřesení. Od té doby vyjadřujeme sílu zemětřesení ve stupních m Richterovy stupnice, přičemž velikost tohoto stupně vypočítáme ze vztahu

$$m(E) = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}, \tag{5.70}$$

kde E je energie uvolněná během zemětřesení (měřená v joulech) a E_0 je energie uvolněná při velmi malém referenčním zemětřesení, jejíž velikost byla stanovena na úroveň $E_0 = 10^{4,4} = 2,51 \cdot 10^4$ joulu.

Příklad 5.102

5.102. Za nejsilnější zemětřesení v novodobé historii lidstva se udává zemětřesení v Chile z roku 1960. Tehdy se v ohnisku zemětřesení uvolnila energie o velikosti $E \doteq 4,1 \cdot 10^{18}$ joulu. Vypočtěte, jakému stupni Richterovy stupnice toto zemětřesení odpovídalo.

Řešení: Je $E \doteq 4,1 \cdot 10^{18}$ J, $E_0 = 2,5^4$ J. Dosazením do vztahu (5.70) dostaneme

$$\begin{aligned} m(E) &= \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0} = \frac{2}{3} \log \frac{4,1 \cdot 10^{18}}{2,5 \cdot 10^4} = \frac{2}{3} \log(1,64 \cdot 10^{14}) \\ &= \frac{2}{3} (\log 1,64 + \log 10^{14}) = \frac{2}{3} (0,21 + 14) = 9,47. \end{aligned}$$

Zemětřesení v Chile mělo sílu přibližně 9,5 stupňů Richterovy stupnice.

Investování: za jakou dobu...? Logaritmická funkce nám umožňuje vypočítat dobu, za kterou vzroste hodnota vkladu na požadovanou úroveň.

Příklad 5.103

5.103. Investor nakoupil španělské dluhopisy s úrokovou mírou $r = 6,3\,\%$ *p.a.* Za jak dlouho vzroste původně investovaná částka $P_0 = 1\,000$ na hodnotu $1\,500$, jestliže připisování úroků probíhá složeným úročením každý měsíc?

Řešení: Dosazením hodnot $P_0 = 1\,000$, $P(t) = 1\,500$, $r = 6,3\,\%$ a $m = 12$ do vztahu (5.56) na straně 283 dostaneme

$$\begin{aligned} P(t) &= P \cdot \left(1 + \frac{r}{m \cdot 100}\right)^{mt} && \textit{... vzorec (5.56)} \\ 1\,500 &= 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{6,3}{12 \cdot 100}\right)^{12t} && \textit{... dosazení hodnot do vzorce (5.56)} \\ 1\,500 &= 1\,000 \cdot (1,00525)^{12t} && \textit{... úprava v základu mocniny} \\ 1,5 &= (1,00525)^{12t} && \textit{... algebraická úprava} \\ \ln(1,5) &= \ln\left((1,00525)^{12t}\right) && \textit{... zlogaritmování obou stran rovnice} \\ \ln(1,5) &= 12t \cdot \ln(1,00525) && \textit{... použití vztahu } \ln A^B = B \ln A \\ t &= \frac{1}{12} \cdot \frac{\ln 1,5}{\ln 1,00525} && \textit{... algebraická úprava} \\ t &\doteq 6,45. && \textit{... výpočet pomocí kalkulátoru} \end{aligned}$$

Ke zvýšení hodnoty z 1 000 na 1 500 dojde přibližně za 6,5 roku.

Problém 5.103.1. Investor vložil do podílového fondu částku 80 000 Kč. Za jakou dobu dojde k zdvojnásobení hodnoty vkladu

a) při roční úrokové míře $4\,\%$, jestliže jsou úroky připisovány každý měsíc složeným úročením,

b) při roční úrokové míře $2,5\,\%$, jestliže jsou úroky připisovány spojitým úročením?

Populační růst: za jak dlouho ...? V Příkladu 5.86 jsme se snažili najít odpověď na otázku, jak velká bude populace po jisté době. Konkrétně, kolik obyvatel bude žít v Nigérii v roce 2010, resp. 2017. V této části si ukážeme, jak lze najít řešení opačné úlohy, tedy jak lze za daných podmínek vypočítat za jakou dobu populace změní svou velikost na zadanou hodnotu.

Příklad 5.104

5.104. V Příkladu 5.86 jsme počet obyvatel v Nigérii vyjádřili pomocí funkce

$$N(t) = 111 \cdot 2^{t/20},$$

kde $N(t)$ je počet obyvatel v čase t (prosinec roku 2000 považujeme za $t = 0$). Vypočtěte, v kterém roce bude mít Nigérie podle tohoto modelu právě 135 milionů obyvatel.

Řešení: Víme, že počet obyvatel $N(t)$ v hledaném čase t má být roven 135 milionům. Dosazením této hodnoty do funkčního předpisu (5.54) a následným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned}
N(t) &= 111 \cdot 2^{t/20} && \text{\dots } \textit{použití vzorce } (5.54)\\
135 &= 111 \cdot 2^{t/20} && \text{\dots } \textit{dosazení známých hodnot}\\
\frac{135}{111} &= 2^{t/20} && \text{\dots } \textit{algebraická úprava}\\
\log_2\left(\frac{135}{111}\right) &= \frac{t}{20} && \text{\dots } \textit{zlogaritmování obou stran rovnice}\\
t &= 20 \cdot \log_2\left(\frac{135}{111}\right) && \text{\dots } \textit{algebraická úprava}\\
t &= 20 \cdot \frac{\ln\left(\frac{135}{111}\right)}{\ln 2} && \text{\dots } \textit{použití vztahu } \log_a x = \tfrac{\ln x}{\ln a}\\
t &\doteq 5,65 \text{ roků} && \text{\dots } \textit{výpočet pomocí kalkulátoru}\\
t &\doteq 67,8 \text{ měsíců.} && \text{\dots } \textit{převedení výsledku na měsíce}
\end{aligned}$$

Počtu 135 milionů obyvatel Nigérie dosáhla podle výše uvedeného modelu po přibližně 68 měsících od prosince roku 2000, tedy v srpnu roku 2006.

Problém 5.104.1. Vypočtěte, ve kterém roce bude žít v Nigérii podle výše uvedeného modelu

a) 180 milionů obyvatel, b) 250 milionů obyvatel?

Poločas rozpadu V kapitole **5.6.7** jsme se setkali s metodou určování stáří organických předmětů pomocí radiouhlíkové metody. V této části učebnice si ukážeme, jak lze řešit některé úlohy spojené s touto metodou pomocí logaritmické funkce.

Příklad 5.105

5.105. Množství izotopu uhlíku ^{12}C v mrtvém organickém materiálu v čase klesá a jeho hmotnost lze vyjádřit pomocí vztahu (viz vzorec 5.61 na straně 285)

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-0,000121t},$$

kde $N(t)$ je množství látky v čase t a N_0 je počáteční množství látky na počátku měření (tj. v čase $t = 0$). Vypočtěte poločas rozpadu izotopu uhlíku ^{12}C.

Řešení: Chceme zjistit dobu t, za kterou klesne hodnota $N(t)$ na polovinu původního množství N_0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,N_0 &= N_0 \cdot \mathrm{e}^{-0,000121t} && \dots \textit{ neboť } N(t) = \tfrac{1}{2}\,N_0\\
\frac{1}{2} &= \mathrm{e}^{-0,000121t} && \dots \textit{ vydělení obou stran rovnice výrazem } N_0\\
\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -0,000121t && \dots \textit{ zlogaritmování obou stran rovnice}\\
t &= -\frac{1}{0,000121}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) && \dots \textit{ algebraická úprava}\\
t &\doteq 5\,728,49
\end{aligned}$$

Poločas rozpadu izotopu uhlíku ^{12}C činí přibližně 5 728 let. Tento výsledek musí být samozřejmě v souladu s údaji v kapitole 5.6.7.

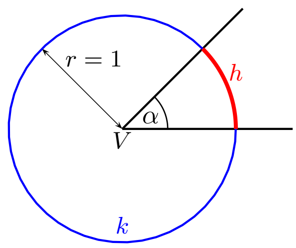
Problém 5.105.1. Ponechme zadání z Příkladu 5.105 a vypočtěte, za jak dlouho se rozpadne 95 % z původního množství této radioaktivní látky.

5.7 Goniometrie

V přírodě i ve společnosti se setkáváme s řadou pravidelně se opakujících jevů či událostí. V Kapitole 5.3.4 jsme zavedli pojem periodické funkce, která nám umožňuje některé tyto opakující se jevy popsat. Jedny z nejjednodušších periodických funkcí jsou tzv. goniometrické funkce. Slovo goniometrie pochází z řečtiny a znamená *měření úhlů*. Nejprve si tedy připomeneme některé vlastnosti úhlů.

5.7.1 Úhly a jejich vlastnosti

Připomeňme, že rovinným úhlem (dále jen úhlem) rozumíme plochu vymezenou dvěma polopřímkami se společným počátkem. Tento společný počátek polopřímek nazýváme vrchol úhlu. Úhly je zvykem označovat malými písmeny řecké abecedy. Velikost úhlu vyjadřujeme ve stupních, nebo pomocí obloukové míry v radiánech. Připomeňme, co znamená vyjádření velikosti úhlu v obloukové míře. Mějme dán úhel α a kružnici k o poloměru $r = 1$ a se středem ve vrcholu V úhlu α. Úhel α vytkne na kružnici k oblouk h. Délka oblouku h potom představuje velikost úhlu v obloukové míře.



Ze vzorce pro obvod kružnice $O = 2\pi r$ snadno odvodíme, že velikost plného úhlu činí $\alpha = 2\pi$. Správně bychom měli psát i jednotky velikosti, tj. výsledek zapsat ve tvaru $\alpha = 2\pi\,\mathrm{rad}$. Nicméně, pokud je zřejmé, že pracujeme s obloukovou mírou, je zvykem jednotku rad vynechat. Dále snadno odvodíme, že velikost přímého úhlu je polovina z velikosti plného úhlu, tj. $\alpha = \pi$. V Tabulce 5.9 uvádíme pro srovnání vybrané úhly a jejich velikost vyjádřenou ve stupních i v obloukové míře. Z rovnosti

α	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\alpha\,$[rad]	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabulka 5.9: Převodní tabulka mezi velikostí vybraných úhlů

$180° = \pi$ snadno odvodíme vztah pro převod velikosti úhlů ze stupňů do obloukové míry ve tvaru

$$\alpha\,[\mathrm{rad}] = \frac{\pi\cdot\alpha\,[\,°]}{180}, \tag{5.71}$$

kde symbol $\alpha\,[\mathrm{rad}]$ znamená velikost úhlu v obloukové míře a $\alpha\,[°]$ představuje velikost úhlu ve stupních.

Příklad 5.106

5.106. Vyjádřete v obloukové míře úhly o velikosti

a) $120°$ b) $210°$ c) $300°$

Řešení: Hledané hodnoty nalezneme dosazením do vzorce (5.71). Je

a) $\alpha = \dfrac{\pi \cdot 120}{180} = \dfrac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad}$ b) $\alpha = \dfrac{\pi \cdot 210}{180} = \dfrac{7\pi}{6}\,\mathrm{rad}$ c) $\alpha = \dfrac{\pi \cdot 300}{180} = \dfrac{5\pi}{3}\,\mathrm{rad}$

Opačnou úlohu vyjádření úhlů v obloukové míře pomocí stupňů vyřešíme většinou snadno použitím známe rovnosti $\pi = 180°$.

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{11 \cdot 180°}{6} = 11 \cdot 30° = 330°$$

Příklad 5.107

5.107. Vyjádřete ve stupních velikost následujících úhlů zadanou v obloukové míře.

a) $\frac{5\pi}{6}\,\mathrm{rad}$ b) $\frac{9\pi}{2}\,\mathrm{rad}$ c) $3\,\mathrm{rad}$

Řešení:

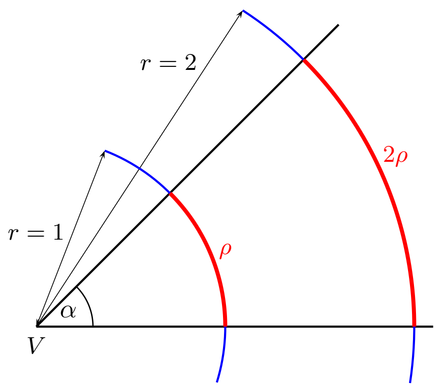
a) $\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{5 \cdot 180°}{6} = 5 \cdot 30° = 150°$

b) $\dfrac{9\pi}{2} = \dfrac{9 \cdot 180°}{2} = 9 \cdot 90° = 810°$

c) V této části využijeme rovnost $\pi = 180°$ ve tvaru $1 = 180°/\pi$. Potom je

$$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \frac{180°}{\pi} \doteq \frac{540°}{3,14} \doteq 172°.$$

Způsob, kterým byla zavedena velikost úhlu v obloukové míře, nám umožňuje vypočítat délku kruhového oblouku, známe-li úhel, pod kterým tento oblouk vidíme, a vzdálenost od vrcholu úhlu k danému oblouku. Z Obrázku 5.38 snadno vyčteme, že



Obrázek 5.38: Délka oblouku v obloukové míře

délku oblouku vypočteme ze vztahu

$$\rho = r \cdot \alpha, \tag{5.72}$$

kde ρ představuje délku kruhového oblouku, který má od vrcholu V vzdálenost r a z vrcholu V jej vidíme pod úhlem α.

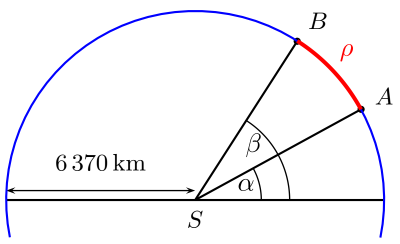
Příklad 5.108

5.108. Dvě města A a B se nacházejí na stejném poledníku, město A leží na zeměpisné výšce $\alpha = 30°$, město B leží na zeměpisné výšce $\beta = 60°$. Jaká je vzdálenost obou měst A a B, předpokládáme-li, že Země je kulatá a její poloměr činí $R = 6\,370\,\mathrm{km}$?

Řešení: Vzdálenost obou měst odpovídá délce kruhového oblouku ρ. Úhel, pod kterým jsou obě města vidět ze zemského středu, je roven $\beta - \alpha$. Podle vzorce (5.72) potom je

$$
\begin{aligned}
\rho &= R\cdot(\beta-\alpha) && \ldots\ \textit{dosazení do vzorce (5.72)}\\
&= 6\,370\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) && \ldots\ \textit{vyjádření úhlů v obloukové míře}\\
&= 6\,370\cdot\frac{\pi}{6} && \ldots\ \textit{výpočet rozdílu obou úhlů}\\
&\doteq 6\,370\cdot\frac{3,14}{6} && \ldots\ \textit{dosazení } \pi \doteq 3,14\\
&\doteq 3\,333,63.
\end{aligned}
$$

Vzdálenost obou měst činí přibližně $3\,333,63\,\mathrm{km}$.

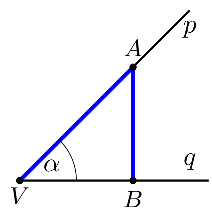


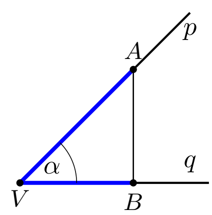
Obrázek 5.39: Vzdálenost dvou měst na stejném poledníku

Problém 5.108.1. Jaká je vzdálenost obou měst z předchozí úlohy, jestliže zeměpisná šířka města A, resp. B, činí $\alpha = 45°$, resp. $\beta = 52°$. Ostatní předpoklady z Příkladu 5.108 zůstávají beze změny.

5.7.2 Goniometrické funkce

V této části si připomeneme některé vlastnosti tzv. goniometrických funkcí. Tyto funkce patří mezi transcendentní funkce a jejich hodnoty nalezneme buď v tabulkách, kalkulátorech, nebo v počítačích s příslušným softwarem. Možností zavedení goniometrických funkcí je celá řada. Některé z nich si připomeneme.





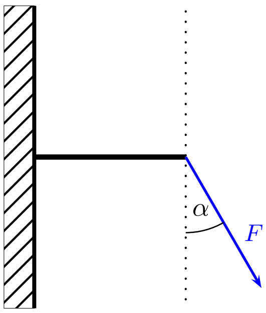
Uvažujme dvě polopřímky p, q se společným vrcholem V, které spolu svírají úhel α. Na polopřímce p zvolíme bod A. Z tohoto bodu vedeme kolmici k polopřímce q. Průsečík této kolmice s polopřímkou q označíme jako bod B. Z podobnosti příslušných trojúhelníků $\triangle ABV$ plyne, že poměr délek úseček $|AV|$ a $|AB|$ je při neměnném úhlu α stále stejný, ať již bod A leží kdekoli na polopřímce p. Podíl $\dfrac{|AB|}{|AV|}$ nazýváme *sinem* úhlu α. Stejně tak bude mít při neměnné hodnotě α stále stejnou hodnotu i podíl $\dfrac{|BV|}{|AV|}$ (při jakékoliv poloze bodu A na polopřímce p). Tento podíl nazýváme *kosinem* úhlu α.

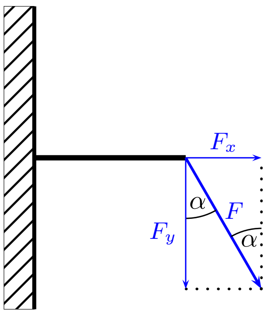
Body A, B a V společně vytvářejí vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Připomeňme, že v pravoúhlém trojúhelníku nazýváme stranu ležící proti pravému úhlu *přepona* a strany, které spolu svírají pravý úhel, nazýváme *odvěsnami*. Odvěsny dále rozlišujeme podle toho, proti kterému úhlu v trojúhelníku leží. Pro daný úhel α v pravoúhlém trojúhelníku nazýváme odvěsnu, která leží proti tomuto úhlu, *protilehlou odvěsnou*. Odvěsnu, která tvoří rameno daného úhlu, nazýváme *přilehlou odvěsnou*. Pomocí těchto pojmů pak můžeme definovat sinus, resp. kosinus úhlu α v pravoúhlém trojúhelníku následujícím způsobem.

Definice 5.7.1. *Sinus* úhlu α značíme symbolem $\sin\alpha$ a jeho velikost je rovna podílu délky protilehlé odvěsny ku délce přepony. *Kosinus* úhlu α označujeme symbolem $\cos\alpha$ a jeho velikost je rovna podílu délky přilehlé odvěsny ku délce přepony.

Právě uvedené definice se často používají například ve stavitelství, fyzice, geodezii atd., kde s jejich pomocí řešíme úlohy související s rozkladem vektorových veličin (síly, rychlosti, …).

Příklad 5.109





5.109. Do zdi je vetknutý nosník, na nějž pod úhlem $\alpha = 30°$ působí síla o velikosti $F = 500\,\mathrm{N}$. Vypočtěte, jak velká síla působí na nosník v kolmém a svislém směru.

Řešení: Označme sílu působící ve vodorovném směru symbolem F_x a sílu ve svislém směru symbolem F_y. Nejprve vypočteme velikost síly F_x. V pravoúhlém trojúhelníku, jehož přeponou je síla F a odvěsnou je síla F_x, leží úhel α proti straně F_x. Tato strana trojúhelníku je tedy protilehlou odvěsnou.

$$\begin{aligned}
\frac{F_x}{F} &= \sin\alpha && \dots\ \textit{plyne z definice funkce sinus}\\
F_x &= F\cdot\sin\alpha && \dots\ \textit{algebraická úprava}\\
F_x &= 200\cdot\sin(30°) && \dots\ \textit{dosazení konkrétních hodnot}\\
F_x &= 200\cdot\frac{1}{2} && \dots\ \textit{je } \sin 30° = \tfrac{1}{2}\\
F_x &= 100
\end{aligned}$$

Podobně budeme postupovat i v případě svislé složky síly F. V pravoúhlém trojúhelníku, jehož přeponou je síla F, odvěsna F_y tvoří jedno z ramen úhlu α. Tato strana trojúhelníku je tedy přilehlou odvěsnou.

$$\begin{aligned}
\frac{F_y}{F} &= \cos\alpha && \dots\ \textit{plyne z definice funkce kosinus}\\
F_y &= F\cdot\cos\alpha && \dots\ \textit{algebraická úprava}\\
F_y &= 200\cdot\cos(30°) && \dots\ \textit{dosazení konkrétních hodnot}\\
F_y &= 200\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 200\cdot 0{,}866 && \dots\ \textit{je } \cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}866\\
F_y &\doteq 173{,}2
\end{aligned}$$

Připomeňme, že hodnoty $\sin 30°$, resp. $\cos 30°$, lze najít v příslušných tabulkách, resp. kalkulátorech či počítačích s příslušným SW.

Vodorovná složka síly F má velikost $100\,\mathrm{N}$, svislá složka síly F má velikost přibližně $173\,\mathrm{N}$.

Problém 5.109.1. Žebřík o délce $5\,\mathrm{m}$ je opřen o dům, přičemž svírá se zemí úhel $72\,°$. Vypočtěte

a) v jaké výšce je žebřík opřen o dům,

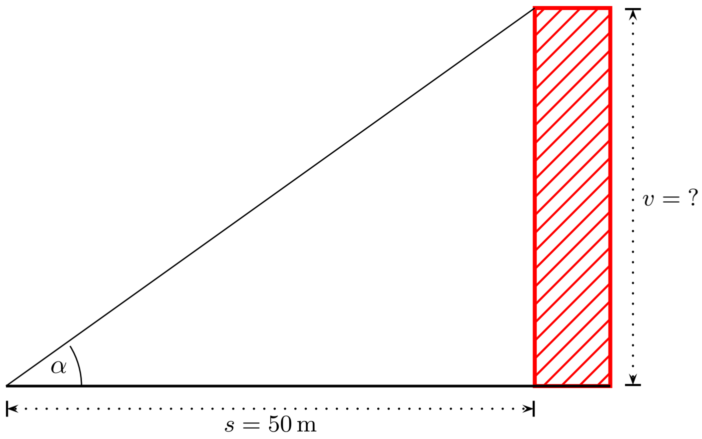
b) v jaké vzdálenosti od domu je žebřík opřen o zem.

Podobným způsobem lze použít podíly délek zbývajících stran v trojúhelníku k definici goniometrických funkcí tangens a kotangens.

Definice 5.7.2. *Tangens* úhlu α značíme symbolem $\operatorname{tg}\alpha$ a jeho velikost je rovna podílu délky protilehlé odvěsny ku délce přilehlé odvěsny. *Kotangens* úhlu α označujeme symbolem $\operatorname{cotg}\alpha$ a jeho velikost je rovna podílu délky přilehlé odvěsny ku délce protilehlé odvěsny.

Příklad 5.110

5.110. Jak vysoká je rozhledna, vidíme-li její vrchol ze vzdálenosti $s = 50\,\mathrm{m}$ pod úhlem $\alpha = 31°$?



Obrázek 5.40: Výška rozhledny

Řešení: Situace je zobrazena na Obrázku 5.40. Pomocí stran s a v lze definovat pravoúhlý trojúhelník, ve kterém strana s představuje přilehlou odvěsnu k úhlu α a strana v je protilehlou odvěsnou k úhlu α. Z definice funkce tangens potom plynou následující rovnosti.

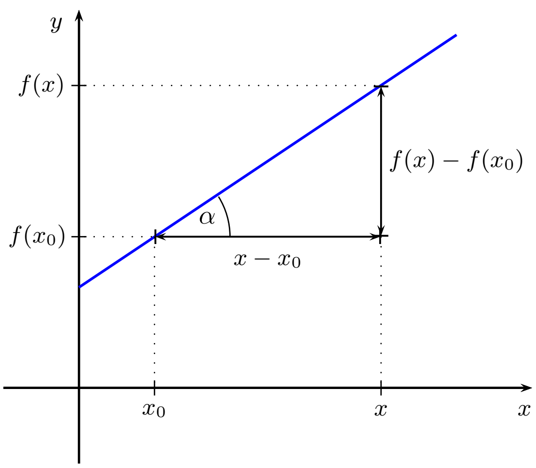
$$\begin{aligned}\frac{v}{s} &= \operatorname{tg}\alpha\\ v &= s\cdot\operatorname{tg}\alpha\\ v &= 50\cdot\operatorname{tg}31^\circ\\ v &\doteq 50\cdot 0,6\\ v &= 30\end{aligned}$$

Hodnotu $\operatorname{tg}31^\circ \doteq 0,6$ lze opět najít například v příslušných tabulkách. Rozhledna je vysoká přibližně 30 metrů.

V Kapitole 5.6.2 na straně 253 jsme se zabývali směrnicí k lineární funkce $f(x) = kx + q$. Odvodili jsme přitom vztah

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{5.73}$$

Výraz na pravé straně rovnosti 5.73 nám nyní ukazuje další možný význam. Na Ob-

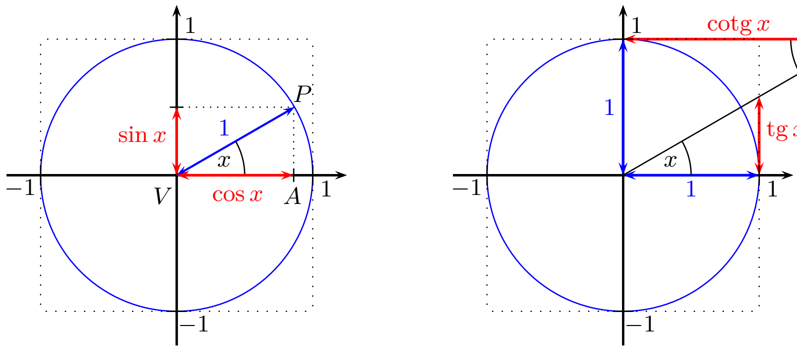


Obrázek 5.41: Souvislost směrnice lineární funkce a funkce tangens

rázku 5.41 odpovídá rozdíl $f(x) - f(x_0)$ délce protilehlé odvěsny k úhlu α, rozdíl

$x - x_0$ odpovídá délce odvěsny přilehlé k úhlu α. Podíl těchto délek je pak roven hodnotě funkce tangens úhlu α.

Pro představu o hodnotách goniometrických funkcí v závislosti na hodnotě argumentu je vhodné uvést definici goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice. Na Obrázku 5.42(a) je zobrazena jednotková kružnice (kružnice o poloměru $r = 1$) a



(a) Zobrazení hodnot funkcí sinus a kosinus pro daný úhel x

(b) Zobrazení hodnot funkcí tangens a kotangens pro daný úhel x

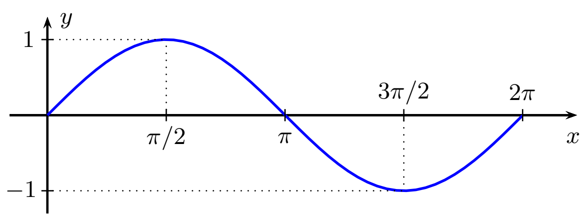
Obrázek 5.42: Definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice

úhel x. Rameno úhlu x protíná kružnici v bodě P. Z bodu P je spuštěna kolmice na vodorovnou osu. Tato kolmice protíná vodorovnou osu v bodě A. Tím vznikl pravoúhlý trojúhelník VAP. Strana VP je přeponou, PA je protilehlou odvěsnou a VA je přilehlou odvěsnou k úhlu x. Sinus úhlu x tak vypočteme pomocí vztahu

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{|PA|}{|PV|} && \ldots \textit{ viz definice funkce sinus} \\ &= \frac{|PA|}{1} && \ldots \textit{ neboť } |PV| = 1 \\ &= |PA|, \end{aligned}$$

kde symbol $|PA|$, resp. $|PV|$, označuje délku stran PA, resp. PV. Velikost hodnoty funkce $\sin x$ proto můžeme graficky znázornit pomocí délky úsečky PA, resp. jejího obrazu na svislé ose (vyznačeno červeně).

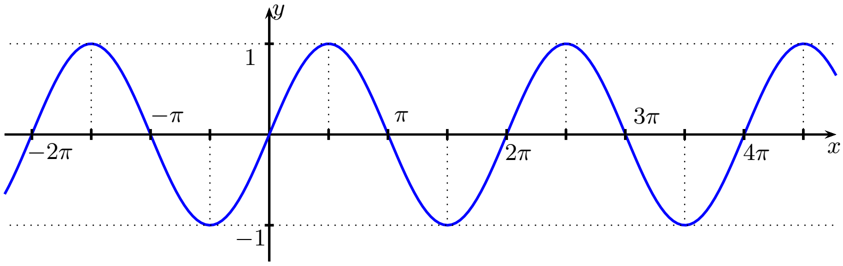
Toto grafické znázornění nám umožňuje popsat vývoj funkčních hodnot funkce $\sin x$. Pro $x = 0$ je $\sin x = 0$ a s rostoucí hodnotou x se zvětšuje i hodnota funkce $\sin x$. Nejvyšší hodnotu dosáhne pro $x = \frac{\pi}{2}$, kdy je $\sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Při dalším zvětšování velikosti úhlu x se hodnota $\sin x$ snižuje, pro $x = \pi$ je $\sin x = \sin \pi = 0$. Zvětší-li se nyní velikost úhlu x, potom již grafický obraz hodnoty $\sin x$ leží pod vodorovnou osou, funkce $\sin x$ pak nabývá zápornou hodnotu. Právě naznačený průběh funkce $f(x) = \sin x$ je zobrazen na následujícím grafu. V něm je velikost úhlu nanesena na vodorovnou osu a příslušná hodnota funkce sinus je zobrazena na svislé ose.



Obrázek 5.43: Graf funkce $f(x) = \sin x$

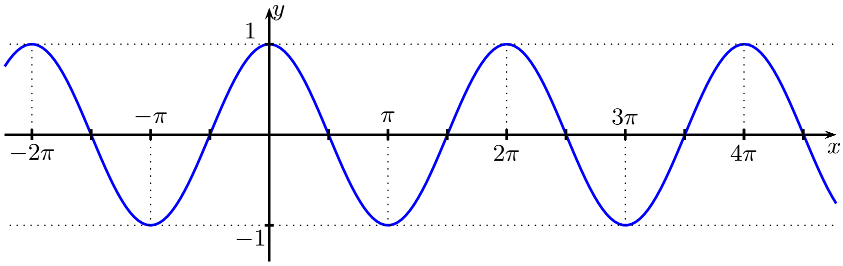
Definiční obor funkce $f(x) = \sin x$ ovšem není omezen pouze na hodnoty $\langle 0, 2\pi \rangle$. Stejným způsobem jako na Obrázku 5.42(a) lze určit i hodnoty funkce sinus pro všechna

$x \in \mathbb{R}$. Využijeme přitom skutečnost, že ramena úhlů α a $\alpha + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, splývají a jejich průmět do svislé osy má v obou případech stejnou velikost. Hodnoty funkce se proto pravidelně opakují s periodou $p = 2\pi$. Z toho vyplývá, že funkce $f(x) = \sin x$ je periodická funkce se základní periodou $p = 2\pi$. Na Obrázku 5.44 je zobrazen graf funkce přes několik period. Poznamenejme, že křivku zobrazenou na Obrázku 5.44 nazýváme *sinusoida*.



Obrázek 5.44: Graf funkce $f(x) = \sin x$

Analogicky bychom mohli odvodit průběh zbývajících goniometrických funkcí. Jejich grafy jsou zobrazeny na následujících obrázcích. Obrázek 5.45 zobrazuje graf funkce $f(x) = \cos x$. Z grafu je dobře patrné, že definiční obor funkce $f(x) = \cos x$ je roven množině $\mathbb{R}$, oborem hodnot je množina $H(f) = \langle -1,\, 1 \rangle$. Funkce $f(x) = \cos x$ je periodická se základní periodou $p = 2\pi$.



Obrázek 5.45: Graf funkce $f(x) = \cos x$

Z Obrázku 5.42(a) je zřejmé, že strany s délkou $\sin x$ a $\cos x$ tvoří obdélník s úhlopříčkou o délce $r = 1$. Z Pythagorovy věty potom vyplývá vztah (5.74) dávající do souvislosti obě goniometrické funkce.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \ldots \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \tag{5.74}$$

Z Obrázků 5.44 a 5.45, resp. z Obrázku 5.42(a) odvodíme následující vztahy

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \ldots \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \tag{5.75}$$

$$\cos(-x) = \cos x. \qquad \ldots \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \tag{5.76}$$

Rovnosti (5.75) a (5.76) ukazují, že $\sin$ je lichá funkce a $\cos$ je sudá funkce. Podobně lze uvést další často používané vztahy pro dvojnásobný argument obou funkcí.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \ldots \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \tag{5.77}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \ldots \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R} \tag{5.78}$$

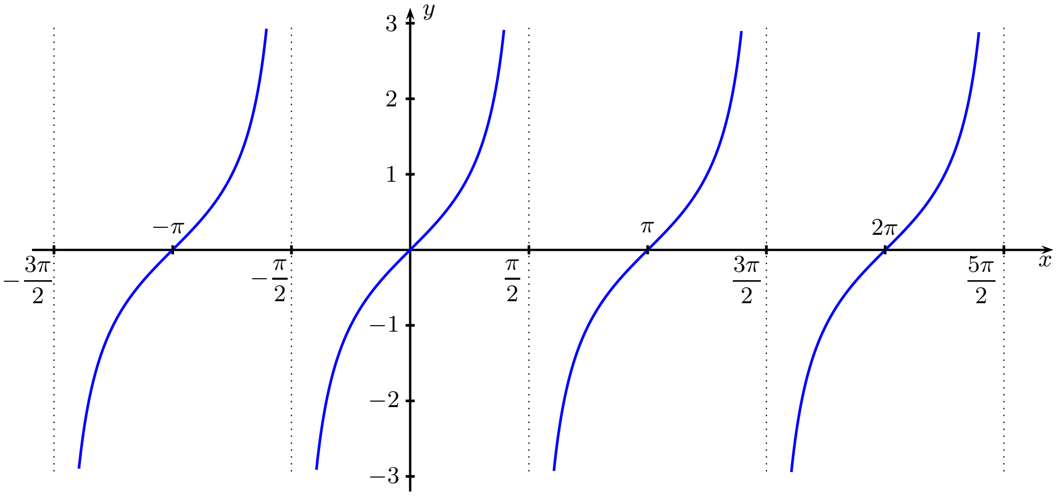
Porovnáním grafů obou funkcí zjistíme, že graf funkce $f(x) = \sin x$ má „stejný tvar“ jako graf funkce $f(x) = \cos x$, je však vodorovně posunutý o $\pi/2$. Z toho plynou následující vztahy

$$\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \ldots \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \qquad \ldots \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

Při řešení goniometrických rovnic lze často využít následující vztahy platné opět pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.\end{aligned}$$

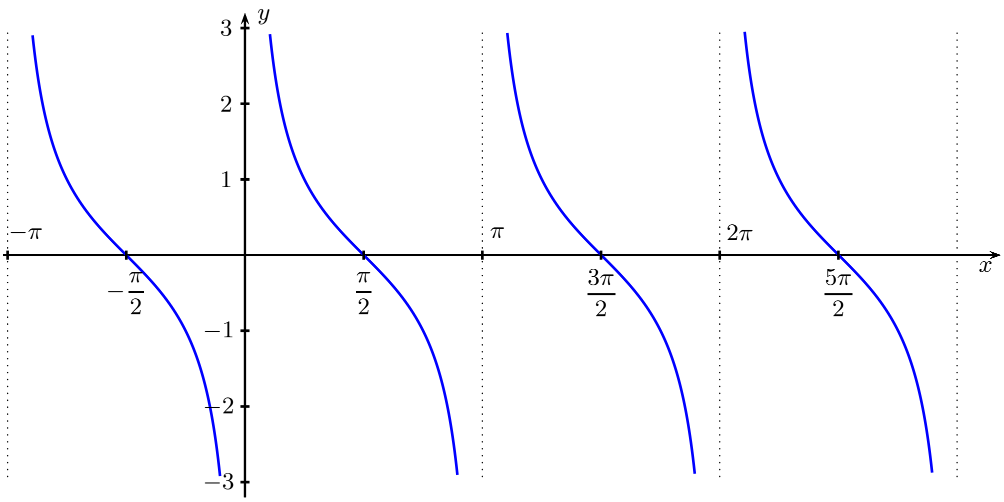


Obrázek 5.46: Graf funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$

Na Obrázcích 5.46 a 5.47 jsou zobrazeny části grafů funkcí tangens a kotangens. Na rozdíl od funkcí sinus a kosinus nejsou obě funkce ohraničené. Jejich obor hodnot je množina $\mathbb{R}$. Pro definiční obory obou funkcí platí následující rovnosti.

$$\begin{aligned}D(\mathrm{tg}) &= \mathbb{R}\setminus\left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\\ D(\mathrm{cotg}) &= \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Základní perioda funkcí tangens a kotangens má hodnotu $p = \pi$. Na Obrázcích 5.46 a 5.47



Obrázek 5.47: Graf funkce $f(x) = \operatorname{cotg} x$

je patrná středová souměrnost grafů obou funkcí podle počátku. Uvážíme-li známé rovnosti

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \tag{5.79}$$

a také lichost funkce $\sin x$, resp. sudost funkce $\cos x$, dostaneme následující vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x && \dots \textit{ pro všechna } x \in D(\operatorname{tg}) \\ \operatorname{cotg}(-x) &= \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{cotg} x. && \dots \textit{ pro všechna } x \in D(\operatorname{cotg}) \end{aligned}$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že jak tg, tak i cotg jsou liché funkce.

5.7.3 Cyklometrické funkce

V následující kapitole krátce připomeneme takzvané *cyklometrické funkce*. Mezi ně patří následující funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x && \dots \textit{ tj. funkce arkussinus } x \\ f(x) &= \arccos x && \dots \textit{ tj. funkce arkuskosinus } x \\ f(x) &= \operatorname{arctg} x && \dots \textit{ tj. funkce arkustangens } x \\ f(x) &= \operatorname{arccotg} x. && \dots \textit{ tj. funkce arkuskotangens } x \end{aligned}$$

Tyto funkce jsou definovány jako inverzní funkce ke goniometrickým funkcím. Platí pro ně proto následující vztahy

$$\begin{aligned} \sin x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \arcsin y = x \qquad (5.80) \\ \cos x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \arccos y = x \\ \operatorname{tg} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg} y = x \\ \operatorname{cotg} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{arccotg} y = x. \end{aligned}$$

Uvedené vztahy je třeba chápat následujícím způsobem. Víme např. že je $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Potom ze vztahu (5.80) plyne rovnost $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ atd. Z této poznámky je patrné, že cyklometrické funkce jsou definovány pouze pro takové hodnoty x, které patří do oboru hodnot příslušných goniometrických funkcí. Víme, že funkce $f(x) = \sin x$ má obor hodnot rovný množině $H(\sin) = \langle -1,\, 1\rangle$, proto tato množina bude definičním oborem příslušné cyklometrické funkce, tedy funkce $f(x) = \arcsin x$. Analogické zdůvodnění platí i v případě zbývajících funkcí.

$$\begin{aligned} D(\arcsin) &= \langle -1,\, 1\rangle \qquad & D(\operatorname{arctg}) &= \mathbb{R} \\ D(\arccos) &= \langle -1,\, 1\rangle & D(\operatorname{arccotg}) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pokud definujeme cyklometrické funkce jako funkce inverzní ke goniometrickým, lze tak podle poznámky v Kapitole 5.3.6 učinit pouze na intervalu, na kterém je původní vzor prostou funkcí. Z tohoto důvodu jsou obory hodnot cyklometrických funkcí rovny níže uvedeným množinám.

$$\begin{aligned} H(\arcsin) &= \left\langle -\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right\rangle \qquad & H(\operatorname{arctg}) &= \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right) \\ H(\arccos) &= \langle 0,\, \pi\rangle & H(\operatorname{arccotg}) &= (0, \pi) \end{aligned}$$

Z rovnosti (5.80) plyne toto pozorování. Je-li $\sin x = y$ a současně $\arcsin y = x$, potom složením obou funkcí dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \arcsin(y) && \dots \textit{ neboť je } \sin x = y \\ &= x && \dots \textit{ neboť je } \arcsin y = x \end{aligned}$$

Funkční hodnota složené funkce je rovna argumentu této složené funkce. Je tedy např. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ atd. Této vlastnosti můžeme využít, chceme-li nalézt hodnotu x, pro kterou je $f(x) = \sin x$ rovna konkrétní funkční hodnotě, např. chceme-li zjistit, pro jaká x je $\sin x = \frac{1}{2}$. Potom lze provést následující úpravy

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2} && \dots \textit{ zadání rovnice} \\ \arcsin(\sin x) &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) && \dots \textit{ použijeme funkci } \arcsin \textit{ na obě strany rovnice} \\ x &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right). && \dots \textit{ je } \arcsin(\sin x) = x \end{aligned}$$

K výpočtu hodnoty $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ lze použít např. kalkulátor nebo PC s příslušným softwarem. Na běžných kalkulátorech je funkce arcsin většinou označena symbolem $\sin^{-1}$. Výpočtem hodnoty této funkce pro hodnotu $0,5$ dostaneme výsledek $x = 30\,°$ (je-li kalkulátor přepnutý na vyjádření velikosti úhlu ve stupních) nebo $x = \frac{\pi}{6} \doteq 0,5236$ (je-li kalkulátor přepnutý na vyjádření velikosti úhlu v obloukové míře). Na tomto přístupu je založen postup řešení goniometrických rovnic, který přiblížíme v následující kapitole.

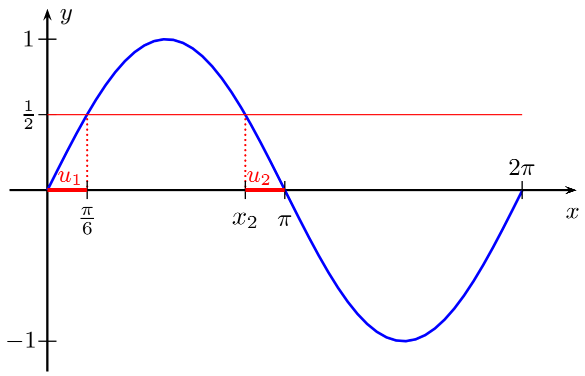
5.7.4 Goniometrické rovnice

Goniometrickými rovnicemi rozumíme takové rovnice, ve kterých je neznámá argumentem některé z goniometrických funkcí. Níže jsou uvedeny příklady některých goniometrických rovnic.

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \cos(2x - \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\,\mathrm{tg}\,x - \frac{6}{\mathrm{tg}\,x} = 0 \qquad \sin x + \sin 2x = 0$$

U první z uvedených rovnic jsme již našli x, které je jejím řešením. Snadno ověříme, že platí $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Ovšem tento výsledek není jediným řešením uvedené rovnice. Obrázek 5.48 ukazuje, že v intervalu $\langle 0,\ 2\pi \rangle$ leží ještě jedno řešení uvedené rovnice.



Obrázek 5.48: K řešení rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$

Ze symetrie sinusoidy snadno odečteme hodnotu x, která je dalším řešením rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$. Úsek u_1 má délku $\frac{\pi}{6}$, stejnou délku musí mít i úsek u_2. Je tedy

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Na první periodě má rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$ dvě řešení $x_1 = \frac{\pi}{6}$ a $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Víme ovšem, že funkce sin je periodická se základní periodou $p = 2\pi$. Její funkční hodnoty se proto budou opakovat s periodou 2π a řešení rovnice je nutné zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi && \dots \textit{ kde } k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi && \dots \textit{ kde } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Přidaný člen $2k\pi$ znamená, že kořen x_1 je ve skutečnosti prvkem množiny

$$\left\{\ldots, \frac{\pi}{6} - 4\pi,\ \frac{\pi}{6} - 2\pi,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6} + 2\pi,\ \frac{\pi}{6} + 4\pi,\ \ldots\right\},$$

což zapisujeme právě výše uvedeným zkráceným tvarem. Analogické tvrzení platí i pro druhý kořen.

Při řešení goniometrických rovnic se často setkáváme s úhly, které představují celočíselný podíl plného úhlu π. Hodnoty goniometrických funkcí pro tyto hodnoty je vhodné si pamatovat. Není třeba je potom odvozovat z hodnoty příslušných cyklometrických funkcí a řešení rovnice se tak urychlí. Některé z těchto hodnot jsou uvedeny v Tabulce 5.10.

$x\,[°]$	$0\,°$	$30\,°$	$45\,°$	$60\,°$	$90\,°$	$180\,°$	$270\,°$	$360\,°$
$x\,[\mathrm{rad}]$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	#	0	#	0
$\mathrm{cotg}\, x$	#	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	#	0	#

Tabulka 5.10: Hodnoty goniometrických funkcí ve vybraných bodech

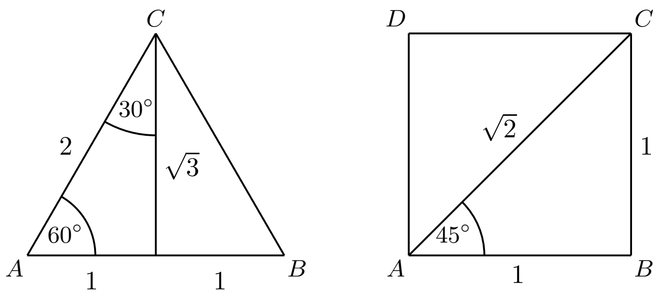
Některé z uvedených hodnot se snadno zapamatují z následujících obrázků. V nich je zobrazen rovnostranný trojúhelník $\triangle ABC$ s délkou strany $a = 2$ a čtverec $\square ABCD$ s délkou stany $a = 1$. Z Obrázku 5.49(a) si čtenáři jistě dokáží odvodit rovnosti

$$\sin 30\,° = \frac{1}{2},\ \cos 30\,° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 60\,° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60\,° = \frac{1}{2},$$

resp. z Obrázku 5.49(b) zase snadno plynou rovnosti

$$\sin 45\,° = \cos 45\,° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Podobně jako v případě rovnic typu $\sin x = a$ postupujeme při řešení goniometrických



(a) K odvození hodnot goniometrických funkcí pro úhly $30\,°$ a $60\,°$

(b) K odvození hodnot goniometrických funkcí pro úhel $45\,°$

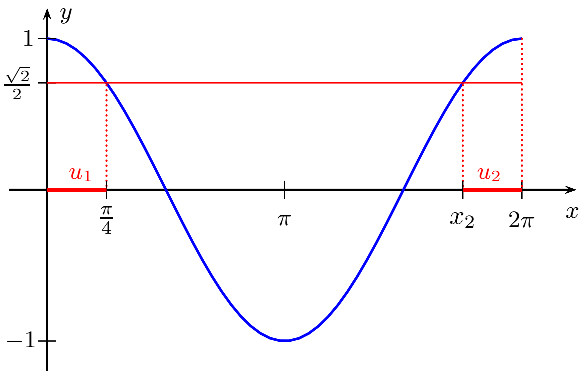
Obrázek 5.49: K odvození některých hodnot goniometrických funkcí

rovnic ve tvaru $\cos x = a$. Tato funkce není, stejně jako funkce $\sin$, prostá na své jedné periodě. Proto je nutné ve většině případů po zjištění prvního kořene „dopočítat“ druhý kořen.

Příklad 5.111

5.111. Vypočtěte všechna řešení rovnice $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Řešení: Z Tabulky 5.10 snadno vyčteme jeden kořen zadané rovnice. Je $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, proto je jedním kořenem zadané rovnice hodnota $x_1 = \frac{\pi}{4}$. Druhý kořen na první periodě odečteme z Grafu 5.50 opětovným využitím symetrie grafu funkce $f(x) = \cos x$.



Obrázek 5.50: K řešení rovnice $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Úsečka u_2 má stejnou délku, jako úsečka $u_1 = \frac{\pi}{4}$. Pro bod x_2 tedy odvodíme následující vztah.

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Pro kořeny zadané rovnice tak platí vztahy

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Poznamenejme, že funkce tg a cotg jsou prosté na celé jedné periodě. Rovnice $\mathrm{tg}\, x = a$, resp. $\mathrm{cotg}\, x = a$, budou mít na jedné periodě vždy jen jedno řešení, které můžeme vyčíst z tabulek, resp. pomocí funkcí arctg a $\mathrm{arccotg}$ na kalkulátoru.

Obtížnější úlohou oproti Příkladu 5.111 je řešení rovnic, které lze zapsat ve tvaru $\sin[u(x)] = a, \ \ldots$, kde příslušná goniometrická funkce je vnější funkcí nějaké složené funkce. V takovém případě často používáme substituci, ve které uvedenou vnitřní funkci nahradíme novou proměnnou.

Příklad 5.112

5.112. Vypočtěte všechna řešení rovnice $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Řešení: Položíme

$$z = \left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \tag{5.81}$$

Tím převedeme zadanou rovnici do tvaru $\mathrm{tg}\, z = -1$. Pohledem do Tabulky 5.10 zjistíme, že platí $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Již víme, že tg je lichá funkce, proto platí vztah $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Řešením rovnice $\mathrm{tg}\, z = -1$ jsou proto všechna z ve tvaru

$$z = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \tag{5.82}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Nyní dopočítáme řešení původně zadané rovnice. Z rovností (5.81) a (5.82) plyne

$$
\begin{aligned}
2x - \frac{\pi}{3} &= -\frac{\pi}{4} + k\pi && \ldots \textit{ použití rovností (5.81) a (5.82)}\\
2x &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k\pi && \ldots \textit{ k oběma stranám rovnice přičteme } \tfrac{\pi}{3}\\
2x &= \frac{\pi}{12} + k\pi && \ldots \textit{ algebraická úprava}\\
x &= \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}. && \ldots \textit{ obě strany rovnice dělíme číslem } 2
\end{aligned}
$$

Řešením zadané rovnice je $x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$. Všimněte si, že se změnila perioda, se kterou se daný kořen opakuje.

Složitější typy goniometrických rovnic většinou řešíme tak, že tyto rovnice upravíme pomocí vzorců uvedených v této kapitole do jednoho z výše uvedených tvarů. Tento přístup přiblíží následující úloha.

5.113. Vypočtěte řešení rovnice **Příklad 5.113**

$$\sin 2x + \cos 2x = 1 + \operatorname{tg} x. \tag{5.83}$$

Řešení: Nejprve určíme obor řešitelnosti rovnice. V rovnici (5.83) se vyskytuje funkce $\operatorname{tg} x$. Ta je definována pouze pro $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Všechny vypočtené kořeny se proto musí nacházet v této množině.

Při řešení goniometrických rovnic často pomůže, převedeme-li všechny výrazy v rovnici na funkce se stejným argumentem. Pomocí rovností (5.77), (5.78) a (5.74) upravíme zadanou rovnici do tvaru

$$\begin{aligned}
2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x + \frac{\sin x}{\cos x}\\
2\sin x\cos x - 2\sin^2 x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\
2\sin x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos x - \sin x &= 0\\
\sin x(2\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že jedním z řešení rovnice budou všechna x, která vyhovují rovnici $\sin x = 0$. Tuto rovnici již umíme vyřešit; jejím řešením jsou všechna x ve tvaru $x = k\pi$. Další řešení budou vyhovovat rovnici $2\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 1 &= 0\\
2\cos^2 x - 2\sin x\cos x - (\sin^2 x + \cos^2 x) &= 0\\
\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x &= 0\\
\cos 2x + \sin 2x &= 0\\
\sin 2x &= -\cos 2x \qquad (5.84)
\end{aligned}$$

Nyní se nabízí vydělit obě strany rovnice výrazem $\cos 2x$. Tím se nám podaří upravit zadanou rovnici tak, aby obsahovala jedinou goniometrickou funkci - tangens. Při této operaci musíme předpokládat, že $\cos 2x \neq 0$. Zatím však nevíme, zda některý z kořenů rovnice uvedenou podmínku porušuje. Zjistíme, zda tomu tak není. Řešením rovnice $\cos 2x = 0$ jsou všechna $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Základní perioda všech funkcí v (5.83) je rovna $p = \pi$. Dosazením hodnot $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, kde $k = 0$ a $k = 1$ do rovnice (5.83) ověříme[12]), že žádná z těchto hodnot není řešením rovnice (5.83). Nyní tedy víme, že při dělení obou stran rovnice (5.84) výrazem $\cos 2x$ neopomeneme žádný kořen. Pokračujme dělením obou stran rovnice (5.84) výrazem $\cos 2x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2x}{\cos 2x} &= -1\\
\operatorname{tg} 2x &= -1
\end{aligned}$$

Opět jsme získali rovnici ve tvaru, ze kterého již umíme najít řešení.

$$\begin{aligned}
2x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi\\
x &= -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

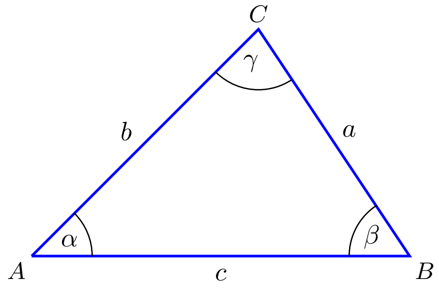
Řešením zadané rovnice jsou

$$\begin{aligned}
x_1 &= k\pi, k \in \mathbb{Z},\\
x_2 &= -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

[12]) Při dosazování kořenů do rovnice (5.83) stačí volit pouze $k = 0$ a $k = 1$, neboť vzhledem k základní periodě $p = \pi$, se pro vyšší hodnoty k funkční hodnoty již opakují.

5.7.5 Sinová a kosinová věta

Funkce sin a cos jsme zavedli pomocí pravoúhlého trojúhelníku. Pro tyto funkce lze však najít i vlastnosti, platné v ostatních typech trojúhelníků. Tyto vlastnosti se běžně využívají při praktických výpočtech. Na Obrázku 5.51 jsou popsány jednotlivé strany



Obrázek 5.51: Popis vrcholů, stran a úhlů v obecném trojúhelníku $\triangle ABC$

i úhly. Vzhledem k tomuto popisu potom můžeme vyslovit tzv. sinovou a kosinovou větu.

Sinová a kosinová věta

V trojúhelníku $\triangle ABC$, s úhly α, β a γ a stranami a, b a c platí následující vztahy

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \qquad \ldots \textit{ sinová věta} \tag{5.85}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \qquad \ldots \textit{ kosinová věta pro úhel } \alpha \tag{5.86}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \qquad \ldots \textit{ kosinová věta pro úhel } \beta \tag{5.87}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \qquad \ldots \textit{ kosinová věta pro úhel } \gamma \tag{5.88}$$

Pomocí uvedených vztahů je možné určit v zadaném trojúhelníku velikosti jednotlivých úhlů, známe-li velikosti jednotlivých stran, resp. délku zbývající strany, je-li známa délka dvou stran a velikost příslušného úhlu.

5.7.6 Použití goniometrických funkcí

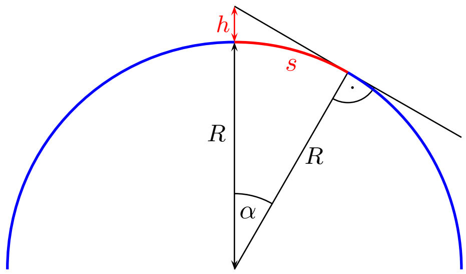
Podle pověsti si THÁLES Z MILÉTU (přibl. 624 př. n. l. - přibl. 547 př. n.l.) uvědomil zakřivení Země, když na břehu moře pozoroval připlouvající lodě a všiml si, že nejdříve je vidět vlajka lodě, o něco později plachty a teprve potom lze spatřit samotnou loď. Ověřme, zda je obzor v takové vzdálenosti, aby bylo možné rozeznat vlajku lodě.

Příklad 5.114

5.114. Na břehu moře stojí muž a dívá se na vodní hladinu. Do jaké vzdálenosti s může nejdále dohlédnout díky zakřivení zemského povrchu, tj. jak daleko je pro uvedeného muže vzdálen horizont (obzor)? Pro zjednodušení předpokládejme, že Země je koule o poloměru $R = 6\,370$ km a muž má oči ve výšce $h = 170$ cm.

Řešení: Situace je schematicky znázorněna na Obrázku 5.52. Vzdálenost pozorovatele od horizontu vypočteme jako délku příslušného oblouku s podle vzorce (5.72). K tomu potřebujeme znát velikost úhlu α a poloměr R. Hodnotu poloměru $R = 6\,370$ km známe ze zadání. Zbývá určit velikost úhlu α vyjádřenou v obloukové míře. Z obrázku odvodíme, že pro $\cos\alpha$ platí vztah

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}, \tag{5.89}$$



Obrázek 5.52: Vzdálenost obzoru

neboť v zobrazeném pravoúhlém trojúhelníku poloměr R představuje přilehlou odvěsnu a úsečka o délce $R+h$ tvoří přeponu daného trojúhelníku. Potom je

$$\arccos(\cos\alpha) = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) \qquad \dots\ \textit{viz (5.89)}$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right). \qquad \dots\ \textit{je } \arccos(\cos\alpha)=\alpha$$

Dosazením konkrétních hodnot $R = 6370$ km a $h = 0,0017$ km (pozor na zadání hodnot pomocí shodných jednotek) a dosazením do vzorce (5.72) dostaneme

$$\begin{aligned} s &= R\cdot\alpha \\ &= 6\,370\cdot\arccos\left(\frac{6\,370}{6\,370+0,0017}\right) \\ &\doteq 6\,370\cdot 0,0007306 \\ &\doteq 4,65. \end{aligned}$$

Obzor se od muže v popsané situaci nachází přibližně ve vzdálenosti $4,65$ km.

Na vzdálenost $4,65$ km lze s dobrým zrakem rozeznat vlajku od plachty a lodi. Proto tímto příkladem nelze vyvrátit zmíněnou pověst o Thaletovi.

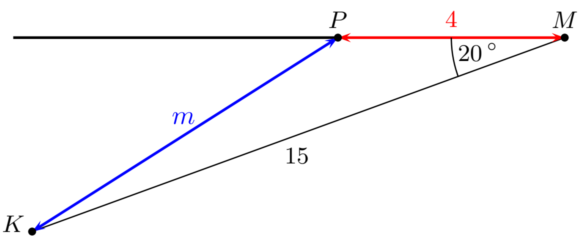
Problém 5.114.1. Jak daleko lze v rovinatém terénu dohlédnout z rozhledny, ze které se rozhlížíme z výšky 22 m?

Problém 5.114.2. Jak vysoko musí vystoupat horkovzdušný balon, aby z něj bylo možné (alespoň teoreticky) přehlédnout celou Českou republiku? Předpokládejme přitom, že balón je při startu vzdálen od nejzazšího místa naší republiky 300 km.

Příklad 5.115

5.115. Město M leží na hlavní (rovné) silnici. Stranou od hlavní silnice leží kemp K, který je od města M vzdálen 15 km, přičemž spojnice města a kempu svírá s hlavní silnicí úhel $\alpha = 20\,°$. Z hlavní silnice začíná ve vzdálenosti 4 km od města M odbočka P ke kempu. Jak daleko je z odbočky P ke kempu K?

Řešení: Při řešení zadané úlohy vyjdeme z Obrázku 5.53. Označme vzdálenost $|KM|$



Obrázek 5.53: Vzdálenost odbočky P od kempu K

symbolem p, vzdálenost $|KP|$ symbolem m a vzdálenost $|PM|$ symbolem k. Z kosinové věty potom dostáváme

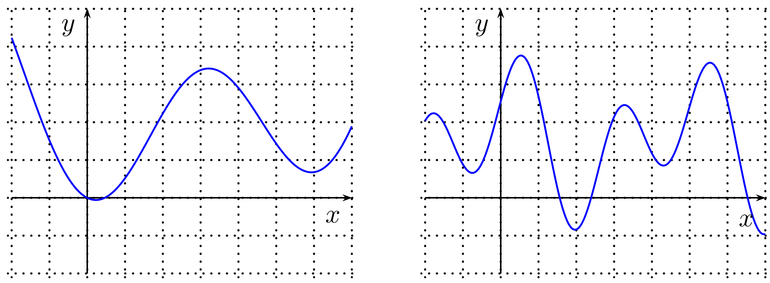
$$\begin{aligned}
m^2 &= k^2 + p^2 - 2kp \cdot \cos\alpha && \dots \textit{ použití kosinové věty}\\
&= 4^2 + 15^2 - 2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot \cos 20\,^\circ && \dots \textit{ dosazení hodnot}\\
&\doteq 16 + 225 - 120 \cdot 0,9397 && \dots \textit{ zjednodušení}\\
&\doteq 128,27 && \dots \textit{ výpočet}\\
m &\doteq 11,33. && \dots \textit{ odmocnění}
\end{aligned}$$

Vzdálenost odbočky od kempu činí přibližně $11,33\,\mathrm{km}$.

5.8 Cvičení

Funkce a její vlastnosti

V příkladech 5.8.1 až 5.8.9 budeme pracovat s následujícími grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$:



(a) Graf funkce $f(x)$ (b) Graf funkce $g(x)$

Obrázek 5.54: Grafy k úlohám 5.8.1 až 5.8.9

5.8.1. Použijte grafy obrázku k odhadu hodnot funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v uvedených bodech.

a) $f(-2), f(-1), f(0), f(0,5), f(3), f(7)$

b) $g(-2), g(-1,5), g(0), g(1), g(2), g(5)$

5.8.2. Odhadněte, pro která x jsou funkční hodnoty funkce $f(x)$ rovny číslu tři, tj. pro která x platí rovnice $f(x) = 3$? Pro která x jsou funkční hodnoty funkce $g(x)$ rovny dvěma, tj. pro která x platí rovnice $g(x) = 2$?

5.8.3. Odhadněte, pro která x jsou funkční hodnoty funkce $f(x)$ větší než jedna, tj. pro která x platí nerovnice $f(x) > 1$? Pro která x jsou funkční hodnoty funkce $g(x)$ menší než dvě, tj. pro která x platí nerovnice $g(x) < 2$?

5.8.4. Odhadněte, pro která x je funkce $f(x)$ rostoucí. Pro která x je funkce $g(x)$ klesající?

5.8.5. Odhadněte, pro která x je funkce $f(x)$ konvexní. Odhadněte, pro která x je funkce $f(x)$ konkávní.

5.8.6. Odhadněte, na jakých intervalech jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ prosté.

5.8.7. Je některá z funkcí $f(x)$ a $g(x)$ sudá, resp. lichá?

5.8.8. Je některá z funkcí $f(x)$ a $g(x)$ periodická? Lze případnou periodicitu funkce odhadnout na základě zveřejněného úseku grafu funkce?

5.8.9. Odhadněte, pro která x nabývají funkce $f(x)$ a $g(x)$ svá globální maxima a minima na zobrazeném intervalu.

5.8.10. Jak se liší grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$, jestliže pro předpisy těchto funkcí platí následujícící vztahy? Ověřte na nějakém konkrétním případě.

a) $f(x) = g(x-5)$ d) $f(x) = g(x) - 4$ g) $f(x) = g(-x)$

b) $f(x) = g(x+3)$ e) $f(x) = -g(x)$ h) $f(x) = 2 \cdot g(x)$

c) $f(x) = g(x) + 2$ f) $f(x) = 5 - g(x)$ ch) $f(x) = |g(x)|$

5.8.11. V následujících úlohách vypočtěte průsečíky grafů uvedených funkcí se souřadnými osami.

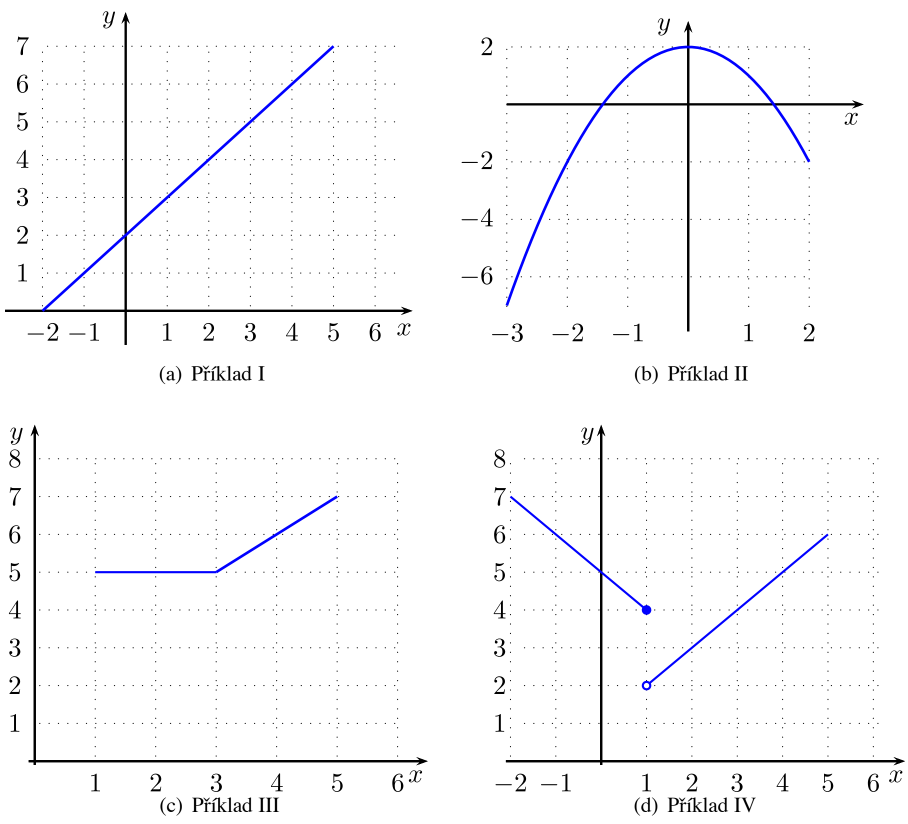
a) $f(x) = \dfrac{x+8}{5}$ c) $h(t) = \dfrac{(t+3)^2+5}{7}$ e) $l(t) = \sqrt{1-t^2}$

b) $g(x) = \dfrac{2x-4}{x}$ d) $k(\alpha) = \dfrac{\alpha^3+1}{\alpha^2+1}$ f) $m(x) = \dfrac{(x+3)^2-5}{4}$

5.8.12. K jednotlivým předpisům funkcí přiřaďte grafy z Obrázku **5.55**.

a) $f(x) = \begin{cases} 5, & x \in \langle 1, 3\rangle \\ x+2, & x \in (3, 5\rangle \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \in \langle -2, 1\rangle \\ x+1, & x \in (1, 5\rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \quad 2 - x^2 \quad x \in \langle -3, 2\rangle$ d) $f(x) = \quad x+2 \quad x \in \langle -2, 5\rangle$



(a) Příklad I (b) Příklad II

(c) Příklad III (d) Příklad IV

Obrázek 5.55: Grafy k úloze **5.8.12**

5.8.13. V následujících úlohách rozhodněte o sudosti, resp. lichosti zadaných funkcí.

a) $f(x) = 5$ c) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

b) $f(x) = x^2 + 5$ d) $f(x) = 2^{x^2+5}$ f) $f(x) = \ln(x^2-1)$

5.8.14. V následujících úlohách vytvořte ze zadaných funkcí složenou funkci $y = f(g(x))$.

a) $f(x) = 5x - 3, g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2, g(x) = 5x - 3$

c) $f(x) = \ln x, g(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}, g(x) = \ln x$

e) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sin x$

f) $f(x) = \sin x, g(x) = \sqrt{x}$

5.8.15. V následujících úlohách rozložte zadanou složenou funkci $y = f(g(x))$ na vnější funkci $f(x)$ a vnitřní funkci $g(x)$, případně na ještě jednodušší funkce.

a) $y = (2x + 3)^4$

b) $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $y = \dfrac{1}{x + 5}$

d) $y = \dfrac{1}{\sin x}$

e) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x + 2}}$

f) $y = \ln(2x + 6)$

5.8.16. V následujících úlohách vypočtěte inverzní funkci $f^{-1}(x)$ k zadané funkci.

a) $y = 5 - 3x$

b) $y = 1 - \sqrt{x - 1}$

c) $y = \ln 3x$

d) $y = 2^{5x+3}$

e) $y = \sin(3x^2)$

f) $y = 1 - \arccos 2x$

Lineární funkce

5.8.17. V sekcích a) až d) jsou dány tabulky funkčních hodnot lineární funkce. Doplňte chybějící hodnoty a určete směrnici každé této funkce.

a)

x	-2	-1	0	1
y	3	5		

b)

x	3	4	5	6
y	5		11	

c)

x	2	4	5	6
y	-1	5		

d)

x	1	5	7	8
y	8		-4	

5.8.18. Zjistěte, které z uvedených tabulek mohou obsahovat funkční hodnoty lineární funkce. V případě, že dané hodnoty patří lineární funkci, nalezněte předpis této funkce.

a)

x	7	8	9	10	11	12
y	3	4	5	6	7	8

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	5	7	8	10	11	13

c)

x	4	8	12	16	20	24
y	5	7	9	11	13	15

d)

x	5	6	7	8	9	10
y	15	13	11	9	7	5

e)

x	0	1	2	4	7	9
y	2	5	8	11	14	17

f)

x	-3	-1	0	5	7
y	19	13	10	-5	-11

5.8.19. V sekcích a) až ch) načrtněte grafy zadaných funkcí. Rozmyslete si, které z uvedených předpisů určují lineární funkci.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -3x + 5$

c) $f(x) = 3 - x$

d) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 5$

e) $7x - 3y = 2$

f) $2x = 5$

g) $5y = 4$

h) $2x = -3y$

ch) $2x = 3y$

5.8.20. V následujících úlohách vypočtěte předpis lineární funkce (resp. rovnici přímky), jejíž graf prochází body o zadaných souřadnicích.

a) $[0,\ 0]$ a $[2,\ 6]$
b) $[-3,\ 2]$ a $[0,\ 0]$
c) $[4,\ 2]$ a $[5,\ 1]$
d) $[5,\ 3]$ a $[7,\ -2]$
e) $[\frac{1}{2},\ 5]$ a $[4,\ \frac{17}{2}]$
f) $[5,\ 3]$ a $[8,\ 3]$
g) $[-1,\ 2]$ a $[4,\ 2]$
h) $[2,\ 5]$ a $[2,\ 7]$
ch) $[0,\ 3]$ a $[0,\ 5]$

5.8.21. V následujících úlohách vypočtěte předpis lineární funkce, jejíž graf má dané vlastnosti.

a) Prochází bodem o souřadnicích $[2,\ 3]$ a jeho směrnice je rovna $k = 2$.
b) Prochází bodem o souřadnicích $[1\,000,\ 5\,200]$ a jeho směrnice je rovna $k = -2$.
c) Prochází bodem o souřadnicích $[3\,200,\ 54\,320]$ a jeho směrnice je rovna $k = 0,1$.
d) Prochází bodem $A = [2,\ 4]$ a je rovnoběžný s přímkou o rovnici $3x - y = 5$.
e) Prochází bodem $B = [5,\ 0]$ a je rovnoběžný s přímkou o rovnici $x + y = 1$.
f) Prochází bodem $C = [0,\ 0]$ a je rovnoběžný s přímkou o rovnici $x + 2y = 5$.

Kvadratická funkce

5.8.22. V následujících úlohách vypočtěte souřadnice vrcholu zadané kvadratické funkce.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$
c) $f(x) = 4 - 3x - x^2$
d) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

5.8.23. V následujících úlohách vypočtěte, na jakém intervalu je zadaná kvadratická funkce rostoucí, resp. klesající.

a) $f(x) = 1 - x^2$
b) $f(x) = 8 + 2x - x^2$
c) $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$
d) $f(x) = x^2 + 5$

5.8.24. V následujících úlohách nalezněte globální extrémy zadané kvadratické funkce na uvedeném intervalu.

a) $f(x) = x^2 - 10x + 21$ na intervalu $(2,\ 9)$
b) $f(x) = x^2 + 4x + 9$ na intervalu $(0,\ 5)$
c) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ na intervalu $\langle 2,\ 9\rangle$
d) $f(x) = 4x - x^2$ na intervalu $\langle 0,\ 4\rangle$

5.8.25. V následujících úlohách vyjádřete zadanou kvadratickou funkci ve tvaru doplněném na čtverec.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 7$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
c) $f(x) = x^2 - 2x + 4$
d) $f(x) = 2x^2 + 8x + 13$

5.8.26. V následujících úlohách vypočtěte průsečíky grafu zadané funkce se souřadnými osami.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = 3 + 2x - x^2$

c) $f(x) = x^2 + 7x + 12$

d) $f(x) = x^2 + 6x + 13$

5.8.27. V následujících úlohách vypočtěte, pro která x nabývá zadaná funkce kladné, resp. záporné funkční hodnoty.

a) $f(x) = x^2 - 6x - 7$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 15$

c) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

d) $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$

Exponenciální a logaritmická funkce

5.8.28. V následujících úlohách nalezněte kořeny zadaných rovnic.

a) $2^{2x-1} = 8$

b) $3^{10-2x} = 81$

c) $3^{2-3x} = 3^{2x+12}$

d) $2^{1-2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1}$

e) $2^{9-3x} = 8^{2x-3}$

f) $5^{18-6x} = 25^{x+1}$

5.8.29. V následujících úlohách nalezněte kořeny zadaných rovnic.

a) $3^x = 15$

b) $5^{2x} = 64$

c) $2^{3x+1} = 1,945$

d) $1,05^{1-3x} = 5,21$

5.8.30. Předpokládejme, že na začátku roku 2012 byla průměrná spotřeba běžného auta s motorem 1 600 ccm rovna 6 l/100 km. Jaká bude spotřeba auta na začátku roku 2022, pokud se výrobcům podaří ročně snížit spotřebu o 5%?

5.8.31. Počet bakterií, které se nejčastěji vyskytují na kuchyňské lince, se každých dvacet minut zdvojnásobí. Kolik bakterií bude na lince po deseti hodinách, jestliže na počátku měření (v čase $t = 0$ hodin) bylo na lince 20 bakterií?

5.8.32. V laboratoři vypozorovali, že počet bakterií se zvyšuje exponenciálně. Na počátku měření bylo v laboratorní misce 100 bakterií. Po šesti hodinách se počet bakterií zvýšil na 1 500. Kolik bakterií bude v laboratorní misce po dvaceti hodinách?

5.8.33. Počet obyvatel města vzrostl za 10 let z 55 000 na 65 000. O kolik procent se každoročně průměrně zvyšoval počet obyvatel tohoto města?

5.8.34. Když firma FOK vstoupila v roce 1980 na trh, uvedla svůj první výrobek s výkonem 0,6 instrukcí za sekundu. Dnes v roce 2012 jsou na trhu běžně k dostání výrobky firmy FOK, které zvládají zpracovávat 6300 instrukcí za sekundu. Určete, o kolik procent ročně v průměru stoupal výkon přístrojů firmy FOK.

5.8.35. Počet miligramů d určité látky v lidském těle po t hodinách je dán funkcí

$$d = 20 \cdot e^{-0.4t}.$$

Jaké množství látky se u člověka prokáže po 2 hodinách? Po kolika hodinách nebude test schopný prokázat přítomnost látky v lidském těle? (Test nerozezná množství $0,1$ mg látky a menší.)

5.8.36. Kolik peněz musíme dnes uložit na účet s úrokovou sazbou 3 $\%$ p.a., abychom na úrocích mohli za 20 let čerpat 120 000 Kč koncem každého roku? Předpokládáme, že úroková sazba se po celou dobu trvání vkladu nemění a z úroku se neplatí žádná daň.

5.8.37. Krystal ve vhodném roztoku zvýší svou hmotnost každý týden o $1,26$ $\%$ oproti hmotnosti v předchozím týdnu. Za kolik týdnů naroste krystal z hmotnosti $m = 150$ g na hmotnost $m = 200$ g?

Goniometrické a cyklometrické funkce

5.8.38. V následujících úlohách nalezněte všechny kořeny zadaných rovnic.

a) $\sin x = 1$

b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

d) $\cos x = 3$

e) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

f) $\operatorname{cotg} x = 1$

5.8.39. V následujících úlohách nalezněte všechny kořeny zadaných rovnic.

a) $\sin 2x = 0$

b) $\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$

c) $\operatorname{tg}\left(3x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\operatorname{cotg} 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5.8.40. V následujících úlohách nalezněte všechny kořeny zadaných rovnic.

a) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

b) $\sin x + \sin 2x = 0$

c) $4\cos^2 x - 3 = 0$

d) $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{cotg}^2 x - 4 = 0$

5.8.41. Lanovka má délku 700 metrů a stále stoupá pod úhlem $\alpha = 35\ ^\circ$. Jaký je výškový rozdíl mezi dolní a horní stanicí lanovky?

5.8.42. Žlab na vodu je sestaven ze tří prken, každé z nich má šířku 15 cm. Sousední prkna spolu svírají úhel $120\,^\circ$. Jaká je nejvyšší možná výška vody ve žlabu?

5.8.43. Návštěvník galerie se dívá na obraz. Stěna, na které je obraz zavěšen, se nachází ve vzdálenosti 4 metry od návštěvníka. Oči návštěvníka se nacházejí ve výšce $1,75$ cm. Spodní obraz rámu se nachází ve výšce 2 metry a výška obrazu činí $1,5$ m. Pod jakým zorným úhlem vidí návštěvník uvedený obraz?

Výsledky cvičení

Funkce a její vlastnosti

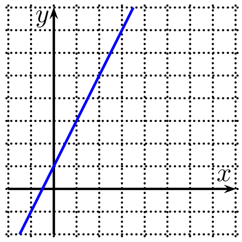
5.8.11 a) $[0, \frac{8}{5}]$, $[-8, 0]$ **b)** průsečík s osou y není, $[2, 0]$ **c)** $[0, 2]$, průsečík s osou x není **d)** $[0, \frac{1}{2}]$, $[-1, 0]$ **e)** $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[1, 0]$ **f)** $[0, 1]$, $[-\sqrt{5} - 3, 0]$, $[\sqrt{5} - 3, 0]$ **5.8.12 a)** 5.55(c) **b)** 5.55(d) **c)** 5.55(b) **d)** 5.55(a) **5.8.13 a)** sudá **b)** sudá **c)** lichá **d)** sudá **e)** ani sudá, ani lichá **f)** sudá **5.8.14 a)** $y = 5x^2 - 3$ **b)** $y = (5x - 3)^2$ **c)** $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ **d)** $y = \frac{1}{\ln x}$ **e)** $y = \sqrt{\sin x}$ **f)** $y = \sin\sqrt{x}$ **5.8.15 a)** $f(x) = x^4$, $g(x) = 2x + 3$ **b)** $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x + 5$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$ **e)** $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x + 2$, kde $y = f(g(h(x)))$, **f)** $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x + 6$ **5.8.16 a)** $f^{-1}(x) = \frac{5-x}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ **b)** $f^{-1}(x) = 1 + (1 - x)^2$, $x \in (-\infty, 1\rangle$ **c)** $f^{-1}(x) = \frac{e^x}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ **d)** $f^{-1}(x) = \frac{\log_2 x - 3}{5}$, $x \in (0, \infty)$ **e)** $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{\arcsin x}{3}}$, $x \in (0, 1)$ **f)** $f^{-1}(x) = \frac{\cos(1-x)}{2}$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Lineární funkce

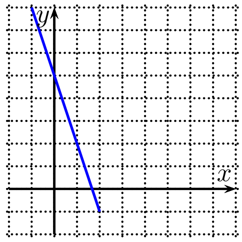
5.8.17 a) $f(0) = 7$, $f(1) = 9$, $k = 2$ **b)** $f(4) = 8$, $f(6) = 14$, $k = 3$ **c)** $f(5) = 8$, $f(6) = 11$, $k = 3$ **d)** $f(5) = 0$, $f(8) = -6$, $k = -2$ **5.8.18 a)** je lin. funkcí $y = x - 4$ **b)** není lin. funkcí **c)** je lin. funkcí $y = \frac{x}{2} + 3$ **d)** je lin. funkcí $y = -2x + 25$ **e)** není lin. funkcí **f)** je lin. funkcí $y = -3x + 10$ **5.8.20 a)** $y = 3x$ **b)** $y = -\frac{2}{3}x$ **c)** $y = -x + 6$ **d)** $y = -\frac{5}{2}x + \frac{31}{2}$ **e)** $y = x + \frac{9}{2}$ **f)** $y = 3$ **g)** $y = 2$ **h)** $x = 2$ **ch)** $x = 0$ **5.8.21 a)** $y = 2x - 1$ **b)** $y = -2x + 7\,200$ **c)** $y = 0,1x + 54\,000$ **d)** $y = 3x - 2$ **e)** $y = -x + 5$ **f)** $y = -\frac{x}{2}$

Kvadratická funkce

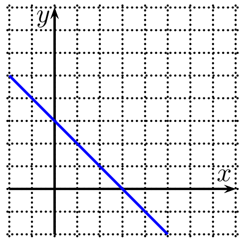
5.8.22 a) $[3, -4]$ **b)** $[-1, -18]$ **c)** $\left[-\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right]$ **d)** $[-3, 1]$ **5.8.23 a)** rostoucí $(-\infty, 0)$, klesající $(0, \infty)$ **b)** rostoucí $(-\infty, 1)$, klesající $(1, \infty)$ **c)** klesající $(-\infty, -1)$, rostoucí $(-1, \infty)$ **d)** klesající $(-\infty, 0)$, rostoucí $(0, \infty)$ **5.8.24 a)** glob. minimum v bodě $[5, -4]$,



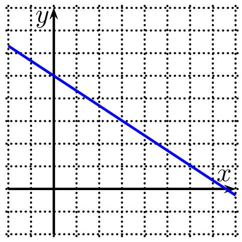
(a) **5.8.19 a)**



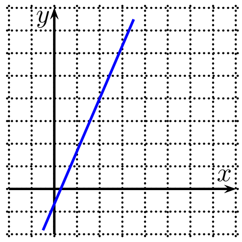
(b) **5.8.19 b)**



(c) **5.8.19 c)**



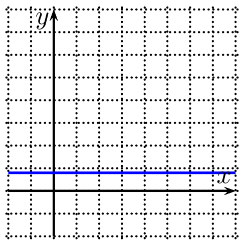
(d) **5.8.19 d)**



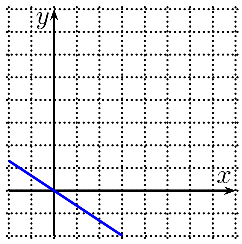
(e) **5.8.19 e)**

není funkce

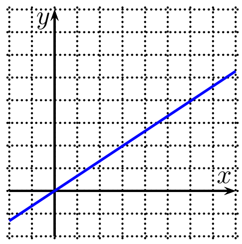
(f) **5.8.19 f)**



(g) **5.8.19 g)**



(h) **5.8.19 h)**



(i) **5.8.19 ch)**

glob. maximum nemá **b)** nemá glob. maximum, ani glob. minimum **c)** glob. minimum v bodě $[2, 5]$, glob. maximum v bodě $[9, 68]$ **d)** glob. minimum v bodech $[0, 0]$ a $[4, 0]$, glob. maximum v bodě $[2, 4]$ **5.8.25 a)** $f(x) = (x + 4)^2 - 9$ **b)** $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ **c)** $f(x) = (x - 1)^2 + 3$ **d)** $f(x) = 2(x + 2)^2 + 5$ **5.8.26 a)** $[-3, 0]$, $[0, -3]$, $[1, 0]$ **b)** $[-1, 0]$, $[0, 3]$, $[3, 0]$ **c)** $[-4, 0]$, $[-3, 0]$, $[0, 12]$ **d)** $[0, 13]$ **5.8.27 a)** kladná v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(7, \infty)$, záporná v intervalu $(-1, 7)$ **b)** kladná na $\mathbb{R}$ **c)** záporná v intervalech $(-\infty, 5)$ a $(5, \infty)$ **d)** kladná v intervalech $\left(-\infty, 1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ a $\left(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}, \infty\right)$, záporná v intervalu $\left(1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}, 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$

Exponenciální a logaritmická funkce

5.8.28 a) $x = 2$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = -1$ **e)** $x = 2$ **f)** $x = 2$ **5.8.29 a)** $x = (\ln 15)/(\ln 3) \doteq 2,46$ **b)** $x = (\ln 8)/(\ln 5) \doteq 1,29$ **c)** $x = (\ln 1,945)/(\ln 8) - 1/3 \doteq -0,013$ **d)** $x = 1/3 - (\ln 5,21)/(3 \ln 1,05) \doteq -10,94$ **5.8.30** cca $3,6\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$ **5.8.31** 21 474 836 480 bakterií **5.8.32** 832 347 bakterií **5.8.33** cca $1,685\,\%$ **5.8.34** cca $33,55\,\%$ **5.8.35** cca 9 mg, po 14 hodinách **5.8.36** 2 214 703 Kč **5.8.37** 24 týdnů

Goniometrické a cyklometrické funkce

5.8.38 a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **c)** $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **d)** nemá řešení v $\mathbb{R}$ **e)** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **f)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **5.8.39 a)** $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ **c)** $x = -\frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ **5.8.40 a)** $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **c)** $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, **5.8.41** $v = 401,5$ m **5.8.42** $h = 12,99$ cm **5.8.43** $\alpha \doteq 20^\circ$

Kapitola 6

Spojitost a limita funkce

Svět okolo nás je plný změn. V následujících několika kapitolách se naučíme pracovat s matematickým popisem změny a také s popisem rychlostí této změny.

Velikostí změny funkční hodnoty jsme se již zabývali a to v kapitole o lineárních funkcích. Směrnice lineární funkce ukazovala změnu funkční hodnoty při nárůstu hodnoty x o jednotku. Tato změna byla stále stejná, konstantní. Tuto vlastnost však mají pouze lineární (a konstantní) funkce. Ostatní funkce mění svou hodnotu v různých místech definičního oboru různou rychlostí. Popis rychlosti této změny sehrál významnou úlohu v rozvoji přírodních věd a později i ve vývoji ostatních, např. společenských věd.

6.1 Spojitost funkce

Pojem spojité funkce prošel dlouhým vývojem a postupně se zpřesňoval až do dnešní podoby. Spojitost funkce si lze přibližně představit různými způsoby. Hlavní myšlenkou spojitosti funkce je, že její hodnoty se mění plynule, bez náhlých skoků. Z grafického pohledu je spojitá taková funkce, jejíž graf lze zakreslit jedním tahem pomocí souvislé, nikde nepřerušené křivky. Z numerického pohledu lze spojitou funkci charakterizovat jako funkci, která při malé změně nezávisle proměnné málo změní svou funkční hodnotu. I tato „definice“ však není přesná, neboť není přesně uvedeno, co to ona „malá změna“ je.

6.1.1 Spojitost funkce v bodě

Příklady 6.1 a 6.2 přiblíží pojem spojité funkce a zdůrazní některé důsledky plynulého (spojitého) průběhu jednoho známého jevu.

Příklad 6.1

6.1. Představte si, že teplota čerstvě uvařené kávy plynule klesala během jedné hodiny, přičemž pro chladnutí kávy platil přibližně vzorec

$$T(t) = 25 + 65 \cdot e^{-1{,}5t}, \tag{6.1}$$

kde $T(t)$ představuje teplotu kávy po uplynutí času t hodin. Vypočtěte teplotu kávy v čase $T(0)$ (tj. teplotu kávy v čase 0 hodin) a $T(1)$ (tj. teplotu kávy po uplynutí jedné hodiny) a poté určete, o kolik °C se káva ochladila během této jedné hodiny.

Řešení: Dosazením $t = 0$, resp. $t = 1$, do vzorce (6.1) dostaneme žádané hodnoty.

$$\begin{aligned} T(0) &= 25 + 65 \cdot e^{-1{,}5\cdot 0} \\ &= 25 + 65 \cdot e^{0} \\ &= 25 + 65 \cdot 1 \\ &= 90\,^{\circ}\mathrm{C} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T(1) &= 25 + 65 \cdot e^{-1{,}5\cdot 1} \\ &= 25 + 65 \cdot e^{-1{,}5} \\ &\doteq 25 + 65 \cdot 0{,}223 \\ &\doteq 39{,}50\,^{\circ}\mathrm{C} \end{aligned}$$

Teplotní rozdíl ΔT získáme odečtením teplot v čase $t = 1$ a $t = 0$.

$$\Delta T = T(1) - T(0) = 39{,}50 - 90 = -50{,}5\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Teplota klesla přibližně o $50,5$ °C. Tento výsledek je v dobrém souladu s naší zkušeností. Je samozřejmě nutné uvědomit si, že konkrétní hodnoty parametrů obsažených ve vzorci (6.1) jsou závislé na řadě okolností, zejména na okolní teplotě, množství kávy, materiálu, ze kterého je vyroben hrnek, atd.

Příklad 6.2

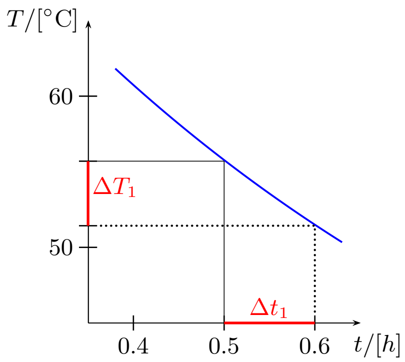
6.2. Uvažujme stejné zadání jako v předchozí úloze a vypočtěme, o kolik stupňů Celsia se snížila teplota v kratším časovém rozmezí, konkrétně mezi časovými okamžiky $0,5$ hod. a $0,6$ hod., resp. $0,5$ hod. a $0,51$ hodiny, tedy v období šesti minut, resp. 36 sekund po uplynutí jedné půlhodiny.

Řešení: Dosazením $t = 0,6$ a $t = 0,5$, resp. $t = 0,51$ a $t = 0,5$ do vzorce (6.1) dostaneme žádané hodnoty.

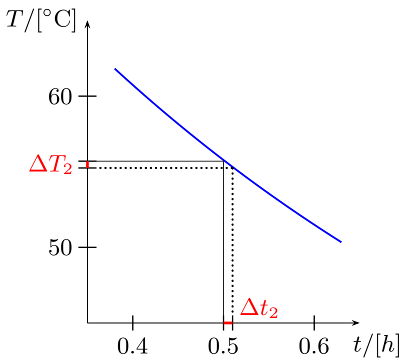
$$\begin{aligned}\Delta T &= T(0,6) - T(0,5)\\ &= 25 + 65 \cdot e^{-1,5\cdot 0,6} - \left(25 + 65 \cdot e^{-1,5\cdot 0,5}\right)\\ &= 65 \cdot \left(e^{-0,9} - e^{-0,75}\right)\\ &\doteq -4,277 \qquad \textit{(teplotní rozdíl po uplynutí šesti minut po půlhodině chladnutí)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta T &= T(0,51) - T(0,5)\\ &= 25 + 65 \cdot e^{-1,5\cdot 0,51} - \left(25 + 65 \cdot e^{-1,5\cdot 0,5}\right)\\ &= 65 \cdot \left(e^{-0,765} - e^{-0,75}\right)\\ &\doteq -0,457 \qquad \textit{(teplotní rozdíl po uplynutí 36 sekund po půlhodině chladnutí)}\end{aligned}$$

Z provedených výpočtů vidíme, že pokud začneme sledovat změny teploty po půlhodině chladnutí, tak v následujících šesti minutách od půlhodiny chladnutí teplota poklesne o $\Delta T_1 = 4,277$ °C, resp. v následujících 36 sekundách od půlhodiny chladnutí teplota poklesne o hodnotu $\Delta T_2 = 0,457$ °C.



(j) Pokles teploty v období šesti minut

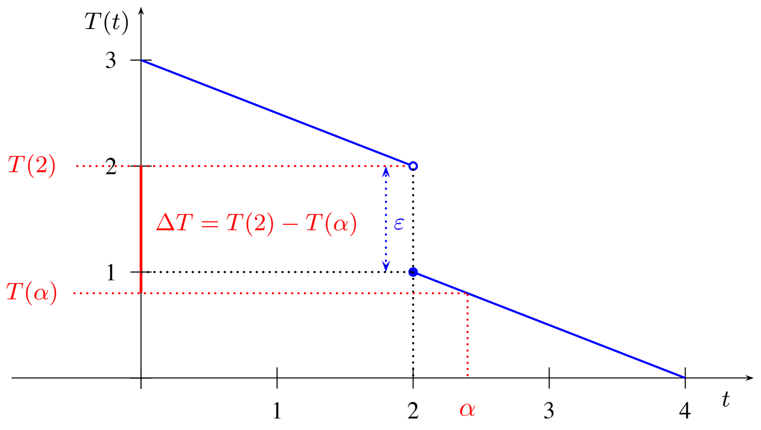


(k) Pokles teploty v období 36 sekund

Obrázek 6.1: Chladnutí kávy

Předchozí příklad má ilustrovat pojem spojité funkce. Cítíme, že teplota kávy se při jejím chladnutí mění plynule, nikoli po skocích. To se projeví tak, že čím kratší časové rozpětí zvolíme, tím menší změna teploty během tohoto časového rozpětí nastane. Přesněji, bude-li se délka sledovaného časového rozmezí blížit k nule, bude se k nule blížit i příslušná změna teploty.

Nyní si představme jinou (zřejmě nereálnou) situaci, ve které se teplota v jistém okamžiku změní nespojitě, např. v čase $t_0 = 2$ se teplota najednou skokem sníží o 1 °C. Lze i nyní prohlásit, že malé změně času přísluší malá změna teploty? Situace je graficky znázorněna na Obrázku 6.2. Průběh teploty T je znázorněn modrou barvou. Nyní si představme, že na vodorovné ose měníme polohu bodu α v nějakém pravostranném okolí bodu $t = 2$ a současně sledujeme, jaká je odpovídající změna teploty $\Delta T = T(2) - T(\alpha)$. (Pro lepší představu je změna teploty na svislé ose vyznačena červenou úsečkou.) Než budete číst dále, odpovězte si na otázku, zda je možné, aby absolutní hodnota rozdílu teplot v bodech $t = 2$ a $t = \alpha$ byla při pohybu bodu α po vodorovné ose menší než 1 °C.



Obrázek 6.2: Příklad funkce, která není spojitá v bodě $t_0 = 2$

Na předchozí otázku byste měli odpovědět záporně. Důsledkem „nespojitého skoku" je tedy nemožnost najít takové časové rozmezí obsahující vnitřní bod $t = 2$, v němž by změna teploty byla menší než nějaká pevně daná hodnota ε (v našem případě 1 °C). Tento důsledek je výchozím bodem v definici spojitosti funkce v bodě.

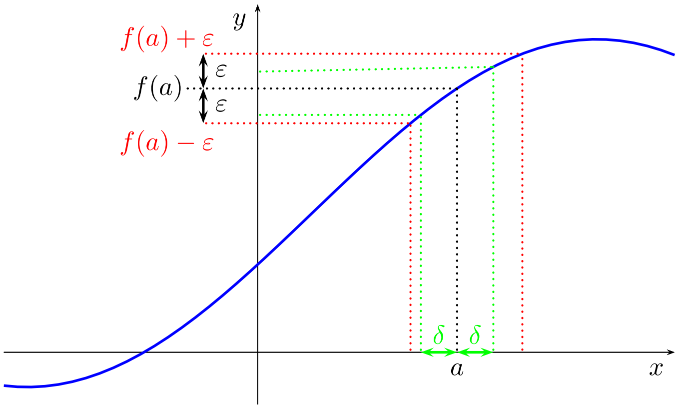
Shrneme výše uvedené poznatky. Teplotu můžeme považovat za spojitou veličinu v nějakém bodě t_0, jestliže je možné pro jakkoliv malou změnu teploty nalézt odpovídající časové rozmezí (zahrnující bod t_0), během něhož příslušná změna teploty nastane. Jinými slovy, pokud v nějakém čase t_0 existuje mezi teplotou v čase t_0 a v okolních časových okamžicích $t = \alpha$ teplotní rozdíl, který neklesne pod jistou kladnou hodnotu ε, a to při libovolně krátkém časovém intervalu, potom se teplota mění v čase t_0 nespojitě.

V předchozí části jsme ukázali, jak rozumět slovnímu vyjádření, že v čase t_0 se teplota mění plynule, tzv. *spojitě*. Tuto situaci nyní popíšeme pomocí matematických prostředků a upřesníme, co z matematického pohledu znamená, že funkce f je spojitá v bodě a.

Předpokládejme, že v bodě a má funkce f funkční hodnotu $f(a)$. Zvolíme kladné reálné číslo $\varepsilon > 0$. Touto volbou ovlivníme šířku intervalu $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, viz Obrázek 6.3, který představuje analogii k teplotní změně popsané v předchozím rámečku. Je-li funkce f spojitá, musí pro uvedený interval existovat kladné reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechny body x, které jsou od bodu a vzdáleny nejvýše o číslo δ, bude se funkční hodnota $f(x)$ lišit od $f(a)$ nejvýše od hodnotu ε. Jinými slovy, všechna tato x mají funkční hodnotu $f(x)$, která se nachází v rozmezí $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Pokud se nám podaří takové $\delta > 0$ nalézt pro každé zvolené $\varepsilon > 0$, můžeme funkci f považovat v bodě a za spojitou, neboť nemůže obsahovat nespojité skoky.

Definice 6.1.1. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \delta, a + \delta)$ platí $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

V Kapitole 5.1.2 jsme si ukázali, že podmínku $x \in (a-\delta, a+\delta)$ můžeme vyjádřit pomocí nerovnosti $|x - a| < \delta$, respektive tvrzení $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ je



Obrázek 6.3: Definice spojitosti funkce

ekvivaletní nerovnosti $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Proto se také často můžete setkat s jinou, avšak rovnocennou definicí spojitosti funkce f v bodě a v následujícím tvaru.

Definice 6.1.2. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{6.2}$$

je splněna pro všechny hodnoty x vyhovující nerovnosti $|x - a| < \delta$.

Příklad 6.3

6.3. Dokažme, že funkce $f(x) = 4x + 5$ je spojitá v bodě $x = 3$.

Řešení: Nejprve se pokusíme o ověření, že v okolí bodu $x = 3$ se funkční hodnoty funkce f málo liší od funkční hodnoty $f(3) = 17$.

x	2,9	2,95	2,99	…	3,01	3,05	3,1
$f(x)$	16,6	16,8	16,96	…	17,04	17,2	17,4

Tabulka naznačuje, že v bezprostředním okolí bodu $x = 3$ se funkční hodnoty stále víc přibližují hodnotě 17. Takovou tabulku samozřejmě nemůžeme považovat za důkaz, že funkce je spojitá v bodě $x = 3$, nicméně může nám pomoci při prvním náhledu na daný problém.

Skutečné ověření spojitosti funkce musí vycházet z potvrzení podmínek kladených v definici. Zvolme tedy libovolné $\varepsilon > 0$. Potřebujeme ukázat, že pro takto zvolené číslo lze najít číslo $\delta > 0$, pro které bude platit, že všechny hodnoty z intervalu $(3 - \delta, 3 + \delta)$ mají funkční hodnoty z intervalu $(17 - \varepsilon, 17 + \varepsilon)$.

Je zřejmé, že volba čísla δ bude záviset na hodnotě čísla ε. Nalezneme-li vztah mezi hodnotou δ a ε, ukážeme tím, že pro každé ε takové δ skutečně existuje. Uvažujme nerovnost $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$. Úpravou její levé strany dostaneme

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(3)| &= |4x + 5 - (4 \cdot 3 + 5)| \\
&= |4x + 5 - 4 \cdot 3 - 5| \\
&= |4x - 4 \cdot 3| \\
&= |4(x - 3)| \\
&= 4|x - 3|.
\end{aligned}$$

Hodnotu δ potřebujeme zvolit tak, aby výraz $|f(x) - f(3)|$, který je, jak jsme ukázali, současně roven výrazu $4|x-3|$, byl menší než ε. Položíme $\delta = \varepsilon/4$. Tím jsme pro každé

$\varepsilon > 0$ našli $\delta > 0$ s požadovanou vlastností. Nyní víme, že pro libovolně zvolené ε je hledané δ dáno vztahem $\delta = \varepsilon/4$. Pro každé x, které vyhovuje nerovnosti $|x-3| < \delta$ (a tedy i nerovnosti $4|x-3| < 4\delta$), potom platí následující rovnosti, resp. nerovnosti

$$|f(x) - f(3)| = |4x + 5 - (4 \cdot 3 + 5)| = 4\,|x - 3| < 4\,\delta = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Tím jsme ukázali, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna x, vyhovující nerovnosti $|x-3| < \delta$, je pro všechny odpovídající funkční hodnoty splněna nerovnost $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$. Funkce $f(x) = 4x + 5$ je proto spojitá v bodě $x = 3$.

Předchozí příklad měl naznačit, jak složité je vyšetřování spojitosti funkce pomocí výše uvedené definice. V následující kapitole proto uvedeme některé věty, které nám usnadní rozhodování o tom, zda je funkce spojitá v daném bodě.

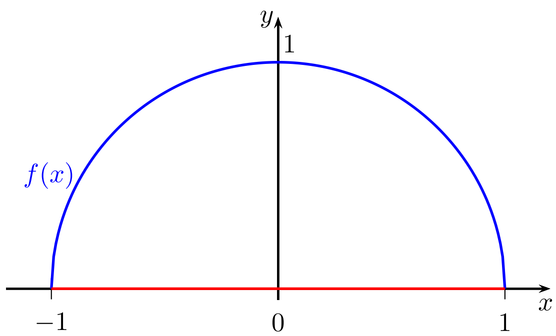
Poznámka 6.1.3. Je-li funkce f spojitá v bodě a, pak dle Definice 6.1.1 pro každé $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (x - \delta, x + \delta)$ je splněna nerovnost (6.2). Výraz $f(x)$ tedy musí mít smysl pro všechna x z intervalu $(x - \delta, x + \delta)$, kde $\delta > 0$. Je-li tedy funkce f spojitá v bodě a, potom musí být nutně definována v nějakém otevřeném intervalu, obsahujícím bod a. Z tohoto také plyne, že nemá smysl hovořit o spojitosti funkce v krajním bodě definičního oboru funkce.

6.1.2 Spojitost funkce v intervalu

Nyní svou pozornost přeneseme ke spojitosti funkce v intervalu, což je pojem, který hraje významnou roli v použití spojitých funkcí. Splnění podmínky spojitosti funkce na nějakém intervalu nám umožňuje vyslovit řadu užitečných tvrzení. Tato tvrzení můžeme využít při řešení rovnic a nerovnic, při hledání extrémních hodnot funkce a v dalších důležitých případech.

Z počátku budeme rozlišovat mezi spojitostí v otevřeném a uzavřeném intervalu. Jak víme, v otevřeném intervalu je každý bod tohoto intervalu vnitřním bodem intervalu, tj. existuje nějaké jeho okolí, které celé leží v daném intervalu. V uzavřeném intervalu nejsou krajní body intervalu vnitřními body, proto v nich funkce nemůže být podle Poznámky 6.1.3 spojitá.

Podívejme se například na graf funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, viz Obrázek 6.4. Snadno ověříme, že jejím definičním oborem je uzavřený interval $D(f) = \langle -1,\, 1\rangle$ (znázorněn červenou úsečkou). Vidíme, že funkce f není definována v levostranném okolí bodu $x = -1$ a současně není definována v pravostranném okolí bodu $x = 1$. Proto nemůže být v těchto dvou bodech spojitá. Nicméně pokud se k oběma bodům blížíme z těch stran, ve kterých je funkce f definována, cítíme, že funkce má plynulý, spojitý průběh. To nás vede k definici jednostranné spojitosti.



Obrázek 6.4: Graf funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Definice 6.1.4. Funkce f je spojitá zprava v bodě a, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je splněna pro všechna reálná x z intervalu $\langle a, a + \delta)$.
Funkce f je spojitá zleva v bodě a, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je splněna pro všechna reálná x z intervalu $(a - \delta, a\rangle$.

Z právě vyslovené definice je zřejmé, že funkce f je *spojitá zprava* v bodě $x = -1$ a je *spojitá zleva* v bodě $x = 1$. Lze také snadno ukázat, že pokud je funkce f spojitá v bodě a, potom je v tomto bodě spojitá zleva i zprava. Poslední věta dokonce platí ve formě ekvivalence.

Věta 6.1.5. *Funkce* f *je spojitá v bodě* a *tehdy a pouze tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.*

Následující definice uvede pojem funkce spojité na intervalu.

Definice 6.1.6. Funkce f je spojitá na *otevřeném* intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu. Funkce f je spojitá na *uzavřeném* intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá na intervalu (a, b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Analogicky bychom definovali spojitost funkce na intervalu $\langle a, b)$, resp. $(a, b\rangle$. Nyní již můžeme vyslovit věty, které nám usnadní rozhodování o spojitosti velkého množství funkcí, a to v bodě a nebo na nějakém intervalu.

Věta 6.1.7. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité v bodě* a*. Potom také funkce*

$$|f(x)|, \quad f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

jsou spojité v bodě a*. Platí-li navíc $g(a) \neq 0$, je v bodě a spojitá i funkce* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Připomeňme si smysl symbolů $f(x) + g(x)$ a dalších z výše uvedené věty. Funkce $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ je funkce, která je definována v těch bodech x, ve kterých jsou definovány obě funkce f a g. Funkční hodnota funkce je pak rovna součtu funkčních hodnot $f(x)$ a $g(x)$. Analogicky jsou pak definovány i ostatní případy. V případě podílu musíme ještě uvažovat podmínku $g(x) \neq 0$.

Věta 6.1.8. *Nechť funkce $\varphi(x)$ je spojitá v bodě* a *a funkce $f(y)$ je spojitá v bodě $y = \varphi(a)$. Potom složená funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě* a.

Nyní bez důkazu přidáme větu, která často usnadní rozhodnutí o spojitosti velkého množství funkcí.

Věta 6.1.9. *Funkce $f(x) = x^n$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru*[1]*). Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou spojité na množině $\mathbb{R}$. Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru. Je-li $a > 0$, $a \neq 1$, jsou funkce $y = a^x$ a $y = \log_a x$ spojité v každém bodě svého definičního oboru.*

Věty 6.1.7 a 6.1.9 mají následující důsledky. Každý polynom je funkce spojitá na $\mathbb{R}$. Racionální funkce $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy) je spojitá v každém bodě, ve kterém má jmenovatel $Q(x)$ nenulovou funkční hodnotu.

Poznámka 6.1.10. V bodech, ve kterých není funkce definována, nemá smysl mluvit o spojitosti. Nebudeme se tedy ptát po spojitosti funkce na intervalu, který obsahuje bod, ve kterém není funkce definována.

6.1.3 Obecné věty o spojitých funkcích

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu, má řadu zajímavých vlastností. Některé z nich uvedeme v následujícím textu. Pokuste si vyslovená tvrzení řádně rozmyslet, případně se pokuste smysl tvrzení graficky znázornit.

[1]) Definiční obor funkce $f(x) = x^n$ závisí na konkrétní hodnotě n. Například pro $n \in \mathbb{N}$ je $D(f) = \mathbb{R}$, pro $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ atd. Pokud definiční obor funkce f obsahuje krajní body, potom máme na mysli příslušnou jednostrannou spojitost.

Věta 6.1.11. *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I, potom je na tomto intervalu ohraničená.*

Věta má zřejmý smysl. Poznamenejme však, že pro otevřený interval analogická věta neplatí. Např. funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je spojitá na otevřeném intervalu $(0, \infty)$, ale není na tomto intervalu shora ohraničená. O něco silnější tvrzení vyslovuje následující, tzv. Weierstrassova[2]) věta.

Věta 6.1.12 (Weierstrassova)**.** *Předpokládejme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu I. Potom funkce f nabývá na tomto intervalu svou největší i nejmenší hodnotu.*

Věta 6.1.12 zaručuje, že na uzavřeném intervalu má spojitá funkce vždy své maximum i minimum. Povšimněte si, že uvedená věta není vůbec samozřejmá pro otevřený interval. Např. funkce $f(x) = x^2$ na otevřeném intervalu $(1,\ 5)$ nemá svou nejvyšší ani nejnižší hodnotu.

Věta 6.1.13 (Darbouxova[3]))**.** *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $I = \langle a,\ b\rangle$, potom hodnoty funkce f nabývají všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$ včetně těchto hodnot.*

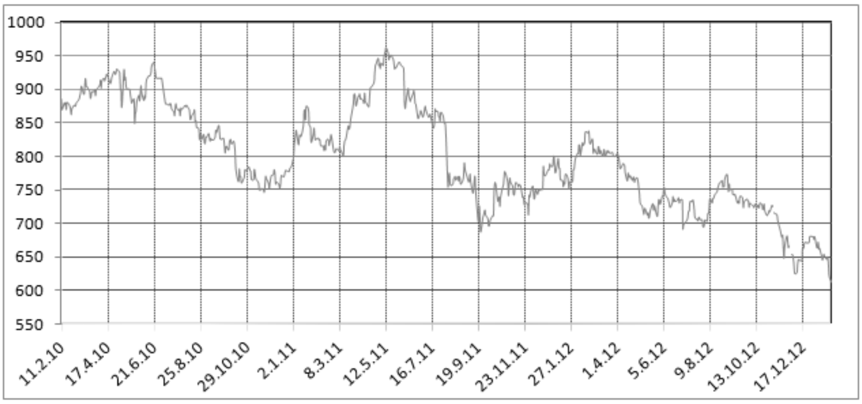
Tuto větu o spojité funkci by čtenář měl také očekávat. Naproti tomu u nespojité funkce tento předpoklad nemusí být splněn. Existují nespojité funkce, které některé funkční hodnoty „přeskočí“. Pokuste se nakreslit graf nějaké takové funkce. Přímým důsledkem Věty 6.1.13 je tzv. Bolzanova[4]) věta.

Věta 6.1.14 (Bolzanova)**.** *Předpokládejme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $I = \langle a,\ b\rangle$ a současně platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a,\ b)$ takový, že $f(c) = 0$.*

Je-li součin funkčních hodnot v krajních bodech intervalu záporný, potom jedna z nich musí být kladná a druhá záporná. Číslo 0 leží mezi těmito hodnotami $f(a)$ a $f(b)$ a tvrzení pak plyne z Věty 6.1.13. Na důsledek Věty 6.1.14 se často odvoláváme při zkoumání řešitelnosti rovnic ve tvaru $f(x) = 0$, kde f je spojitá funkce.

6.2 Limita funkce

V mnoha ekonomických aplikacích se budeme zabývat otázkou, jak určit největší a nejmenší hodnotu nějaké veličiny. Graf v Obrázku 6.5 ukazuje hodnoty ceny akcií společnosti ČEZ v letech 2010 - 2012. Z obrázku lze vyčíst, že v květnu 2011 dosáhly



Obrázek 6.5: Ceny akcií společnosti ČEZ, a.s. v období 2010 - 2012

ceny akcií svého vrcholu - *maxima*, pak jejich cena kolísavě klesala až do září 2011,

---

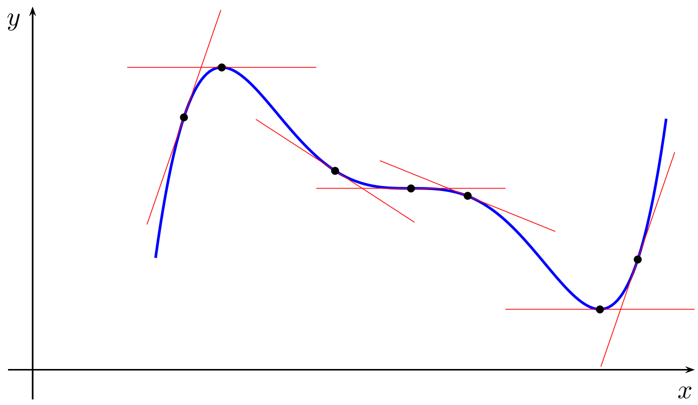
2) CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815 - 1897), německý matematik

3) JEAN GASTON DARBOUX (1842 - 1917), francouzský matematik

4) BERNARD BOLZANO (1781 - 1848), český matematik, filozof a kněz

kdy dosáhla dna - *minima* a pak se jejich cena opět začala zvyšovat atd. Informace o nejvyšších, resp. nejnižších hodnotách nějaké veličiny však nemusí zajímat pouze burzovní makléře. Občas musí každý z nás řešit nějakou úlohu spojenou s hledáním nejmenší, či největší hodnoty - obecně extrémní hodnoty: jak se někam dostat v nejkratším možném čase; jak vyrábět, abychom měli co nejmenší výrobní náklady; jakou stanovit prodejní cenu výrobku, abychom dosáhli na nejvyšší možný zisk, kdy dosáhne velikost populace svého maxima, resp. minima atd. V následující kapitolách se budeme zabývat metodami, které nám umožní popsat jisté vlastnosti funkcí, tj. určit, ve kterých intervalech je funkce rostoucí, resp. klesající, ve kterých bodech nabývá svých extrémních hodnot, tj. minim a maxim atd.

Na Obrázku 6.6 je uveden graf funkce a některými body grafu jsou vedeny přímky, jejichž sklon je stejný jako sklon grafu funkce v daném bodě. Takové přímky nazýváme

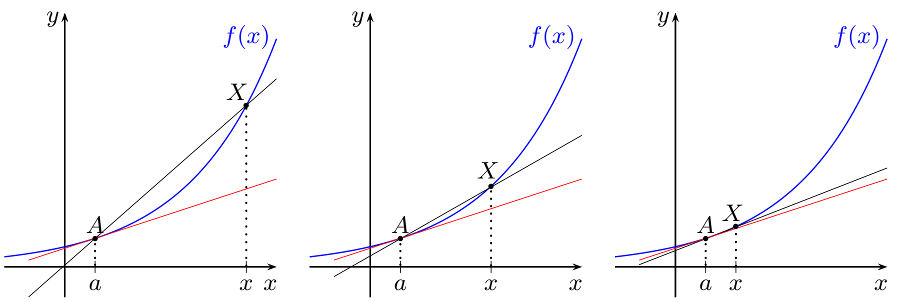


Obrázek 6.6: Tečny ke grafu funkce ve vybraných bodech

tečny ke grafu funkce v daných bodech. V Kapitole 5.6.2 jsme uvedli, že přímku lze považovat za graf lineární funkce $y = kx + q$, kde koeficient k nazýváme směrnice funkce. Tečna ke grafu funkce (resp. její směrnice) je nástroj, který nám při vyšetřování vlastností funkce velmi pomůže.

Z Obrázku 6.6 lze vyčíst řadu informací. V bodech, ve kterých je funkce $f(x)$ rostoucí, je i příslušná tečna grafem rostoucí (lineární) funkce - její směrnice k bude proto kladná. V bodech, ve kterých je funkce $f(x)$ klesající, je klesající funkcí i lineární funkce, jejíž graf je příslušnou tečnou. Směrnice k takové lineární funkce má zápornou hodnotu.

V následujících řádcích se tedy budeme zabývat metodami, které nám umožní vypočítat směrnici k tečny ke grafu funkce $f(x)$ v daném bodě a.



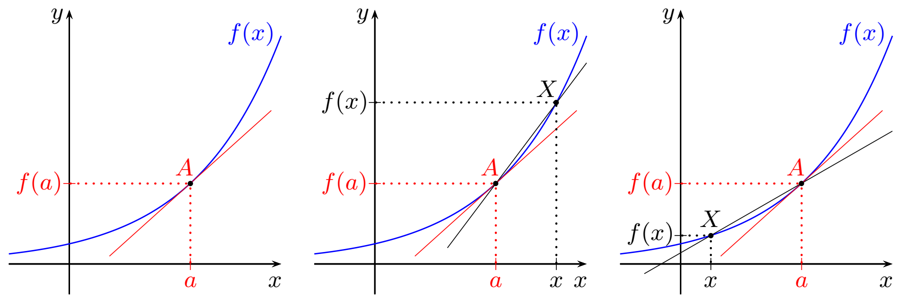
(a) Sklon sečny v případě, kde je bod x od bodu a relativně daleko.

(b) Přiblížíme-li bod x k bodu a, potom se sklon sečny přiblíží sklonu tečny v bodě a.

(c) Je-li bod x dostatečně blízko bodu a, potom je také sklon sečny dostatečně blízký sklonu tečny.

Obrázek 6.7: Metoda výpočtu směrnice tečny pomocí sečen

Předpokládejme, že je dána funkce $f(x)$ a chceme vypočítat směrnici k tečny ke grafu této funkce v nějakém konkrétním bodě grafu $A = [a,\ f(a)]$ (zkráceně budeme říkat „v bodě a“). Na vodorovné ose zvolíme další bod x, různý od bodu a, a na grafu funkce nalezneme bod X o souřadnicích $[x,\ f(x)]$. Spojíme-li nyní oba body A a X přímkou, dostaneme tzv. *sečnu* spojující tyto dva body. Tato sečna není shodná s hledanou tečnou. Lze však nahlédnout, že pokud se bod x přibližuje bodu a, potom se sečna spojující body A a X začne svým sklonem přibližovat sklonu tečny v bodě A, viz Obrázek 6.7. Cítíme, že sečna se stane tečnou v bodě a v okamžiku, kdy bod x splyne s bodem a. Problémem je, že v takovém okamžiku se ze dvou bodů stane jeden a jedním bodem lze vést nekonečné množství přímek všech různých směrů. Možným řešením se zdá být postup spočívající v přibližování se bodu x k bodu a jak zleva, tak zprava. Na obrázku 6.8 je vidět, že pokud se bod x přibližuje k bodu a zleva, potom je směr-



(a) Tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a

(b) Tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a a sečna vztažená k bodu x, kde $x > a$

(c) Tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a a sečna vztažená k bodu x, kde $x < a$

Obrázek 6.8: Sklon sečen při pravostranném a levostranném přibližování bodu x k bodu a

nice příslušné sečny menší než směrnice tečny a při zmíněném přibližování se zleva se tato hodnota zvětšuje až k hodnotě směrnice tečny[5]). Při přibližování se bodu x zprava k bodu a je směrnice odpovídající sečny větší než směrnice tečny a tato hodnota se při přibližování zprava snižuje opět až k hodnotě směrnice tečny. Jestliže se při přibližování zleva i zprava blížíme k jedné hodnotě směrnice, potom tuto hodnotu můžeme považovat za směrnici tečny.

Pokusme se nyní nahradit grafické představy algebraickým vyjádřením. Z Kapitoly 5.6.2 víme, že směrnici přímky, která je grafem lineární funkce $f(x) = kx + q$, vypočteme ze vztahu

$$k = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6.3}$$

K tečně funkce v bodě a se přibližujeme „přes sečny“, jak je zobrazeno na Obrázku 6.7. Směrnice těchto sečen dostaneme dosazením do vztahu (6.3). Ukažme si, jak se vyvíjí hodnoty směrnic sečen, jestliže se bod x přibližuje k bodu a. Předpokládejme, že máme vypočítat směrnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $a = 2$. Dosazením výrazů $f(x) = x^2$, $a = 2$, $f(a) = f(2) = 2^2 = 4$ do předpisu (6.3) dostaneme

$$k(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}. \tag{6.4}$$

Směrnice jednotlivých sečen ve vzorci (6.4) značíme symbolem $k(x)$, neboť jejich hodnota závisí na zvoleném x. V Tabulce 6.1 jsou uvedeny hodnoty směrnice pro některé zvolené hodnoty x. Všimněte si, že nelze určit hodnotu $k(x)$ pro $x = 2$. Z Tabulky 6.1 lze nahlédnout (zatím bez důkazu), že s rostoucí hodnotou x se zvětšuje hodnota $k(x)$. To nás vede k tvrzení, že hodnota směrnice tečny k leží v rozmezí od $3,999$ do $4,001$. Podařilo se nám určit hodnotu směrnice tečny s přesností

$$\varepsilon_1 = |4,001 - 3,999| = 0,002.$$

[5]) Popsané chování sečen odpovídá situaci na obrázku a nelze ho zobecňovat na všechny možné případy.

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$k(x)$	3	3,5	3,9	3,99	3,999	???	4,001	4,01	4,1	4,5	5

Tabulka 6.1: Hodnoty směrnice tečny pro $x \to 2$

To je poměrně velká přesnost, nicméně pokusíme se náš odhad zpřesnit. Určíme hodnotu k s přesností například $\varepsilon_2 = 0,000\,002$. Pomůžeme si při tom jednou algebraickou úpravou. Víme, že hodnotu $k(x)$ lze vypočítat ze vztahu (6.4). V uvedeném vztahu platí pro všechna $x \neq 2$ rovnosti

$$k(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2.$$

Pokud je $x \neq 2$, můžeme $k(x)$ vypočítat ze vztahu $k(x) = x + 2$ (možná jste si toho všimli již v Tabulce 6.1). To nás opravňuje k předpokladu, že pokud se hodnota x přiblíží k číslu 2 na rozdíl jedné miliontiny (poprvé zleva, podruhé zprava), potom jsou i příslušné funkční hodnoty, ohraničující pásmo, ve kterém leží hledané k, od sebe vzdáleny nejvýše o 2 miliontiny, viz Tabulka 6.2. Z toho důvodu můžeme prohlásit, že je

x	1,999 998	1,999 999	2	2,000 001	2,000 002
$k(x)$	3,999 998	3,999 999	???	4,000 001	4,000 002

Tabulka 6.2: Přesnější hodnoty směrnice tečny pro $x \to 2$

$3,999\,999 < k < 4,000\,001$ a hledanou hodnotu směrnice tečny jsme určili s přesností

$$\varepsilon_2 = |4,000\,001 - 3,999\,999| = 0,000\,002.$$

Analogicky bychom mohli určit hodnotu k s libovolnou přesností. Všimněte si, jak při tom pracujeme. Nejdříve si určíme požadovanou přesnost ε a pak určíme, jaká x z okolí čísla $a = 2$ můžeme uvažovat, abychom dosáhli požadované přesnosti.

Čtenář si jistě položil otázku, proč hodnotu směrnice hledáme tak složitě. Je přece „vidět“, že čím je hodnota x blíže číslu dva, tím víc se hodnota $k(x)$ blíží číslu čtyři, a proto platí $k = 4$. Smyslem předchozího podrobného popisu bylo ukázat, jakým způsobem lze pracovat v případech, které jsou složitější. Postup v obecném případě bude vždy takový, že dané číslo k prohlásíme za směrnici tečny, jestliže se nám podaří pro libovolně malé okolí čísla k najít odpovídající okolí čísla a tak, aby všechna x z tohoto okolí bodu a poskytla takovou hodnotu $k(x)$, která leží v uvažovaném okolí čísla k.

Nalezenou hodnotu $k = 4$ nemůžeme prohlásit za hodnotu výrazu (6.4) v bodě $x = 2$, neboť výraz (6.4) není pro $x = 2$ definován. Místo toho říkáme, že dané číslo je tzv. limitou funkce $k(x)$ pro x blížící se číslu dva (používá se též výraz limita funkce v bodě dva). Matematicky zapsáno

$$k = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 2.$$

Historická poznámka 6.2.1. Pojem limity sehrál ve vývoji matematiky, tím pádem i přírodních věd, velmi důležitou roli. První seriózní postupy pracující s limitními hodnotami nalezneme v pracích ISAACA NEWTONA (1643-1727), GOTTFRIEDA WILHELMA LEIBNIZE (1646-1716) a dalších přírodovědců 17. století. Prvotní přístup spočíval v práci s tzv. nekonečně malými veličinami, přičemž ale chyběla jakákoliv definice nekonečně malé veličiny. Výpočet limity v předchozím případě s tečnou by se podle tohoto přístupu provedl tak, že místo abychom si řekli, že x se blíží k číslu dva, řekneme, že x má hodnotu $x = 2 + \hat{o}$, kde $\hat{o}$ je ona zmíněná nekonečně malá veličina (tj. x je vzdáleno od čísla dva o nekonečně malou vzdálenost). Výpočty by potom vypadaly následovně

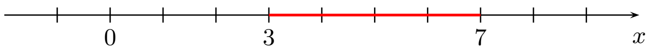
$$\begin{aligned} k &= \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{f(2+o)-f(2)}{(2+o)-2} \\ &= \frac{(2+o)^2-2^2}{o} = \frac{(4+4o+o^2)-4}{o} = \frac{4o+o^2}{o} \\ &= 4+o. \end{aligned}$$

Výraz $4+o$ je pak roven čtyřem, neboť o zanedbáme (tj. vynecháme tím, že položíme $o=0$). Je zřejmé, že uvedený postup skrývá některé nedostatky. Např. není zřejmé, zda je o rovno nule, či nikoliv. Toto je však podstatná otázka, neboť při výpočtu jsme výrazem o dělili. Z tohoto pohledu nemůže být o rovno nule. Na druhou stranu, ve výsledku jsme o pro možnost zanedbání položili rovno nule. Tento a další nedostatky vedly ke kritice metody používající nekonečně malé veličiny. Dnešní pojetí limity funkce v bodě a se opírá o takzvanou ε, δ definici, kterou zavedl v druhé polovině 19. století významný německý matematik KARL WEIERSTRASS (1815-1897).

Pro lepší porozumění následujícího textu připomeneme geometrický význam nerovnice $|x-a|<\delta$. Tato úloha je obecným příkladem nerovnic, jako jsou např. $|x-2|<3$, resp. $|x+5|\le 2$. Snadno nahlédneme pravdivost rovností

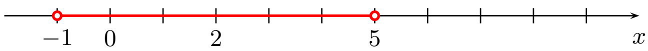
$$|7-3| = |3-7| = |4| = |-4| = 4.$$

Představíme-li si obě čísla 3 a 7 jako body na číselné ose, potom můžeme říci, že absolutní hodnota jejich rozdílu odpovídá jejich vzdálenosti na číselné ose, viz Obrázek 6.9. Absolutní hodnota z rozdílu obou čísel má tu roli, že nezáleží, v jakém pořadí jsou



Obrázek 6.9: Absolutní hodnota rozdílu dvou čísel

v rozdílu obě čísla uvedena - ať již je menšencem větší či menší z obou čísel, výsledkem bude vždy vzdálenost obou těchto čísel na číselné ose. Tuto vlastnost můžeme zobecnit na libovolná dvě reálná čísla a a b. Hodnota $|a-b|$ odpovídá vzdálenosti čísel a a b na ose bez ohledu na to, které z obou čísel má větší hodnotu. Podobně v nerovnici



Obrázek 6.10: Grafické řešení nerovnice $|x-2|<3$

$|x-2|<3$ představuje výraz $|x-2|$ vzdálenost mezi neznámou x a číslem dva. Pravá strana nerovnice pak vyžaduje, aby vzdálenost neznámé x od bodu dva byla menší než tři, viz Obrázek 6.10. Této podmínce vyhovují všechna reálná čísla $-1<x<5$, resp. $x\in(-1,\,5)$.

Při řešení nerovnice $|x+5|\le 2$ lze úlohu přepsat do tvaru $|x-(-5)|\le 2$, a tím ji převést na výše popsanou úlohu s absolutní hodnotou rozdílu dvou čísel. Řešením je množina všech reálných čísel, jejichž vzdálenost od bodu -5 je menší nebo rovna dvěma. Je tedy $x\in\langle -7,\,-3\rangle$. Grafické znázornění řešení nerovnice si vážený čtenář jistě zakreslí sám.

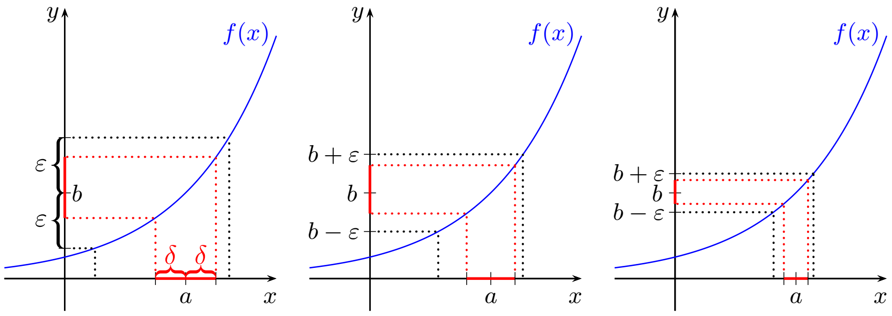
Definice 6.2.2. Řekneme, že číslo b je *limitou* funkce $f(x)$ v bodě a (resp. pro x jdoucí k číslu a), jestliže pro každé reálné číslo $\varepsilon>0$ existuje reálné číslo $\delta>0$ takové, že nerovnost

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

je splněna pro všechna x vyhovující nerovnosti $0<|x-a|<\delta$. Má-li funkce $f(x)$ v bodě a limitu rovnou číslu b, značíme to zápisem

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

K uvedené definici nyní připojíme několik poznámek. Jak již bylo napsáno výše, hodnotu výrazu $|x - a|$ můžeme chápat jako číslo vyjadřující vzdálenost bodů a a x na číselné ose. Podmínka $|x - a| < \delta$ tedy říká, že vzdálenost bodů a a x je menší než δ. Číslo δ vyjadřuje nejvyšší možnou vzdálenost bodů a a x. Definice 6.2.2 vyžaduje, aby



(a) V obrázcích jsou zobrazena ε-okolí bodu b a příslušná δ-okolí bodu a.

(b) Všimněte si, že při zmenšování hodnoty ε je stále možné najít příslušné δ-okolí bodu a takové, že ...

(c) ...všechna x z tohoto okolí mají funkční hodnoty, které se nacházejí v ε-okolí bodu b.

Obrázek 6.11: Ilustrace k Definici 6.2.2. Funkce $f(x)$ má v bodě a limitu rovnu číslu b.

při splnění podmínky $|x - a| < \delta$ hodnota funkce f v bodě x byla od limitní hodnoty b vzdálena nejvýše o číslo ε, tedy je-li hodnota x blízko číslu a, musí být hodnota $f(x)$ blízko číslu b.

Dále si všimněme, že předpokládáme $0 < |x - a|$, tedy $x \neq a$. V uvedené definici nepracujeme s hodnotou funkce f v bodě a. Nezáleží na tom, jaká je hodnota funkce v bodě a, či zda je funkce v bodě a vůbec definována. Pouze sledujeme, jaké hodnoty má funkce f, když se x blíží k bodu a.

Příklad 6.4

6.4. Dokažme dle definice, že

$$\lim_{x \to 3} 5x - 4 = 11.$$

Řešení: Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle definice potřebujeme dokázat, že pro libovolnou takto zvolenou hodnotu lze nalézt číslo $\delta > 0$, že všechny hodnoty x, vyhovující nerovnici $|x - 3| < \delta$, splňují nerovnici $|f(x) - 11| < \varepsilon$.

Je zřejmé, že volba čísla δ bude záviset na hodnotě ε. Nalezneme-li vztah mezi hodnotou δ a ε, ukážeme tím, že pro každé ε takové δ skutečně existuje (neboť budeme schopni podle tohoto vzorce ke každému ε dané δ vypočítat).

$$\begin{aligned} |f(x) - 11| &= |(5x - 4) - 11| \\ &= |5x - 15| \\ &= 5\,|x - 3| \end{aligned}$$

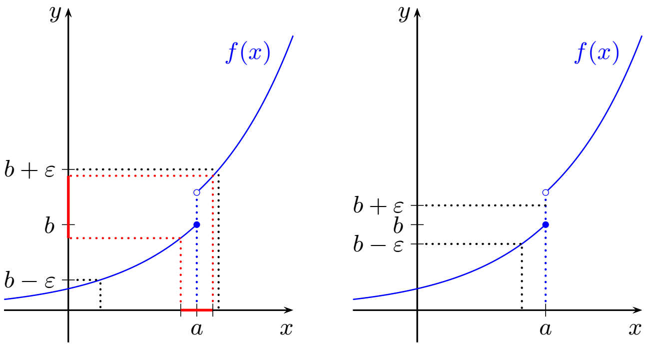
Hodnotu δ potřebujeme s ohledem na ε zvolit tak, aby byl výraz

$$|f(x) - b| = |(5x - 4) - 11| = 5\,|x - 3|$$

menší než ε. Položíme $\delta = \varepsilon/5$, resp. $5\delta = \varepsilon$.

Nyní, pokud je dáno $\varepsilon > 0$, umíme najít $\delta > 0$ takové, že pokud je $|x - 3| < \delta$, potom je $|(5x - 4) - 11| = 5\,|x - 3| < 5\delta = \varepsilon$. Tedy z předpokladu $|x - 3| < \delta$ vyplývá nerovnost $|f(x) - 11| < \varepsilon$. Tím jsme ověřili předpoklady definice a potvrdili, že hodnota zadané limity je skutečně rovna 11.

Zmiňme ještě okrajově, co znamená, že funkce f nemá v bodě a limitu. Máme tím na mysli, že se nám nepodařilo najít žádnou hodnotu b, která by vyhovovala podmínkám Definice 6.2.2. Ke každému $b \in \mathbb{R}$ se nám tedy podaří najít takovou hodnotu $\varepsilon > 0$, že pro jakékoliv $\delta > 0$ bude alespoň pro jednu z hodnot $x \in (x - \delta, 0) \cup (0, x + \delta)$ platit



(a) Pro ε na tomto obrázku existuje δ-okolí bodu a takové, aby všechna x z tohoto okolí měla funkční hodnoty z ε-okolí bodu b.

(b) Existuje však takové ε, že není možné nalézt δ-okolí bodu a tak, aby všechna x z tohoto okolí měla funkční hodnoty z ε-okolí bodu b. V tomto konkrétním případě je to dáno tím, že všechna x z jakéhokoliv pravostranného okolí bodu a mají funkční hodnotu jistě větší než $b+\varepsilon$.

Obrázek 6.12: Bod b není podle Definice 6.2.2 limitou funkce $f(x)$ v bodě a.

$f(x) \notin (b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)$. Na Obrázku 6.12 je zobrazen případ, kde funkce f nemá limitu v bodě a. Je ukázáno, že zobrazený bod b není limitou funkce f v bodě a. Stejně tak bychom ještě museli ukázat, že i pro jakýkoliv jiný bod b nebudou splněny podmínky Definice 6.2.2.

Pomocí limit jsou definovány některé pojmy, které běžně používáme. Zmíníme například pojem průměrné a okamžité rychlosti.

Příklad 6.5

6.5. Pojem průměrné rychlosti je dostatečně dobře znám. Urazíme-li vzdálenost s z Ústí nad Labem do Liberce (předpokládejme vzdálenost obou míst $s = 100$ km) za dobu $t = 2$ hodiny, potom naše průměrná rychlost $\overline{v}$ během cesty byla 50 km/h, neboť je

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{100}{2} = 50.$$

Během této cesty nám tachometr v autě neukazoval stále rychlost $\overline{v} = 50$ km/h, nýbrž se tato hodnota neustále měnila, tj. V libovolném čase t tato hodnota mohla být různá. Rychlost, kterou nám ukazuje tachometr, nazýváme *okamžitá rychlost* a její velikost v čase t_0 vypočteme pomocí vztahu

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Vyšetřováním uvedené limity zjišťujeme, jaká je průměrná rychlost pohybu, když se časový úsek od t do t_0 (resp. od t_0 do t) zkracuje, tj. jaká je průměrná rychlost pro $t - t_0 = \Delta t \to 0$.

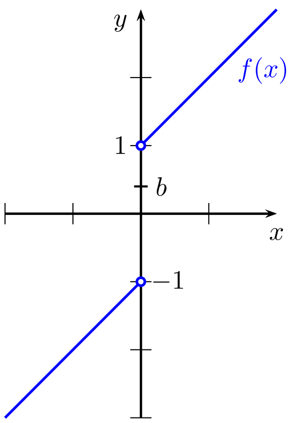
Stejně jako jsme u spojitosti funkce pracovali s pojmem jednostranné spojitosti, budeme i nyní pracovat s pojmem jednostranné limity. V případě limity zleva uvažujeme pouze ty hodnoty x, které leží vlevo od hodnoty a, v případě limity zprava pracujeme pouze s hodnotami napravo od bodu a. Význam pojmu se tím nezmění. Stále sledujeme, k jakým hodnotám se přibližuje funkce f při přibližování se k bodu a. Nyní však uvažujeme dvě rozdílné situace; když se bod x na vodorovné číselné ose blíží k číslu a pouze zleva, v druhém případě pouze zprava.

Definice 6.2.3. Řekneme, že číslo b je limitou funkce $f(x)$ v bodě a zleva, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (a-\delta, a)$ je splněna podmínka $|f(x) - b| < \varepsilon$. Řekneme, že číslo b je limitou funkce $f(x)$ v bodě a zprava, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a+\delta)$ je splněna podmínka $|f(x)-b| < \varepsilon$. Skutečnost, že číslo b je limitou funkce $f(x)$ pro x jdoucí k a zleva, resp. zprava, vyjádříme zápisem

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Příklad 6.6

6.6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x + \dfrac{|x|}{x}\right)$, resp. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \dfrac{|x|}{x}\right)$.



Řešení: Nejprve se zaměříme na limitu zleva. Předpokládáme-li $x \to 0^-$, potom musí být všechna uvažovaná x záporná. Víme, že pro $x < 0$ je $|x| = -x$, proto můžeme výraz $\left(x + \frac{|x|}{x}\right)$ nahradit výrazem $\left(x + \frac{-x}{x}\right) = x - 1$. Analogicky k Příkladu 6.9 bychom ukázali, že

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1.$$

Pro $x \to 0^+$ mají všechna uvažovaná x kladnou hodnotu, proto $|x| = x$ a platí $\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \left(x + \frac{x}{x}\right) = x + 1$. Snadno bychom pak dokázali, že

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1.$$

Ukazuje se ovšem, že (oboustranná) limita funkce v bodě nula nemůže existovat. Ať totiž zvolíme za možnou hodnotu limity jakékoliv číslo b, potom při $\varepsilon < 1$ nalezneme v každém, třeba sebemenším okolí bodu 0 takovou hodnotu x, pro níž je $|f(x) - b| > 1 > \varepsilon$ a požadavky vyslovené v Definici 6.2.2 proto nemohou být splněny.

Právě uvedený příklad ilustruje, že funkce f může mít v bodě a limitu tehdy a pouze tehdy, jestliže existují obě jednostranné limity a obě tyto limity mají stejnou hodnotu.

Věta 6.2.4. *Funkce $f(x)$ má v bodě a limitu rovnou číslu b tehdy a pouze tehdy, jestliže existují obě jednostranné limity a současně platí*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Právě vyslovená věta má tvar tzv. nutné a postačující podmínky. Znamená to, že pokud existuje oboustranná limita, potom existují i obě jednostranné limity a jejich hodnoty se rovnají hodnotě oboustranné limity. Současně platí, že pokud existují obě jednostranné limity a mají stejnou hodnotu, potom existuje i oboustranná limita a tato má stejnou hodnotu jako obě jednostranné limity. Pokud tedy neexistuje alespoň jedna z jednostranných limit nebo se hodnoty jednostranných limit nerovnají, oboustranná limita neexistuje.

Výpočet limity funkce

V následujících odstavcích uvedeme několik vět, které v některých případech významně usnadňují výpočet limity funkce.

První z nich má tvar nutné a postačující podmínky. Odkážeme se přitom na zjevnou podobnost Definice 6.2.2 a Definice 6.1.2 ze strany 320. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, znamená to podle uvedené definice, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ platí pro všechna x vyhovující nerovnosti $|x - a| < \delta$, tedy i pro všechna x vyhovující nerovnosti $0 < |x - a| < \delta$. To ale znamená, že hodnota funkce $f(x)$ v bodě a je rovna limitě funkce $f(x)$ v bodě a.

Věta 6.2.5. *Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a tehdy a pouze tehdy, je-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Právě uvedená věta nám umožňuje snadno vypočítat limity celé řady funkcí. Z Vět 6.1.9, 6.1.7 a 6.1.8 vyplývá, že takzvané elementární funkce jsou spojité na svých definičních oborech. Máme-li určit limitu nějaké elementární funkce v bodě, ve které je tato funkce definována, potom stačí vypočítat funkční hodnotu v tomto bodě a tu položit rovnu hledané limitě.

Příklad 6.7

6.7. Vypočteme limitu $\lim\limits_{x\to 4} \left(x^2 + 10\right)$.

Řešení: Z Vět 6.1.9 a 6.1.7 plyne, že funkce $f(x) = x^2 + 10$ je spojitá na množině $\mathbb{R}$, je tedy spojitá i pro $x = 4$. Použitím Věty 6.2.5 dostaneme

$$\lim_{x\to 4} \left(x^2 + 10\right) = f(4) = 4^2 + 10 = 26.$$

Věta 6.2.5 nám také umožňuje snadno vypočítat hodnotu limity uvedené v 6.4. Funkce $f(x) = 5x - 4$ je elementární funkce, je spojitá na $\mathbb{R}$, a proto lze k výpočtu limity v daném bodě použít pouze výpočet funkční hodnoty v zadaném bodě.

Dále uvedeme bez důkazu věty, které nám usnadní výpočet limity v mnoha dalších úlohách.

Věta 6.2.6. *Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$. Nechť platí rovnosti* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$. *Potom platí i rovnosti*

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|, \tag{6.5}$$

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B, \tag{6.6}$$

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = A - B, \tag{6.7}$$

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B. \tag{6.8}$$

Je-li $B \neq 0$, potom platí i rovnost $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Uvedené vzorce říkají, že při splnění podmínek věty je limita ze součtu dvou funkcí v daném bodě rovna součtu limit jednotlivých funkcí v daném bodě. Uvedené vzorce lze snadno rozšířit i na větší počet členů, resp. na ostatní uvedené početní operace. Stejně tak zůstane Věta 6.2.6 v platnosti, nahradíme-li v ní všude slovo limita slovním spojením limita zleva, resp. limita zprava.

Příklad 6.8

6.8. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 3} \frac{7x + 9}{4x^2 - 3x - 12}.$$

Řešení: Nejprve vyšetříme limity $\lim_{x\to 3}(7x + 9)$ a $\lim_{x\to 3}(4x^2 - 3x - 12)$. Je

$$\lim_{x\to 3}(7x + 9) = \lim_{x\to 3} 7x + \lim_{x\to 3} 9 = \Big(\lim_{x\to 3} 7\Big) \cdot \Big(\lim_{x\to 3} x\Big) + \lim_{x\to 3} 9$$

(pokud limity na pravé straně rovnosti existují). Lze snadno dokázat, že pro limitu z konstantní funkce $f(x) = c$ platí $\lim_{x\to a} c = c$ pro jakékoliv $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Proto je $\lim_{x\to 3} 7 = 7$, resp. $\lim_{x\to 3} 9 = 9$. Funkce $f(x) = x$ je elementární funkcí definovanou v bodě $x = 3$, je tedy v tomto bodě spojitá a platí $\lim_{x\to 3} x = 3$. Proto je $\lim_{x\to 3}(7x + 9) = 7 \cdot 3 + 9 = 30$.

Podobně můžeme rozepsat i výpočet druhé limity. Je (s přihlédnutím k rovnosti $\lim_{x\to a} c = c$)

$$\lim_{x\to 3}(4x^2 - 3x - 12) = 4 \cdot \lim_{x\to 3} x^2 - 3 \cdot \lim_{x\to 3} x - 12 = 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 12 = 15,$$

neboť i funkce $f(x) = x^2$ je elementární funkce definovaná v bodě $x = 3$, a tedy v tomto bodě spojitá. Platí tedy

$$\lim_{x\to 3} \frac{7x + 9}{4x^2 - 3x - 12} = \frac{\lim_{x\to 3}(7x + 9)}{\lim_{x\to 3}(4x^2 - 3x - 12)} = \frac{30}{15} = 2.$$

Samozřejmě že výpočet lze provést i tak, že si uvědomíme, že uvedená funkce je elementární, a ověříme, že je definovaná v bodě $x = 3$. Tím bychom ověřili, že je v tomto bodě spojitá a limitu vypočetli jakožto funkční hodnotu v bodě $x = 3$. Výše popsaný výpočet ukazuje použití Věty 6.2.6.

Ukazuje se, že výpočet limity funkce f v bodě a je snadný, je-li funkce f v bodě a spojitá. Obtížnější situace nastane, jestliže funkce v bodě a není definována a není v tomto bodě tedy ani spojitá. Potom nám může pomoci následující věta.

Věta 6.2.7. *Předpokládejme, že funkce f má v bodě a limitu rovnu číslu b. Nechť dále platí, že pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a platí rovnost $f(x) = g(x)$. Potom v bodě a existuje i limita funkce g a platí rovnost*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b. \tag{6.9}$$

Důkaz. Důkaz právě vyslovené věty je snadný. Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = b$, potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro všechna $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ je $|f(x) - b| < \varepsilon$. Podle předpokladů Věty 6.2.7 jsou si funkce f a g rovny na jistém prstencovém okolí bodu a. Nechť je poloměr tohoto okolí roven δ_2. Potom pro všechna $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$ je $f(x) = g(x)$. Položme nyní menší z obou hodnot δ_1, δ_2 rovnu hodnotě δ (v případě rovnosti hodnot δ_1 a δ_2 je $\delta_1 = \delta_2 = \delta$). Pro všechna $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ potom platí $f(x) = g(x)$ a současně $|f(x) - b| < \varepsilon$. Potom také platí $|g(x) - b| < \varepsilon$, z čehož plyne, že funkce $g(x)$ má v bodě a limitu a platí vztah $\lim_{x\to a} g(x) = b$. □

Příklad 6.9

6.9. Z Tabulek 6.1 a 6.2 jsme vypozorovali, že $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$. Ukažme, že tato rovnost skutečně platí.

Řešení: Zadanou funkci můžeme pro všechna $x \neq 2$ upravit následujícím způsobem

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2.$$

Podmínka $x \neq 2$ musí být splněna, abychom se vyhnuli krácení nulou. Pro všechna $x \neq 2$ tedy platí rovnost $f(x) = g(x)$, kde $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ a $g(x) = x + 2$. Funkce $g(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$, proto hodnotu limity $\lim_{x\to 2} x + 2$ vypočteme snadno podle Věty 6.2.5 výpočtem funkční hodnoty funkce g v bodě $x = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} g(x) &= \lim_{x\to 2} x + 2 \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Pro všechna $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ je $f(x) = g(x)$ a současně platí $\lim\limits_{x\to 2} x + 2 = 4$. Potom podle Věty 6.2.7 je také

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Jinými slovy, dokázali jsme, že čím blíž je hodnota x číslu dva, tím blíž je hodnota výrazu $\frac{x^2-4}{x-2}$ číslu čtyři.

S pomocí Vět 6.2.5 až 6.2.7 vypočtěte následující limity.

6.10. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 7x + 6}{x^2 + 3x - 4}$

6.11. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x}$

6.12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5x^2 - 3x}{x}$

6.13. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

6.14. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$

6.15. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2}$

V některých případech se nám nepodaří nalézt k funkci f (která není definována v bodě a) funkci g (která je v bodě a definována) tak, aby obě splňovaly podmínky Věty 6.2.7. Potom nám může pomoci následující, tzv. „sendvičová“ věta.

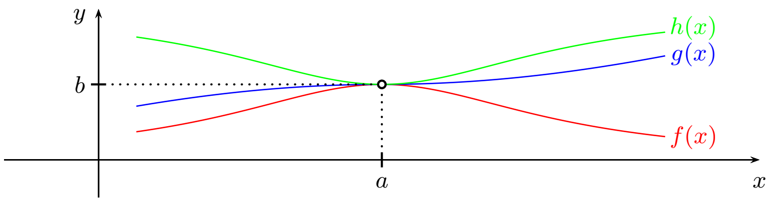
Věta 6.2.8. *Předpokládejme, že existuje okolí bodu a takové, že pro všechna $x \neq a$ z tohoto okolí jsou splněny nerovnosti $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Dále předpokládejme, že jsou splněny rovnosti*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Potom existuje i limita $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Věta je uvedena bez důkazu, nicméně Obrázek 6.13 dostatečně naznačuje její smysl. Poznamenejme, že analogická věta platí i pro jednostranné limity.



Obrázek 6.13: Grafická interpretace sendvičové věty

V následujícím příkladu dokážeme platnost důležité rovnosti. Tato a další následně uvedené rovnosti hrají důležitou roli při odvozování vzorců v dalších kapitolách.

Příklad 6.16

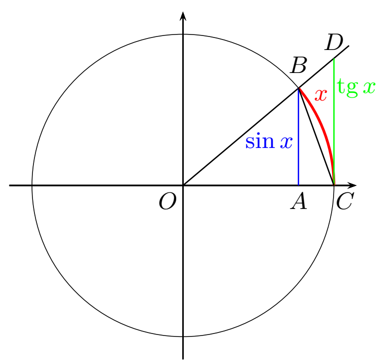
6.16. Ukažme, že platí rovnost

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{6.10}$$

Řešení: Z definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice nahlédneme, že pro obsah trojúhelníku OCB, resp. trojúhelníku OCD, resp. kruhové výseče OCB platí vztahy

$$\begin{aligned} S(\triangle OCB) &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}, \text{ resp.} \\ S(\triangle OCD) &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \text{ resp.} \\ S(\widehat{OCB}) &= \frac{\pi r^2}{2\pi}\cdot x = \frac{\pi\cdot 1^2}{2\pi}\cdot x = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Z obrázku nahlédneme, že pro všechna x vyhovující nerovnostem $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tedy pro všechna $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, je obsah trojúhelníku OCB menší než obsah kruhové výseče OCB, a tento je menší než obsah trojúhelníku OCD. To znamená, že pro uvedená x platí nerovnosti



$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} &< \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \\ \sin x < x &< \operatorname{tg} x, \\ 1 < \frac{x}{\sin x} &< \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}, \\ 1 > \frac{\sin x}{x} &> \cos x \end{aligned} \tag{6.11}$$

Nerovnosti ve vzorci (6.11) představují dolní a horní ohraničení funkce $y = \frac{\sin x}{x}$ pro všechna $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dále platí

$$\lim_{x\to 0^+} 1 = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1.$$

Podle Věty 6.2.8 ve verzi pro pravostranné okolí dostaneme rovnost

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ zavedeme substituci $x = -y$, tím dostaneme

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(-y)}{(-y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Tím jsme ukázali, že obě jednostranné limity existují a jsou si rovny. Podle Věty 6.2.4 tak rovnost (6.10) platí.

Kromě vzorce (6.10) lze odvodit i další důležité vztahy, které zde uvedeme již bez důkazu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{6.12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \tag{6.13}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{6.14}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{(1+x)^n} - 1}{x} = \frac{n}{m} \tag{6.15}$$

V následujících příkladech uvedeme použití vzorců (6.12) až (6.15) v několika úlohách.

Příklad 6.17

6.17. Vypočteme hodnotu limity $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$.

Řešení: Limitu upravíme tak, aby k jejímu výpočtu bylo možné použít vzorec (6.10). Potom je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Příklad 6.18

6.18. Vypočteme hodnotu limity $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

Řešení: Limitu opět upravíme tak, aby bylo možné použít vzorec (6.10).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 3 \cdot 1 = 3.$$

V uvedeném příkladu jsme použili substituci $3x = z$. Je-li $x \to 0$, potom i $3x \to 0$, tedy $z \to 0$.

Příklad 6.19

6.19. Vypočteme hodnotu limity $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Řešení: Opět použijeme vzorec (6.10).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

6.2.1 Nevlastní limita ve vlastním bodě

Tuto kapitolu začneme následujícím pozorováním. Představme si, že po dálnici jedeme autem rychlostí $v_a = 130$ km/h. Dojedeme autobus o délce $l = 20$ m, který se pohybuje rychlostí v. Ve chvíli, kdy se nacházíme ve vzdálenosti 30 m za autobusem, jej přejetím do vedlejšího jízdního pruhu začneme předjíždět. V okamžiku, kdy se budeme nacházet 30 m před autobusem, se zařadíme zpět do původního jízdního pruhu a předjíždění skončí. Otázka zní, jak dlouho bude předjíždění autobusu za těchto podmínek trvat?

Je zřejmé, že doba předjíždění t bude záviset na rychlosti v, kterou se pohybuje autobus. Doba předjíždění je tedy funkcí rychlosti, což budeme značit symbolem $t(v)$. Předjíždění bude trvat tak dlouho, až rozdíl v ujetých vzdálenostech automobilu a autobusu bude roven 80 metrům, tj. $0,08\ \mathrm{km}$. Je tedy

$$\begin{aligned} 130 \cdot t - v \cdot t &= 0,08 \\ t \cdot (130 - v) &= 0,08 \\ t &= \frac{0,08}{130 - v}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Ze vzorce (6.16) snadno vypočteme dobu potřebnou k předjetí autobusu. V Tabulce 6.3 je pro některé rychlosti autobusu uveden čas t potřebný k předjetí a také vzdálenost s, kterou přitom automobil urazí. K tomuto příkladu je zajímavá diskuse o tom, jak se

v [km/h]	100	110	120	125	129
t [s]	$9,6$	$14,4$	$28,8$	$57,6$	288
s [m]	$346,\overline{6}$	520	1 040	2 080	10 400

Tabulka 6.3: Dráha a doba předjíždění autobusu automobilem

mění čas a vzdálenost potřebná k předjetí autobusu, jestliže se rychlost v autobusu blíží k hodnotě $130\ \mathrm{km/h}$. Pohledem do Tabulky 6.3 zjistíme, že při rychlostech blízkých $130\ \mathrm{km/h}$ začne doba předjíždění značně narůstat. V okamžiku, kdy by rychlost autobusu byla rovna $130\ \mathrm{km/h}$, potom by měly automobil i autobus stejnou rychlost a „předjíždění“ by trvalo nekonečně dlouhou dobu.

Všimněte si, že pokud se v blíží k hodnotě $130\ \mathrm{km/h}$ (zleva), potom se jmenovatel zlomku ve vzorci (6.16) blíží k nule (zprava), hodnota čitatele je různá od nuly a celková hodnota zlomku roste nade všechny meze.

V případě některých funkcí se můžeme setkat s případem, kdy v jistých bodech definičního oboru roste funkční hodnota nade všechny meze, nebo klesá pod všechny meze. Tím máme na mysli, že pro každou mez (sebevětší číslo), kterou si stanovíme, lze najít takovou hodnotu x v dostatečné blízkosti bodu a, že funkční hodnota v bodě x bude větší než uvedená mez.

Příklad 6.20

6.20. Uvažujme vybrané hodnoty funkce $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ z blízkého okolí bodu $x = 2$. V Tabulce 6.4 jsou uvedeny hodnoty funkce $f(x)$ ve vybraných bodech. Je zřejmé,

x	1	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	3
$f(x)$	1	100	10 000	1 000 000	???	1 000 000	10 000	100	1

Tabulka 6.4: Vybrané hodnoty funkce $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

že čím blíž se bod x nachází k číslu 2, tím je příslušná funkční hodnota vyšší. Otázkou zůstává, zda při tomto zvětšování funkční hodnoty existuje nějaká mez, kterou již nemůžeme překročit, ať se k bodu $x = 2$ přiblížíme sebevíc. V Tabulce 6.4 vidíme, že pokud se bod x přiblíží k číslu 2 na vzdálenost $0,001$ (a to zleva i zprava), je funkční hodnota rovna jednomu milionu. Lze se přiblížit k číslu 2 tak, aby byla funkční hodnota větší než např. 100 000 000? Odpověď získáme řešením nerovnice

$$\frac{1}{(x-2)^2} > 100\,000\,000.$$

Jejími kořeny jsou všechna x vyhovující nerovnosti $0 < |x-2| < 0,000\,1$, tedy všechna $x \in (1,999\,9,\ 2) \cup (2,\ 2,000\,1)$. Při obecném postupu se ptáme, zda je možné najít takové okolí bodu $x = 2$, aby všechny funkční hodnoty pro x z tohoto okolí byly větší, než je hodnota K. Odpověď získáme řešením následující nerovnice. Předpokládejme přitom bez újmy na obecnosti, že $K > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-2)^2} &> K && \ldots\ \textit{funkční hodnota je větší než mez } K \\ (x-2)^2 &< \frac{1}{K} && \ldots\ \textit{algebraická úprava} \\ |x-2| &< \frac{1}{\sqrt{K}} && \ldots\ \textit{nerovnice s lineárním členem v absolutní hodnotě} \end{aligned}$$

Tato nerovnice má řešení, s přihlédnutím k podmínce $x \neq 2$ lze řešení nerovnice zapsat ve tvaru
$$x \in \left(2 - \frac{1}{\sqrt{K}},\, 2\right) \cup \left(2,\, 2 + \frac{1}{\sqrt{K}}\right).$$
Ukázali jsme, že pro tato x bude hodnota funkce $f(x) = 1/(x-2)^2$ větší než libovolně stanovená hodnota K. O takovém případě řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x = 2$ nevlastní limitu $+\infty$.

Definice 6.2.9. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu ∞, jestliže ke každému reálnému číslu K existuje číslo $\delta > 0$ takové, že nerovnost $f(x) > K$ platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - a| < \delta$. Uvedenou vlastnost zapisujeme rovností
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$
Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu K existuje číslo $\delta > 0$ takové, že nerovnost $f(x) < K$ platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - a| < \delta$. Popsanou vlastnost zapíšeme
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

V rámci uvedené definice poznamenejme, že pokud bychom uvažovali pouze příslušná jednostranná okolí bodu a, dostali bychom analogicky definici nevlastní limity funkce zleva, resp. zprava. Blíže viz Příklady 6.21 a 6.22.

Historická poznámka 6.2.10. Právě vyslovená definice vychází z pojetí nekonečna tak, jak ho můžeme nalézt v antické matematice. Staří Řekové si uvědomovali nesnáze spojené s pojmem nekonečna a snažili se tomuto pojmu v úvahách vyhnout. Místo aby řekli, že hodnota je nekonečně velká, formulovali danou situaci tak, že daná hodnota je větší než jakákoliv myslitelná hodnota. Zde můžeme vystopovat zárodky formulace: „roste nade všechny meze“, která se často používá v souvislosti s nekonečně velkými hodnotami.

Příklad 6.21

6.21. Podle definice ověřte, že $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Řešení: Podle závěrečné poznámky v Definici 6.2.9 musíme ukázat, že pro každé $K > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (0, 0 + \delta) = (0, \delta)$ je $f(x) = 1/x > K$. Zvolme libovolné $K > 0$. Řešením nerovnice $1/x > K$ jsou všechna $x \in (0; 1/K)$. (Ověřte!) Položme $\delta = 1/K$. Potom pro každé $K > 0$ existuje δ takové, že pro všechna $x \in (0, \delta)$ je $f(x) > K$, což jsme měli dokázat.

Příklad 6.22

6.22. Podle definice ověřte, že $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Řešení: Podle Definice 6.2.9 musíme ukázat, že pro každé K existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (0 - \delta, 0) = (-\delta, 0)$ je $f(x) = 1/x < K$. Bez újmy na obecnosti zvolme libovolné $K < 0$ a položme $\delta = |1/K|$. Řešením nerovnice $1/x < K$ jsou všechna $x \in (1/K, 0) = (-\delta, 0)$. (Ověřte!) Tedy pro každé K existuje δ takové, že pro všechna $x \in (-\delta, 0)$ platí $f(x) < K$, což jsme měli dokázat.

Poznamenejme, že Příklady 6.21 a 6.22 ukazují, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ neexistuje. Věta 6.2.4 říká, že pokud limita funkce f v bodě a existuje, potom také existují obě jednostranné limity v bodě a a tyto mají stejnou hodnotu. Protože jednostranné limity z uvedených příkladů měly rozdílné hodnoty, nemůže (tzv. oboustranná) limita existovat.

S nevlastními limitami se často setkáváme v případech funkcí ve tvaru zlomku, kdy po dosazení hodnoty a v čitateli zlomku dostaneme nenulovou hodnotu a ve jmenovateli zlomku je nula, tzn. v limitách typu $\frac{A\neq 0}{0}$. Při výpočtu takové limity je vhodné určit jednostranné limity funkce v daném bodě.

Příklad 6.23

6.23. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{x-5}$.

Řešení: Zkusíme-li dosadit do zlomku za x číslo 5, dostaneme výraz ve tvaru $10/0$. Vypočteme proto jednostranné limity funkce. Každou z obou limit vypočteme odlišným způsobem, abychom ukázali více možných způsobů. V případě limity zleva provedeme substituci $t = x - 5$. Potom je $x = t + 5$ a pro $x \to 5^-$ je $t \to 0^-$ (blíží-li se hodnota x k pěti zleva, potom všechny uvažované hodnoty x jsou menší než pět a výraz $x - 5$ musí být pro tyto hodnoty x záporný, tj. blíží se k nule zleva). Potom je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^-}\frac{x+5}{x-5} &= \lim_{t\to 0^-}\frac{t+10}{t} = \lim_{t\to 0^-}\frac{t}{t} + \lim_{t\to 0^-}\frac{10}{t} = 1 + 10\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}\\ &= 1 + 10(-\infty) = 1 + (-\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili některé z vlastností nekonečně velkých veličin, které jsou přehledně uvedeny v následující části učebnice, viz Poznámka 6.2.14 na straně 340.

Při výpočtu pravostranné limity budeme postupovat rychleji bez použití substituce.

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{x+5}{x-5} = \frac{10}{0^+} = \infty$$

Použili jsme poněkud symbolický zápis, který blíže vysvětlíme. Blíží-li se x k hodnotě pět, potom se výraz $x + 5$ blíží k hodnotě deset - proto je v čitateli zlomku symbolicky uvedeno číslo 10. Pro $x \to 5^+$ jsou všechny hodnoty x větší než pět (pokuste si představit danou situaci na číselné ose). V takovém případě se výraz $x - 5$ blíží k nule a všechny tyto hodnoty jsou kladné (neboť od hodnoty, která je větší než pět odečítáme číslo pět - výsledek musí být kladný). Symbolem 0^+ tedy označujeme, že daná hodnota se blíží nule a všechny tyto hodnoty jsou kladné. Již víme, že pokud se hodnota ve jmenovateli blíží nule a čitatel je různý od nuly, potom hodnota zlomku roste nade všechny meze. Hodnota čitatele i jmenovatele je kladná, celková hodnota zlomku musí být také kladná. Proto je daná limita rovna $+\infty$.

Je $\lim_{x\to 5^-}\frac{x+5}{x-5} = -\infty$, $\lim_{x\to 5^+}\frac{x+5}{x-5} = \infty$. Obě jednostranné limity mají různou hodnotu, oboustranná limita tedy neexistuje.

Příklad 6.24

6.24. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{(x^2-4)^2}$.

Řešení: Zkusíme-li dosadit do zlomku za x číslo -2, dostaneme výraz ve tvaru $-1/0$. Vypočteme proto jednostranné limity funkce.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x+1}{(x^2-4)^2} = \frac{-2+1}{((-2^-)^2-4)^2} = \frac{-1}{(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Opět se jedná o symbolický zápis. Je-li $x \to -2^-$, potom všechna x leží na číselné ose nalevo od čísla -2 a jejich druhá mocnina je větší než čtyři. Výraz $x^2 - 4$ se proto blíží k nule a všechny tyto hodnoty jsou kladné, což je naznačeno symbolem 0^+. Tento výraz umocníme na druhou (symbol $(0^+)^2$, což se opět projeví tím, že dostaneme výraz, který se blíží k nule a všechny hodnoty jsou kladné. V čitateli se nachází záporné číslo, podíl záporného a kladného čísla musí být záporné číslo. Hodnota této limity proto bude záporná a přitom „roste“ přes všechny meze. Hodnota limity je proto $-\infty$.

Analogicky vypočteme pravostrannou limitu.

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x+1}{(x^2-4)^2}=\frac{-2+1}{((-2^+)^2-4)^2}=\frac{-1}{(0^-)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Je-li $x\to-2^+$, potom všechna x leží na číselné ose napravo od čísla -2 a jejich druhá mocnina je menší než čtyři. Výraz x^2-4 se proto blíží k nule a všechny tyto hodnoty jsou záporné (od čísla menšího než čtyři odečítáme číslo čtyři), což je naznačeno symbolem 0^-. Tento výraz opět umocníme na druhou (symbol $(0^-)^2$, což se opět projeví tím, že výsledný výraz v jmenovateli se blíží k nule a všechny hodnoty jsou kladné. V čitateli se nachází záporné číslo. Podíl záporného a kladného čísla je opět záporné číslo. Hodnota této limity je proto $-\infty$.

Obě jednostranné limity mají stejnou hodnotu $-\infty$. Oboustranná nevlastní limita existuje a její hodnota je $-\infty$.

6.2.2 Limita v nevlastním bodě

Dosud jsme se zabývali vyšetřováním vlastností funkce $f(x)$ v nejbližším okolí bodu a. Často je však vhodné vědět, jak se vyvíjejí funkční hodnoty pro $x\to-\infty$, resp. pro $x\to\infty$, tj. když se x vzdaluje na číselné ose značně doleva, resp. značně doprava od počátku. V takovém případě jsou v zásadě možné tři různé případy. V prvním z nich se funkční hodnota stále více přibližuje jisté, konečně velké, limitní hodnotě. Pak říkáme, že funkce má v nevlastním bodě vlastní limitu. Ve druhém z případů rostou funkční hodnoty nad, resp. pod jakoukoliv mez. V takovém případě říkáme, že funkce má v nevlastním bodě nevlastní limitu. V posledním případě se funkční hodnoty neblíží ani nějaké konkrétní hodnotě, ani nerostou mimo všechny meze. V takovém případě funkce nemá v nevlastním bodě limitu.

Vlastní limita v nevlastním bodě

Pojem vlastní limity v nevlastním bodě si nejprve přiblížíme ilustračním příkladem.

Příklad 6.25

6.25. Uvažujme funkci $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$. Naznačme chování funkce pro velké hodnoty x.

Řešení: V Tabulce 6.5 jsou uvedeny některé hodnoty funkce pro rostoucí hodnotu x. Z uvedených hodnot snadno zjistíme, že s rostoucí hodnotou x se funkční hodnoty stále

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$f(x)$	2,1	2,01	2,001	2,000 1	2,000 01	2,000 001

Tabulka 6.5: Vybrané hodnoty funkce $f(x)=2+\frac{1}{x}$

víc blíží číslu dva. Toto pozorování zapisujeme rovností

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$$

a čteme: „Limita funkce $f(x)=2+1/x$ pro x jdoucí do nekonečna je rovna dvěma.“

V následující definici budeme předpokládat, že b značí konečně velké číslo a není tedy rovno ani $-\infty$ ani ∞.

Definice 6.2.11. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě ∞ vlastní limitu b, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje x_0 takové, že pro všechna $x>x_0$ je splněna nerovnost $|f(x)-b|<\varepsilon$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $-\infty$ vlastní limitu b, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje x_0 takové, že pro všechna $x<x_0$ je splněna nerovnost $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Častým případem při výpočtu limit je použití rovnosti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{6.17}$$

Dokážeme tuto rovnost pomocí Definice 6.2.11. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Vzhledem k charakteru úlohy položíme $x_0 = 1/\varepsilon$. Potom pro každé $x > x_0$ je $x > 1/\varepsilon$ a také $1/x < \varepsilon$ a platí

$$|f(x) - b| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon,$$

což jsme měli dokázat.

Právě dokázané tvrzení lze rozšířit, což učiníme bez důkazu v následujícím tvrzení.

Věta 6.2.12. *Předpokládejme, že* $p > 0$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0. \tag{6.18}$$

6.26. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x}$. **Příklad 6.26**

Řešení: K výpočtu použijeme Věty 6.2.6 a 6.2.12. Potom je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1.$$

6.27. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1}$. **Příklad 6.27**

Řešení: K výpočtu použijeme výsledek předchozího příkladu.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

6.28. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2}{3+5x^3}$. **Příklad 6.28**

Řešení: Při výpočtu vytkneme z čitatele i jmenovatele výraz x^3 a tento následně zkrátíme.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10x^2}{3+5x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{10}{x}\right)}{x^3\left(\frac{3}{x^3}+5\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{10}{x}}{\frac{3}{x^3}+5} = \frac{0}{0+5} = 0$$

6.29. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-2x^2+1}{x^3+5x-1}$. **Příklad 6.29**

Řešení: Při výpočtu opět vytkneme z čitatele i jmenovatele výraz x^3 a tento zkrátíme.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x^2+1}{x^3+5x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \frac{3+0+0}{1+0+0} = 3.$$

Při práci s vlastními limitami v nevlastním bodě lze odvodit řadu dalších tvrzení analogických k Větě 6.2.12. Uveďme bez důkazu alespoň dvě z nich. Předpokládáme, že platí $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \tag{6.19}$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} = 0 \tag{6.20}$$

Se vzorcem (6.19) jsme se již setkali v Kapitole 5.6.7. Vzorec (6.19) se často používá k definici *Eulerova čísla* e.

Příklad 6.30

6.30. V Příkladu 6.1 jsme teplotu kávy T v čase t vyjádřili přibližným vzorcem $T(t) = 25 + 65 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}5t}$. Vypočtěte limitu této funkce pro $t \to \infty$ a interpretujte výsledek.

Řešení: Při výpočtu použijeme vzorec (6.20). Je

$$\lim_{t\to\infty} 25 + 65 \cdot e^{-1{,}5t} = \lim_{t\to\infty} 25 + 65 \lim_{t\to\infty} e^{-1{,}5t} = 25 + 65 \cdot 0 = 25.$$

Získaná hodnota ukazuje na teplotu kávy po uplynutí dostatečně dlouhého času (teoreticky nekonečně dlouhého času). V podobných příkladech bývá touto hodnotou okolní teplota, neboť při chladnutí se teplota zahřátého tělesa blíží k teplotě okolního prostředí.

Nevlastní limita v nevlastním bodě

Čtenáři učebnice již jistě mají vybudovanou představu o pojmu vlastní a nevlastní limita, stejně tak o limitě ve vlastních i nevlastních bodech. Dokáží si tedy představit smysl tvrzení, že daná funkce má v nevlastním bodě nevlastní limitu. S tímto případem se setkáváme v situacích, kdy pro $x \to \pm\infty$ hodnota funkce míří k $-\infty$, resp. k ∞.

Definici uvedeme pouze pro ten případ, kdy pro $x \to \infty$ míří funkční hodnoty do $+\infty$. V takovém případě říkáme, že funkční hodnota roste nade všechny meze. Máme tím na mysli, že při stanovení jakékoliv meze $M \in \mathbb{R}$ lze vždy najít takovou hodnotu $x_0 \in D(f)$, za kterou jsou již příslušné funkční hodnoty větší, než je stanovená mez.

Definice 6.2.13. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě ∞ nevlastní limitu ∞, jestliže pro každé $M \in \mathbb{R}$ existuje $x_0 \in D(f)$ takové, že pro všechna $x > x_0$ je splněna nerovnost $f(x) > M$. Danou situaci zapisujeme rovností

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty. \tag{6.21}$$

Analogicky by potom zněly i definice ve zbývajících případech

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Poznámka 6.2.14. Mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$. Nechť pro obě platí rovnosti

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Potom i pro součet těchto funkcí platí vztah

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \infty.$$

Tuto rovnost bychom symbolicky zapsali $\infty + \infty = \infty$ a slovně vyjádřili tak, že součet dvou nekonečně velkých veličin je nekonečně velká veličina. Podobně lze vyjádřit i další symbolické vzorce pro práci s nekonečně velkými veličinami.

$$\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty & -\infty - \infty = -\infty + (-\infty) &= -\infty\\
\infty \cdot \infty &= \infty & (-\infty)\cdot(-\infty) &= \infty\\
\infty \cdot (-\infty) &= -\infty & (-\infty)\cdot\infty &= -\infty\\
A + \infty &= \infty & A - \infty = -\infty \pm A &= -\infty\\
c \cdot \infty &= \infty \quad \text{pro } c > 0 & c\cdot\infty &= -\infty \quad \text{pro } c < 0\\
c \cdot (-\infty) &= -\infty \quad \text{pro } c > 0 & c\cdot(-\infty) &= \infty \quad \text{pro } c < 0\\
\frac{A}{\infty} &= 0 & \frac{A}{-\infty} &= 0\\
\frac{c}{0^-} &= -\infty \quad \text{pro } c > 0 & \frac{c}{0^-} &= \infty \quad \text{pro } c < 0\\
\frac{c}{0^+} &= \infty \quad \text{pro } c > 0 & \frac{c}{0^+} &= -\infty \quad \text{pro } c < 0
\end{aligned}$$

Symbolem 0^-, resp. 0^+, v posledních dvou řádcích máme na mysli ten případ, kdy se hodnota nezávisle proměnné blíží k nule zleva, resp. zprava.

Kromě uvedených rovností existují i tzv. neurčité výrazy. Patří mezi ně například výrazy

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad 1^\infty \qquad \text{a další,}$$

kde symboly 0 a 1 představují limity funkcí s uvedenou hodnotou. Limity těchto typů je nutné vyšetřit jinými metodami.

Pro výpočet limit v nevlastním bodě $\pm\infty$ se často používají vzorce, které bez důkazu uvádíme v následující větě.

Věta 6.2.15. *Předpokládejme, že $p > 0$, $a > 1$. Potom je*

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty, \tag{6.22}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^p = \infty, \qquad \dots \textit{ za předpokladu, že } p \textit{ je sudé číslo} \tag{6.23}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^p = -\infty, \qquad \dots \textit{ za předpokladu, že } p \textit{ je liché číslo} \tag{6.24}$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{px} = \infty, \tag{6.25}$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \tag{6.26}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty. \tag{6.27}$$

6.31. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \big(x^4 + 5x^2 + 100\big)$. **Příklad 6.31**

Řešení: S využitím vzorce (6.22) můžeme uvedenou limitu symbolicky vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{x\to\infty} \big(x^4 + 5x^2 + 100\big) = \lim_{x\to\infty} x^4 + 5 \lim_{x\to\infty} x^2 + \lim_{x\to\infty} 100 = \infty + \infty + 100 = \infty.$$

6.32. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\mathrm{e}^{3x} \cdot \sqrt{x}\big)$. **Příklad 6.32**

Řešení: S využitím vzorců (6.22) a (6.25) můžeme uvedenou limitu symbolicky vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{x\to\infty} \big(\mathrm{e}^{3x} \cdot \sqrt{x}\big) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{3x} \cdot \lim_{x\to\infty} x^{1/2} = \infty \cdot \infty = \infty.$$

6.33. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{100}{\ln x}$. **Příklad 6.33**

Řešení: S využitím vzorce (6.27) můžeme limitu symbolicky vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{x\to\infty} \frac{100}{\ln x} = \frac{100}{\infty} = 0.$$

Příklady 6.31 až 6.33 ukázaly použití tzv. určitých výrazů ve výpočtu limity. Nyní si přiblížíme, jak vypočítat některé limity ve tvaru tzv. neurčitých výrazů jejich převedením na určité výrazy.

6.34. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \big(x^5 - 4x^3 + 25\big)$. **Příklad 6.34**

Řešení: V zadané limitě pracujeme s neurčitým výrazem ve tvaru $\infty - \infty$, neboť je

$$\lim_{x\to\infty} \big(x^5 - 4x^3 + 25\big) = \lim_{x\to\infty} x^5 - 4 \lim_{x\to\infty} x^3 + \lim_{x\to\infty} 25 = \infty - \infty + 25.$$

Při výpočtu si pomůžeme vytknutím výrazu x^3. Tím dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \big(x^5 - 4x^3 + 25\big) &= \lim_{x\to\infty} \left(x^3 \cdot \left(x^2 - 4 + \frac{25}{x^3}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to\infty} \left(x^2 - 4 + \frac{25}{x^3}\right) \\
&= \infty \cdot (\infty - 4 + 0) = \infty \cdot \infty = \infty.
\end{aligned}$$

Příklad 6.35

6.35. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+5x^2+100}{x^5-4x^3+25}$.

Řešení: V zadané limitě pracujeme s neurčitým výrazem typu $\frac{\infty}{\infty}$, jak plyne z výsledků Příkladů 6.31 a 6.34. Pomůžeme si opět vytknutím vhodného výrazu, tentokrát v čitateli i jmenovateli vytkneme výraz x^4. Potom je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+5x^2+100}{x^5-4x^3+25} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{100}{x^4}\right)}{x^4\left(x-\dfrac{4}{x}+\dfrac{25}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{100}{x^4}}{x-\dfrac{4}{x}+\dfrac{25}{x^4}}$$
$$= \frac{1+0+0}{\infty-0+0} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Příklad 6.36

6.36. Předpokládejme, že počet N registrovaných uživatelů herního webového serveru v čase t lze přibližně vyjádřit pomocí vzorce

$$N(t) = \frac{25\,200}{1+209\cdot e^{-0{,}85t}}, \qquad (t \geq 0)$$

kde t je čas měřený v letech od roku 2001. Vypočtěte a interpretujte limity

$$\lim_{t\to 0^+} N(t), \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{t\to\infty} N(t).$$

Řešení: Nejprve vypočteme limitu pro $t \to 0^+$. Zadaný předpis nám definuje funkci, která je spojitá v bodě $x = 0$. Proto v tomto bodě existuje oboustranná limita funkce a tato je rovna oběma jednostranným limitám. K výpočtu hodnoty limity stačí určit hodnotu $N(0)$.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{25\,200}{1+209\cdot e^{-0{,}85t}} = \frac{25\,200}{1+209\cdot e^{-0{,}85\cdot 0}} = \frac{25\,200}{1+209\cdot e^{0}}$$
$$= \frac{25\,200}{1+209\cdot 1} = \frac{25\,200}{210} = 120$$

Zjištěná hodnota nám říká, kolik zákazníků bylo registrováno na počátku uvažovaného období.

Limitu pro $t \to \infty$ vypočteme s použitím symbolického zápisu následujícím způsobem.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{25\,200}{1+209\cdot e^{-0{,}85t}} = \frac{25\,200}{1+209\cdot e^{-0{,}85\cdot\infty}} = \frac{25\,200}{1+209\cdot e^{-\infty}}$$
$$= \frac{25\,200}{1+209\cdot \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{25\,200}{1+209\cdot \frac{1}{\infty}} = \frac{25\,200}{1+209\cdot 0}$$
$$= \frac{25\,200}{1+0} = 25\,200$$

Vypočtená hodnota naznačuje, jaký počet registrovaných hráčů lze očekávat za nezměněných podmínek v dlouhodobém časovém horizontu (teoreticky po uplynutí nekonečně dlouhé doby).

Předchozí příklad ukázal, že hodnota limity v nevlastních bodech vyjadřuje přibližnou hodnotu funkce pro extrémně velké hodnoty argumentu funkce (kladné i záporné). Z tohoto pohledu je zajímavé sledovat limity v nevlastních bodech pro tzv. *růstové* funkce. Ty často popisují vývoj sledované veličiny v čase a hodnota limity v nevlastním bodě vyjadřuje jejich potenciálně nejvyšší možnou hodnotu. Tou byl v předchozím příkladě nejvyšší možný počet registrovaných hráčů. Dále se můžeme setkat s funkcemi, které popisují růst (populace, prodeje, výšky jedince atd.) a přitom zohledňují tzv. *saturační úroveň* (saturace - nasycení), tedy vyčerpávání zdrojů potřebných pro další růst populace, nasycení trhu při prodeji daného výrobku atd.

Mezi takové růstové funkce patří např. *logistická* funkce, *Gompertzova* funkce, *Korfova* funkce a další. Logistická funkce je dána předpisem

$$f(x) = \frac{s}{1 + a \cdot e^{-bt}}, \tag{6.28}$$

kde s, a a b jsou příslušné konstanty vyhovující danému modelu. Povšimněte si, že v Příkladu 6.36 byl počet registrovaných hráčů v čase odhadnut právě pomocí logistické funkce s parametry $s = 25\,200$, $a = 209$ a $b = 0,85$.

6.37. Předpokládejme, že růst jisté mikrobiologické kultury je modelován pomocí logistické funkce **Příklad 6.37**

$$N(t) = \frac{125}{1 + 7,3 \cdot e^{-0,54t}},$$

kde $N(t)$ je množství této kultury v gramech v čase t. Zjistěte, zda je velikost této mikrobiologické populace v čase omezená, a jestliže ano, tak jaká je maximální možná velikost této kultury.

Řešení: Při řešení této úlohy začneme vyšetřováním monotonie dané funkce. Z Kapitoly 5.6.5 víme, že funkce $y = e^{-0,54t}$ je klesající na $\mathbb{R}$. S rostoucí hodnotou t se tedy snižuje hodnota celého jmenovatele, a tím se (vzhledem ke kladné hodnotě jmenovatele) zvětšuje hodnota celého zlomku. Funkce $N(t)$ je tedy rostoucí na $\mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita uvedené funkce v nevlastním bodě ∞, potom je funkce ohraničená a hodnota vypočtené limity ukazuje hraniční mez, přes kterou již funkční hodnoty neporostou.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{125}{1 + 7,3 \cdot e^{-0,54t}} &= \frac{125}{1 + 7,3 \cdot \lim\limits_{t\to\infty} e^{-0,54t}} = \frac{125}{1 + 7,3 \cdot \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{e^{0,54t}}} \\
&= \frac{125}{1 + 7,3 \cdot \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{125}{1 + 7,3 \cdot \frac{1}{\infty}} = \frac{125}{1 + 7,3 \cdot 0} \\
&= \frac{125}{1 + 0} = 125
\end{aligned}$$

Funkce je shora ohraničena hodnotou 125. Pokud se tedy bude velikost populace vyvíjet (v souladu s modelem) po neomezený čas, dosáhne její množství hodnoty 125 gramů.

Kromě logistické funkce používáme často k modelování růstových jevů Gompertzovu funkci. Ta je dána předpisem

$$f(x) = a \cdot b^{(c^x)}, \tag{6.29}$$

kde a, b a c jsou příslušné konstanty vyhovující danému modelu.

6.38. Firma uvedla na trh nový výrobek. Po jistou dobu sledovala prodejní čísla tohoto výrobku a poté vytvořila model udávající počet prodaných kusů ve formě Gompertzovy funkce ve tvaru **Příklad 6.38**

$$N(t) = 37\,500 \cdot 0,012^{0,85^t},$$

kde $N(t)$ je počet dosud prodaných kusů výrobku a t je počet měsíců od uvedení výrobku na trh. Vypočtěte, jaký počet výrobků je v rámci daného modelu firma schopna nejvýše prodat a ve kterém měsíci prodá desetitisící výrobek.

Řešení: Čtenář si jistě dokáže zdůvodnit, že používaná funkce je rostoucí. Nejvyšší možný počet výrobků proto vypočteme jako limitní případ pro $t \to \infty$. Je

$$\lim_{t\to\infty} 37\,500 \cdot 0,012^{0,85^t} = 37\,500 \cdot 0,012^0 = 37\,500 \cdot 1 = 37\,500.$$

Při výpočtu jsme použili rovnost $\lim\limits_{t\to\infty} 0,85^t = 0$. Vypočtená hodnota $N = 37\,500$ udává nejvyšší počet výrobků, který je firma schopna prodat.

Počtu 10 000 prodaných kusů výrobků dosáhne firma v čase, který je řešením rovnice

$$37\,500 \cdot 0,012^{0,85^t} = 10\,000.$$

Při řešení několikrát zlogaritmujeme obě strany rovnice, viz Kapitola 5.6.8.

$$\begin{aligned} 37\,500 \cdot 0,012^{0,85^t} &= 10\,000 && \ldots \textit{ původní rovnice} \\ 0,012^{0,85^t} &= \frac{10\,000}{37\,500} && \ldots \textit{ vydělení obou stran rovnice číslem } 37\,500 \\ \ln\left(0,012^{0,85^t}\right) &= \ln\left(\frac{10\,000}{37\,500}\right) && \ldots \textit{ zlogaritmování obou stran rovnice} \\ 0,85^t \cdot \ln(0,012) &= \ln\left(\frac{10\,000}{37\,500}\right) \end{aligned}$$

V předchozí úpravě jsme použili vztah $\ln\left(A^B\right) = B \cdot \ln A$, kde pro výraz B platí rovnost $B = 0,85^t$. Dále je

$$\begin{aligned} 0,85^t &= \frac{\ln\left(\frac{10\,000}{37\,500}\right)}{\ln(0,012)} && \ldots \textit{ vydělení obou stran výrazem } \ln 0,012 \\ \ln\left(0,85^t\right) &= \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{10\,000}{37\,500}\right)}{\ln(0,012)}\right) && \ldots \textit{ zlogaritmování obou stran rovnice} \\ t \cdot \ln(0,85) &= \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{10\,000}{37\,500}\right)}{\ln(0,012)}\right) && \ldots \textit{ použití vzorce } \ln\left(A^B\right) = B \cdot \ln A \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{10\,000}{37\,500}\right)}{\ln(0,012)}\right)}{\ln(0,85)}. && \ldots \textit{ vydělení obou stran výrazem } \ln 0,85 \end{aligned}$$

Dosazením příslušných hodnot do kalkulátoru dostaneme kořen rovnice $t \doteq 7,43$. Desetitisící výrobek firma prodá podle modelu přibližně v půlce osmého měsíce od zahájení jeho prodeje.

6.3 Cvičení

Limity ve vlastních bodech

V následujících příkladech vypočtěte hodnotu zadaných limit.

6.3.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+5x}{x}$

6.3.2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

6.3.3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

6.3.4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}$

6.3.5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3-3x-1}{x^2+x}$

6.3.6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-4}{2x-x^2}$

6.3.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

6.3.8. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x^2-9}\right)$

6.3.9. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x-2}{x-3} - \dfrac{x+3}{x^2-9}\right)$

6.3.10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

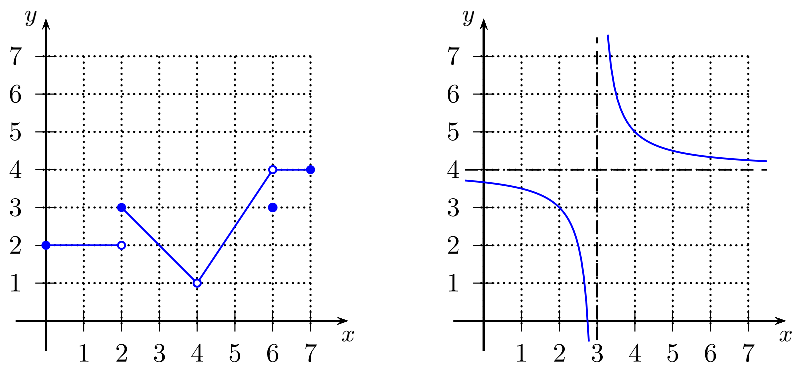
6.3.11. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

6.3.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

6.3.13. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x+3}{\sqrt{x}-3}$

6.3.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^3-8}{x}$

Odhad hodnoty limity podle grafu funkce



(a) Graf funkce $f(x)$ k Příkladu 6.3.15

(b) Graf funkce $f(x)$ k Příkladu 6.3.16

Obrázek 6.14: Grafy k úlohám 6.3.15 a 6.3.16

6.3.15. Podle grafu funkce $f(x)$ na Obrázku 6.14(a) rozhodněte o hodnotách limit

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, e) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$,

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, d) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, f) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$.

6.3.16. Podle grafu funkce $f(x)$ na Obrázku 6.14(b) rozhodněte o hodnotách limit

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, c) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, e) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$,

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, f) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

Limity v nevlastních bodech

V následujících příkladech vypočtěte hodnotu zadaných limit.

6.3.17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x-1}$

6.3.18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14-8x}{2x+3}$

6.3.19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-10}{x+2}$

6.3.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+5x+7}{5-3x-2x^2}$

6.3.21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+3x+4}{x^3-1}$

6.3.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2-100x}{2x^2-1}$

6.3.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{100x^2+800x+5\,000}$

6.3.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x+11}{10x^3-100x+5}$

Spojitost funkce

V následujících příkladech není funkce $f(x)$ definována v uvedených bodech a. Rozhodněte, zda lze stanovit hodnotu $f(a)$ tak, aby funkce $f(x)$ byla spojitá v bodě a.

6.3.25. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}, \quad a = 0$

6.3.26. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}, \quad a = 1$

6.3.27. $f(x) = \dfrac{x-1}{|x^2-1|}, \quad a = 1$

6.3.28. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}, \quad a = 0$

6.3.29. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad a = 0$

6.3.30. $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}, \quad a = 0$

Výsledky cvičení

6.3.1 5 **6.3.2** 4 **6.3.3** 5 **6.3.4** $5/4$ **6.3.5** -3 **6.3.6** -6 **6.3.7** 2 **6.3.8** neexistuje **6.3.9** 1 **6.3.10** $2/3$ **6.3.11** $1/4$ **6.3.12** $1/4$ **6.3.13** neexistuje **6.3.14** 12 **6.3.15** a) 2 b) neexistuje c) 2 d) 1 e) $2,5$ f) 4 **6.3.16** a) 4 b) 3 c) $-\infty$ d) ∞ e) 5 f) 4 **6.3.17** 3 **6.3.18** -4 **6.3.19** ∞ **6.3.20** -2 **6.3.21** 0 **6.3.22** $7/2$ **6.3.23** ∞ **6.3.24** $1/2$ **6.3.25** nelze **6.3.26** $f(1) = 2$ **6.3.27** nelze **6.3.28** nelze **6.3.29** $f(0) = 1$ **6.3.30** nelze

Kapitola 7

Derivace funkce

V úvodu Kapitoly 6.2 jsme se zabývali otázkou výpočtu směrnice tečny ke grafu funkce. Z uvedeného vyplynulo, že pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

potom je její hodnota rovna směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[a,\ f(a)]$, dále jen zkráceně v bodě a.

V Příkladu 6.5 jsme určovali okamžitou rychlost jedoucího auta pomocí vztahu

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Tento příklad můžeme dále zobecnit. Pokud se nějaká veličina f mění v čase (nebo obecně v závislosti na jiné veličině x), potom podíl

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{7.1}$$

udává průměrnou rychlost této změny v rozmezí od x_0 do x. Chceme-li znát okamžitou rychlost této změny v bodě x_0, potom musíme vypočítat limitu výrazu (7.1) pro $x \to x_0$. Tato limita nás přivádí k pojmu derivace funkce v bodě.

7.1 Derivace funkce v bodě

Definice 7.1.1. Mějme dánu funkci $f(x)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{7.2}$$

potom její hodnotu nazýváme *derivací* funkce $f(x)$ v bodě a a značíme ji symbolem $f'(a)$. Podobně existuje-li limita

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{7.3}$$

potom její hodnotu nazýváme derivací funkce $f(x)$ v bodě a zleva, resp. zprava a značíme je symboly $f'_-(x)$, resp. $f'_+(x)$. Neexistuje-li limita v (7.2), potom říkáme, že funkce $f(x)$ nemá v bodě a derivaci. Limity uvedené v (7.2), resp. v (7.3) mohou být vlastní nebo nevlastní. Podle toho pak mluvíme o vlastní či nevlastní derivaci.

Označíme-li vzdálenost bodů x a a na číselné ose symbolem h, potom je $x - a = h$, resp. $x = a + h$ a pro $x \to a$ je $h \to 0$. Vzorec (7.2) lze pak přepsat do tvaru

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \tag{7.4}$$

Tento vzorec se často používá jako analogická definice derivace funkce $f(x)$ v bodě a. Povšimněte si, že má-li funkce $f(x)$ derivaci v bodě a, potom musí být definována na nějakém neprázdném okolí tohoto bodu.

Pokusme se podle vzorce (7.1) a Definice 7.1.1 vypočítat průměrnou a okamžitou rychlost tělesa v třetí vteřině volného pádu, víme-li, že pro dráhu volného pádu platí vztah

$$s(t) = \frac{1}{2}\,gt^2,$$

kde $s(t)$ představuje uraženou dráhu za čas t a konstanta $g \doteq 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ je tzv. tíhové zrychlení. Průměrnou rychlost $\overline{v}$ v daném úseku vypočteme jakožto podíl celkově uražené dráhy a doby trvání tohoto pohybu.

$$\begin{aligned}
\overline{v}(t) &= \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} && \ldots \textit{ dosazení do vzorce (7.1)}\\
&= \frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0} && \ldots \textit{ dosazení vztahu } s(t)=\tfrac{1}{2}\,gt^2\\
\overline{v}(3) &= \frac{\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0^2}{3-0} && \ldots \textit{ je } t=3 \textit{ a } t_0=0\\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3^2}{3} && \ldots \textit{ zjednodušení výrazu}\\
&= \frac{45}{3}=15 && \ldots \textit{ dopočítání výsledné hodnoty}
\end{aligned}$$

Rychlost během volného pádu se neustále mění, její velikost se stále zvyšuje, přičemž průměrná rychlost za první tři sekundy volného pádu činí $15\,\mathrm{m/s}$. Okamžitou rychlost ve třetí sekundě pohybu vypočteme pomocí limity

$$\lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3} = \lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{2}\,gt^2-\frac{1}{2}\,g\cdot 3^2}{t-3},$$

viz Příklad 6.5.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{2}\,gt^2-\frac{1}{2}\,g\cdot 3^2}{t-3} &= \frac{1}{2}\,g\cdot\lim_{t\to 3}\frac{t^2-3^2}{t-3} && \ldots \textit{ vytknutí členu } \tfrac{1}{2}\,g\\
&= \frac{1}{2}\cdot 10\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)(t+3)}{t-3} && \ldots \textit{ je } t^2-3^2=(t-3)(t+3)\\
&= 5\cdot\lim_{t\to 3}(t+3) && \ldots \textit{ zkrácení ve zlomku}\\
&= 5\cdot(3+3)=30 && \ldots \textit{ výpočet hodnoty limity}
\end{aligned}$$

Okamžitá rychlost tělesa při třetí sekundě volného pádu činí $30\,\mathrm{m/s}$. Všimněte si, že okamžitá rychlost v třetí sekundě pohybu je dvojnásobkem průměrné rychlosti po třech sekundách pohybu. Můžeme se ptát, zda je to náhoda platná pouze pro třetí sekundu pohybu, či zda pozorovaný fakt platí v jakémkoliv okamžiku volného pádu.

Pro ověření výše uvedené hypotézy vypočteme průměrnou a okamžitou rychlost volného pádu v obecně zadaném časovém okamžiku τ. Vzhledem k výše vysvětleným úpravám budeme postupovat rychleji.

$$\overline{v}(\tau) = \frac{\frac{1}{2}\,g\tau^2-\frac{1}{2}\,g\cdot 0^0}{\tau-0} = \frac{\frac{1}{2}\,g\tau^2}{\tau} = \frac{1}{2}\,g\tau,$$

$$\begin{aligned}
v(\tau) &= \lim_{t\to\tau}\frac{\frac{1}{2}\,gt^2-\frac{1}{2}g\tau^2}{t-\tau} = \frac{1}{2}\,g\lim_{t\to\tau}\frac{t^2-\tau^2}{t-\tau} = \frac{1}{2}\,g\lim_{t\to\tau}\frac{(t-\tau)(t+\tau)}{t-\tau}\\
&= \frac{1}{2}\,g\lim_{t\to\tau}(t+\tau) = \frac{1}{2}\,g\cdot 2\tau = g\tau
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Z výsledku plyne, že v každém časovém okamžiku τ volného pádu je okamžitá rychlost dvojnásobná oproti průměrné rychlosti, neboť je $\overline{v}(t) = \frac{1}{2}gt$ a $v(t) = gt$. Všimněte si, že daným postupem se nám podařilo určit vzorec, který nám umožňuje vypočítat derivaci funkce $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ pro libovolné t ve tvaru výrazu gt.

Takový vzorec je jistě výhodný. Místo „zdlouhavého“ počítání limity (7.2) lze dosadit do jednoduchého vzorce (7.5) a vypočítat hodnotu derivace v libovolném bodě definičního oboru funkce. V dalším textu se budeme snažit popsat postup, který nám podobně zjednoduší výpočet derivace obecně zadané funkce v daném bodě.

7.2 Derivace funkce na intervalu

Příklad 7.1

7.1. Je dána funkce $f(x) = x^2$. Nalezněte předpis, který nám umožní vypočítat derivaci této funkce v libovolném bodě.

Řešení: Při výpočtu budeme postupovat tak, že si libovolný, ale pevně stanovený bod z definičního oboru funkce označíme symbolem c a vyjádříme limitu (7.2) pro bod c.

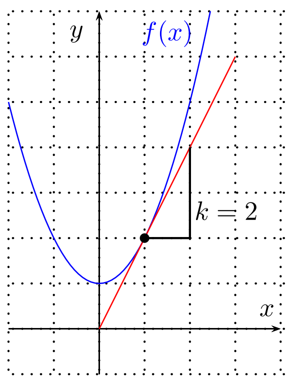
$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} &= \lim_{x\to c}\frac{x^2-c^2}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c}\\ &= \lim_{x\to c}(x+c)\\ &= c+c = 2c\end{aligned}$$

Pro libovolné c je tedy derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě c rovna výrazu $2c$. Nahradíme-li symbol c písmenem x, potom lze derivaci funkce $f(x)$ zapsat ve tvaru $f'(x) = 2x$.

Podle tohoto pravidla nyní můžeme snadno vypočítat derivaci funkce $f(x) = x^2$ v libovolném bodě definičního oboru. Snadno tak vypočteme, že $f'(1) = 2$, resp. $f'(2) = 4$ atd. Je zřejmé, že hodnota derivace závisí na x, je tedy funkcí proměnné x.

Definice 7.2.1. Má-li funkce f derivaci v každém bodě intervalu $(a,\, b)$, pak funkci, která každému bodu $x \in (a,\, b)$ přiřazuje hodnotu derivace $f'(x)$, nazýváme derivací funkce f na intervalu $(a,\, b)$ a značíme ji některým ze způsobů

$$f', \quad y', \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$



Proces, kterým k zadané funkci hledáme její derivaci, se nazývá *derivování* funkce. Derivováním tedy vzniká nová funkce, jejíž funkční hodnoty představují ať již směrnici tečny, nebo okamžitou rychlost nějaké změny. Nalezení derivace funkce nám často umožní popsat různé vlastnosti původní funkce.

O tom bude pojednáno v následujících částech knihy. Předtím však ještě vyslovíme bez důkazu jednu důležitou větu, kterou uplatníme při odvozování některých vzorců.

Věta 7.2.2 (Souvislost derivace a spojitosti funkce). *Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x \in D(f)$ konečnou derivaci $f'(x)$. Potom je funkce f v bodě x spojitá.*

7.2.1 Výpočet derivace funkce

V této kapitole si ukážeme, jak derivovat zadanou funkci. Nejprve si odvodíme vzorce pro derivace některých základních elementárních funkcí a potom uvedeme pravidla pro derivování funkcí v souvislosti s početními operacemi. Jednotlivé vzorce odvodíme, ať je zvídavým čtenářům zřejmé, jak daná pravidla vznikla. Uvedené postupy odvození však není nutné znát nazpaměť. Stačí si pamatovat odvozené výsledky.

Příklad 7.2

7.2. Derivace konstantní funkce $f(x) = c$

Nejprve odvodíme derivaci konstantní funkce. Derivaci funkce budeme v tomto případě označovat symbolem $(c)'$. Je

$$(c)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Pro konstantní funkci $f(x) = c$ je tedy její derivace rovna $f'(x) = 0$. Výsledek nás tolik nepřekvapí. Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s vodorovnou osou. Tečnou k libovolnému bodu grafu je přímka totožná s grafem funkce, proto je tečna k libovolnému bodu grafu rovnoběžná s osou x a její směrnice je rovna nule.

Příklad 7.3

7.3. Derivace funkce $f(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$

Derivaci pro speciální případ funkce $f(x) = x^n$ jsme již odvodili, a to v případě funkce $f(x) = x^2$, tedy pro $n = 2$. Nyní tento výsledek rozšíříme do vzorce i pro ostatní n z množiny přirozených čísel. Budeme přitom vycházet ze vzorce (7.4). Dále budeme využívat binomickou větu pro rozvoj výrazu $(x+h)^n$. Derivaci funkce budeme v tomto případě označovat symbolem $(x^n)'$.

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \left[(x+h)^n - x^n \right] \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[x^n + n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n - x^n \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right] \\
&= n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot 0 + \ldots + 0^{n-1} = n x^{n-1}
\end{aligned}$$

Pro funkci $f(x) = x^n$ je tedy její derivace rovna $f'(x) = nx^{n-1}$. Poznamenejme, že toto pravidlo platí nejen pro $n \in \mathbb{N}$, ale i pro všechny exponenty z množiny reálných čísel.

Ověřme, že zjištěný výsledek je v souladu s již dříve vypočteným předpisem $\left(x^2\right)' = 2x$. Funkce $f(x) = x^2$ odpovídá předpisu $f(x) = x^n$ pro $n = 2$. Ve vzorci $f'(x) = nx^{n-1}$ proto dosadíme $n = 2$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= n\, x^{n-1} \\
\left(x^2\right)' &= 2\, x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2x,
\end{aligned}$$

což je v souladu s již zjištěným výsledkem. Podobně můžeme odvodit derivaci funkce pro řadu dalších funkcí, které lze vyjádřit ve tvaru x^n.

$$\begin{aligned}
\left(x^3\right)' &= 3\, x^{3-1} = 3x^2 \\
\left(x^5\right)' &= 5\, x^{5-1} = 5x^4 \\
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \left(x^{-1}\right)' = (-1)\, x^{(-1)-1} = (-1)\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
\left(\sqrt{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\left(\sqrt[5]{x^3}\right)' &= \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}\, x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}\, x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} \\
\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}\right)' &= \left(x^{-\frac{7}{4}}\right)' = -\frac{7}{4}\, x^{-\frac{7}{4}-1} = -\frac{7}{4}\, x^{-\frac{11}{4}} = -\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}} = -\frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}}
\end{aligned}$$

7.4. Derivace funkce $f(x) = \sin x$

Příklad 7.4

Při výpočtu derivace funkce $f(x) = \sin x$ budeme opět vycházet ze vzorce (7.4). Použijeme také známý vzorec $\sin(x+h) = (\sin x \cos h + \cos x \sin h)$ a rovnost $\lim\limits_{h\to 0} \cos h = 1$.

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin x\cos h + \cos x \sin h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x + \cos x \sin h - \sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 1 = \cos x\end{aligned}$$

Pro funkci $f(x) = \sin x$ platí, že její derivací je funkce $f'(x) = \cos x$. Analogicky lze odvodit i derivaci pro funkci $f(x) = \cos x$ ve tvaru $f'(x) = -\sin x$. Vzorce pro zbývající goniometrické funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ odvodíme později.

7.5. Derivace exponenciální funkce $f(x) = e^x$

Příklad 7.5

K výpočtu derivace funkce $f(x) = e^x$ použijeme vzorec (6.12).

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x\cdot e^h - e^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot 1 = e^x\end{aligned}$$

Pro funkci $f(x) = e^x$ platí, že její derivací je funkce $f'(x) = e^x$. Analogicky lze pomocí vzorce (6.13) odvodit i derivaci pro obecnou exponenciální funkci $f(x) = a^x$ ve tvaru $f'(x) = a^x \ln a$, kde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Nyní na chvíli opustíme výpočet derivací jednotlivých funkcí a odvodíme pravidla pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Dále bude následovat odvození pravidel pro výpočet derivace složené a inverzní funkce.

7.6. Derivace součtu a rozdílu funkcí

Příklad 7.6

Nechť je funkce $F(x)$ rovna součtu, respektive rozdílu funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Je tedy $F(x) = f(x) \pm g(x)$. Potom je

$$\begin{aligned}F'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x)\pm g(x)\big)-\big(f(a)\pm g(a)\big)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))\pm(g(x))-g(a))}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \pm \lim_{x\to a} \frac{g(x))-g(a)}{x-a} = f'(a)\pm g'(a)\end{aligned}$$

Odvozený vztah platí obecně pro všechna a, pro která existují derivace funkcí f' a g'. Je tedy

$$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x), \tag{7.6}$$
$$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x), \tag{7.7}$$

pro všechna x, pro která uvedené derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ existují.

Ukažme na několika příkladech použití vztahů (7.6) a (7.7).

$$\begin{aligned}\left(x^4+x^3\right)' &= \left(x^4\right)' + \left(x^3\right)' = 4x^3+3x^2\\ (\sin x - \cos x)' &= (\sin x)' - (\cos x)' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x\\ \left(x^3+3^x\right)' &= \left(x^3\right)' - \left(3^x\right)' = 3x^2 + 3^x\cdot \ln 3\end{aligned}$$

V posledním příkladu si povšimněte rozdílu mezi mocninnou funkcí $f(x) = x^3$ a exponenciální funkcí $g(x) = 3^x$ a jejich derivacemi.

$$\begin{aligned}\left(x^3 + 3^x - \sin x\right)' &= \left(x^3 + 3^x\right)' - (\sin x)' = \left(3x^2 + 3^x \cdot \ln 3\right) - \cos x \\ &= 3x^2 + 3^x \cdot \ln 3 - \cos x\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili již odvozený vztah pro derivaci funkce $f(x) = x^3 + 3^x$. Právě uvedený příklad měl ukázat, jak derivovat v případě součtu, resp. rozdílu více než dvou funkcí. Je zřejmé, že vztahy (7.6) a (7.7) lze rozšířit na jakýkoliv konečný počet funkcí. Uvedená pravidla lze používat tak, že derivace ze součtu, resp. rozdílu konečného množství funkcí je rovna součtu, resp. rozdílu derivací těchto funkcí.

Příklad 7.7

7.7. Derivace součinu funkcí

Nechť je funkce $F(x)$ rovna součinu funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Je tedy $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. Potom je

$$\begin{aligned}F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + \left[f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + \left[f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(x+h) - f(x)\right]g(x+h) + f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x+h)\right) + \lim_{h\to 0} \left(f(x)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

V odvození byl použit poněkud umělý krok, že jsme přičetli a opět odečetli výraz $f(x)g(x+h)$. Tím jsme danou limitu nezměnili, ale úprava nám pomohla k tomu, abychom dostali výrazy odpovídající jednotlivým derivacím funkcí $f'(x)$ a $g'(x)$. Pro všechna x, pro která existují derivace funkcí $f'(x)$ a $g'(x)$ potom existuje i derivace jejich součinu a platí

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \tag{7.8}$$

Ukažme si opět nějaké příklady výpočtu, které se tentokrát vztahují k derivaci součinu funkcí.

$$\begin{aligned}\left(x \cdot \sin x\right)' &= \left(x\right)' \cdot \sin x + x \cdot \left(\sin x\right)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x \\ \left(\sin x \cdot e^x\right)' &= \left(\sin x\right)' \cdot e^x + \sin x \cdot \left(e^x\right)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x \\ \left(x^4 \cdot 3^x\right)' &= \left(x^4\right)' \cdot 3^x + x^4 \cdot \left(3^x\right)' = 4x^3 \cdot 3^x + x^4 \cdot 3^x \cdot \ln 3\end{aligned}$$

K uvedeným příkladům připojíme dvě poznámky. První z nich by měla čtenáře upozornit na možnou chybu, které se dopustí, pokud se bude snažit použít vzorec analogický k (7.6) a (7.7) na derivaci součinu dvou funkcí. Není pravda, že

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g'(x). \qquad \ldots \textit{ chybný vzorec!!!}$$

Snadno se o tom přesvědčíme například derivací funkce $f(x) = x^5$ vyjádřené ve tvaru součinu $f(x) = x^3 \cdot x^2$. Oba tvary poskytují stejnou funkci, proto i jejich derivace musí být rovny funkci $f'(x) = 5x^4$. Pokud bychom použili špatný přístup v případě derivace funkce $f(x) = x^3 \cdot x^2$, dostaneme

$$\begin{aligned}\left(x^3 \cdot x^2\right)' &= \left(x^3\right)' \cdot \left(x^2\right)' = 3x^2 \cdot 2x = 6x^3 \neq 5x^4 = \left(x^5\right)', && \ldots \textit{ špatně} \\ \left(x^3 \cdot x^2\right)' &= \left(x^3\right)' x^2 + x^3 \left(x^2\right)' = 3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 5x^4 = \left(x^5\right)'. && \ldots \textit{ dobře}\end{aligned}$$

Druhá poznámka se týká jednoho zobecnění vzorce (7.8) pro případ, kdy jedna z uvedených funkcí je konstantní. Potom dostaneme

$$\big(c \cdot f(x)\big)' = \big(c\big)' \cdot f(x) + c \cdot \big(f(x)\big)' = 0 \cdot f(x) + c \cdot \big(f(x)\big)' = c \cdot f'(x). \tag{7.9}$$

Zmíněný výsledek často (trochu nepřesně) popisujeme tak, že pokud chceme vypočítat derivaci ze součinu konstanty a funkce $f(x)$, tak zmíněnou konstantu vytkneme před derivaci a derivujeme pouze funkci $f(x)$. Ve skutečnosti samozřejmě nejde o vytknutí, nicméně uvedené tvrzení dobře popisuje používaný postup. Ukažme použití vzorce odvozeného v (7.9) v několika příkladech.

$$\begin{aligned}
\big(10x^3\big)' &= 10 \cdot \big(x^3\big)' = 10 \cdot 3x^2 = 30x^2 \\
\big(7x^4 + 5x^3 + 4x\big)' &= 7\big(x^4\big)' + 5\big(x^3\big)' + 4\big(x\big)' = 7 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 1 \\
&= 28x^3 + 15x^2 + 4 \\
\big(5\sin x + 9\cos x\big)' &= 5\cos x + 9(-\sin x) = 5\cos x - 9\sin x
\end{aligned}$$

V posledním z těchto tří příkladů jsme již zapsali postup bez nadbytečných mezikroků.

Příklad 7.8

7.8. Derivace podílu funkcí

Nechť je funkce $F(x)$ rovna podílu funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Je tedy $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Potom je

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,[F(x+h) - F(x)] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{g(x+h)\,g(x)}\right).
\end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme opět použili trik s přičtením a odečtením výrazu $f(x)g(x)$. Díky tomu budeme v následujících úpravách schopni vyjádřit některé výrazy ve formě derivací funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Pokračujme dále v odvození.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)\,g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Tím jsme dostali vzorec pro derivaci podílu funkcí $f(x)$ a $g(x)$ ve tvaru

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \tag{7.10}$$

který platí při splnění následujících předpokladů: $g(x) \neq 0$ a v bodě x existují obě derivace $f'(x)$, $g'(x)$.

Nyní si ukážeme použití vztahu (7.10) při výpočtu konkrétních příkladů obsahujících derivaci z podílu dvou funkcí.

$$\left(\frac{x^3}{x+1}\right)' = \frac{\left(x^3\right)'(x+1) - x^3(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3x^2(x+1) - x^3 \cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2\,(2x+3)}{(x+1)^2}$$
$$\left(\frac{\sin x}{1+x^2}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+x^2) - \sin x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{(\cos x)(1+x^2) - (\sin x)(2x)}{\left(1+x^2\right)^2}$$
$$= \frac{x^2\cos x - 2x\sin x + \cos x}{\left(1+x^2\right)^2}$$
$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)'\cos x - 1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{0\cdot\cos x - (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Následující příklad ukáže postup výpočtu v případě, kdy derivujeme funkci obsahující součin i podíl funkcí.

$$\left(\frac{x\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(x\cdot\sin x)'\cdot\cos x - x\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\big((x)'\sin x + x\,(\sin x)'\big)\cdot\cos x - x\cdot\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\big(\sin x + x\,\cos x\big)\cdot\cos x - x\cdot\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x\cos x + x\cdot\cos^2 x + x\cdot\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x\cos x + x\big(\sin^2 x + \cos^2 x\big)}{\cos^2 x} = \frac{x + \sin x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{x}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x$$

Příklad 7.9

7.9. Derivace složené funkce

V následující části odvodíme důležitý vzorec pro derivaci složené funkce. Předpokládejme, že funkce $y = g(x)$ má derivaci v bodě a a současně, že funkce f má derivaci v bodě $b = g(a)$. Potom lze pro derivaci složené funkce $F(x) = f(g(x))$ v bodě a psát

$$F'(a) = \lim_{x\to a}\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}$$
$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}\cdot\frac{g(x) - g(a)}{g(x) - g(a)}\right)$$
$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}\cdot\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right)$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
$$= \lim_{y\to b}\frac{f(y) - f(b)}{y - b}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(b)\cdot g'(a)$$
$$= f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Při výpočtu jsme předpokládali, že pro $x \to a$ je také $y \to b$. Tento předpoklad snadno zdůvodníme. Existuje-li derivace funkce $g(x)$ v bodě a, potom je tato funkce podle Věty 7.2.2 spojitá v bodě a. Proto má funkce $g(x)$ v bodě a limitu a hodnota této limity je rovna $g(a)$. To znamená, že pro $x \to a$ se proměnná y blíží k funkční hodnotě $g(a) = b$ a je tedy také $y \to b$.

Právě provedený výpočet můžeme považovat za zdůvodnění následující věty.

Věta 7.2.3 (O derivaci složené funkce). *Nechť existuje derivace funkce $g(x)$ v bodě x a současně předpokládejme, že existuje derivace funkce f v bodě $b = g(x)$. Potom existuje i derivace složené funkce $y = f(g(x))$ a platí*

$$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{7.11}$$

Při výpočtu derivace složené funkce je vždy dobré vědět, z jakých funkcí je tato složena, tj. umět určit vnější a vnitřní funkci. Samotné derivování pak probíhá tak, že zderivujeme vnější funkci a její argument (tj. vnitřní funkci $g(x)$) ponecháme beze změny. Tím dostaneme výraz $f'(g(x))$. Tento pak vynásobíme derivací vnitřní funkce. Pokud bychom vnitřní funkci $g(x)$ označili symbolem u, potom je možné vzorec (7.11) upravit také do tvaru

$$y' = [f(u)]' = f'(u) \cdot u'. \tag{7.12}$$

Celý postup přiblížíme pomocí několika příkladů s komentářem.

Příklad 7.10

7.10. Vypočtěte derivaci funkce $y = \sin x^2$.

Řešení: V zadání je uvedena složená funkce $y = f(g(x)) = \sin x^2$ s vnější funkcí $f(x) = \sin x$ a vnitřní funkcí $g(x) = x^2$. Derivací vnější funkce je $f'(x) = \cos x$. Ponecháme-li v této funkci původní argument, dostaneme (složenou) funkci $f'(g(x)) = \cos x^2$. Derivací vnitřní funkce je $g'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$. Je tedy

$$y' = [f(g(x))]' = \left[\sin x^2\right]' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x.$$

Symbolicky bychom mohli tento postup zapsat pomocí tabulky

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & g(x) = x^2 \\ f'(x) = \cos x & g'(x) = 2x \\ f'(g(x)) = \cos x^2 & f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x. \end{array}$$

Lze také využít vzorec (7.12), kde $u = x^2$. Potom je

$$\left(\sin x^2\right)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos x^2 \cdot 2x.$$

Další příklady již budeme řešit s méně podrobným komentářem.

Příklad 7.11

7.11. Vypočtěte derivaci funkce $y = \left(x^2 + 10\right)^5$.

Řešení: Je $y = u^5$, kde $u = x^2 + 10$. Potom s využitím vzorce (7.12) dostaneme

$$\begin{aligned} y' &= f'(u) \cdot u' = \left(u^5\right)' \cdot u' = 5u^4 \cdot \left(x^2 + 10\right)' = 5\left(x^2 + 10\right)^4 \cdot 2x \\ &= 10x\left(x^2 + 10\right)^4. \end{aligned}$$

Je též možné rozepsat výpočet dle vzorce (7.11). Potom dostaneme

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^5 & g(x) = x^2 + 10 \\ f'(x) = 5x^4 & g'(x) = 2x \\ f'(g(x)) = 5\left(x^2 + 10\right)^4 & f'(g(x)) \cdot g'(x) = 5\left(x^2 + 10\right)^4 \cdot 2x = 10x\left(x^2 + 10\right)^4. \end{array}$$

Příklad 7.12

7.12. Vypočtěte derivaci funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x + 2}}$.

Řešení: Zadanou funkci upravíme do tvaru $y = u^n$. Je

$$\frac{1}{\sqrt{3x + 2}} = \frac{1}{(3x + 2)^{\frac{1}{2}}} = (3x + 2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Proto je $y = u^{-1/2}$, kde $u = 3x + 2$. Potom s využitím vzorce (7.12) dostaneme

$$y' = f'(u) \cdot u' = \left(u^{-1/2}\right)' \cdot u' = -\frac{1}{2}\, u^{-\frac{3}{2}} \cdot (3x+2)' = -\frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3$$
$$= -\frac{3}{2\sqrt{(3x+2)^3}}.$$

Příklad 7.13

7.13. Derivace inverzní funkce

Inverzní funkci k funkci f značíme $y = f^{-1}(x)$. Ze vztahu mezi funkcí f a funkcí k ní inverzní plyne rovnost $x = f(y)$. Je-li $x = a$, potom označme $f^{-1}(a) = b$, tedy je $a = f(b)$. Potom je

$$\left(f^{-1}(a)\right)' = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(f(y)) - f^{-1}(f(b))}{f(y) - f(b)}$$
$$= \lim_{y\to b} \frac{y - b}{f(y) - f(b)} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\frac{f(y)-f(b)}{y-b}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to b} \frac{f(y)-f(b)}{y-b}}$$
$$= \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Při odvození vzorce jsme opět využili fakt, že z limitního přechodu $x \to a$ vyplývá $y \to b$. Uvedený vzorec platí při jistých předpokladech, které shrneme v následující větě.

Věta 7.2.4. *Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má inverzní funkci f^{-1}. Dále předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v bodě x derivaci a platí $f'(x) \neq 0$. Potom inverzní funkce f^{-1} má derivaci v bodě $y = f(x)$ a platí*

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{7.13}$$

Použití vzorce (7.13) si ukážeme přímo při výpočtu derivací některých základních elementárních funkcí.

Příklad 7.14

7.14. Derivace funkcí $f(x) = \ln x$ a $f(x) = \log_a x$

K výpočtu derivací obou funkcí použijeme vzorec (7.13). Připomeňme, že $f^{-1}(x) = \ln x$ a $f(x) = e^x$ jsou vzájemně inverzní funkce. Stejně tak jsou vzájemně inverzní i funkce $f(x) = a^x$ a $f^{-1}(x) = \log_a x$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Během obou odvození jsme využili fakt, že složením vzájemně inverzních funkcí vznikne identická funkce, tedy rovnosti $e^{\ln x} = x$, resp. $a^{\log_a x} = x$.

Příklad 7.15

7.15. Derivace funkcí $f(x) = \operatorname{tg} x$ a $f(x) = \operatorname{cotg} x$

K výpočtu derivací obou funkcí použijeme vzorec (7.10). Připomeňme, že $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{(1)' \operatorname{tg} x - 1 \cdot (\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{0 \cdot \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}$$
$$= -\frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Nyní již máme odvozeny vzorce pro derivaci mocninné funkce, exponenciální a logaritmické funkce a také goniometrických funkcí. V následující části odvodíme vzorce pro derivace inverzních funkcí ke goniometrickým funkcím, tedy k funkcím cyklometrickým. Využijeme k tomu vzorec (7.13).

7.16. Derivace cyklometrických funkcí

Příklad 7.16

Příslušné vzorce odvodíme pouze pro funkce $y = \arcsin x$ a $y = \operatorname{arctg} x$. Pro zbývající funkce je postup analogický.

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme využili rovnosti $\sin(\arcsin x) = x$ a $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ a také známou identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Nyní shrneme dosud odvozená pravidla do přehledné tabulky a uvedeme podmínky, za kterých tato pravidla platí.

Vzorce pro derivace základních elementárních funkcí

$(c)' = 0$	...	$c \in \mathbb{R}$, c je konstanta	(7.14)
$(x)' = 1$	...	$x \in \mathbb{R}$	(7.15)
$(x^n)' = nx^{n-1}$	...	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ resp. $x \neq 0, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0$ resp. $x > 0, n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	(7.16)
$(a^x)' = a^x \ln a$	...	$x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$	(7.17)
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	...	$x \in \mathbb{R}$, e je Eulerovo číslo	(7.18)
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	...	$x > 0, a > 0, a \neq 1$	(7.19)
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	...	$x > 0$	(7.20)
$(\sin x)' = \cos x$	...	$x \in \mathbb{R}$	(7.21)
$(\cos x)' = -\sin x$	...	$x \in \mathbb{R}$	(7.22)
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	...	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	(7.23)
$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	...	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	(7.24)
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	...	$x \in (-1, 1)$	(7.25)
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	...	$x \in (-1, 1)$	(7.26)
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	...	$x \in \mathbb{R}$	(7.27)
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	...	$x \in \mathbb{R}$	(7.28)

Vzorce pro operace s derivacemi funkcí

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \quad \dots \text{ existují } f'(x) \text{ a } g'(x) \tag{7.29}$$

$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x) \quad \dots \text{ existují } f'(x) \text{ a } g'(x) \tag{7.30}$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \dots \text{ existují } f'(x) \text{ a } g'(x) \tag{7.31}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \dots \text{ existují } f'(x) \text{ a } g'(x),\ g(x)\neq 0 \tag{7.32}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x) \quad \dots \text{ viz předpoklady Věty 7.2.3} \tag{7.33}$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \dots \text{ viz předpoklady Věty 7.2.4} \tag{7.34}$$

7.2.2 Procvičování techniky výpočtu derivací

Následujících padesát cvičení slouží k mechanickému procvičení techniky derivování. Vypočtěte derivace zadaných funkcí a snažte se určit, na jaké množině k zadané funkci existuje její derivace. Výsledky cvičení spolu s postupem řešení jsou uvedeny za těmito příklady.

7.2.1. $y = x^4$

7.2.2. $y = \dfrac{7}{3x}$

7.2.3. $y = \dfrac{5}{7x^3}$

7.2.4. $y = \sqrt[3]{x}$

7.2.5. $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

7.2.6. $y = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

7.2.7. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

7.2.8. $y = 4x - 1$

7.2.9. $y = 7x^2 + 6x - 3$

7.2.10. $y = 3x^5 - 7x^3 + 5x^2 + 2$

7.2.11. $y = \big(5 - 2x\big)\big(5 + 3x^4\big)$

7.2.12. $y = \big(\sqrt{x} + 2\big)\big(x - \sqrt{x}\big)$

7.2.13. $y = (x+1)(x+2)(x+3)$

7.2.14. $y = \dfrac{5+x}{1-x}$

7.2.15. $y = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x}}$

7.2.16. $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x - 14}$

7.2.17. $y = \dfrac{(x-7)(x+2)}{x+5}$

7.2.18. $y = (5x-7)^4$

7.2.19. $y = (x^5 + 7x)^3$

7.2.20. $y = \sqrt{4 - x^2}$

7.2.21. $y = \sqrt{8 + \sqrt[3]{x}}$

7.2.22. $y = \sqrt{-1 + 2x - x^2}$

7.2.23. $y = \sqrt{x + \sqrt{(4x-8)^3}}$

7.2.24. $y = 5^x - 2\cdot 7^x$

7.2.25. $y = x^5 + 5^x$

7.2.26. $y = \log_5 x$

7.2.27. $y = \log_4 x + 7\log_5 x$

7.2.28. $y = \mathrm{e}^{5-x^2}$

7.2.29. $y = 5^{3x}$

7.2.30. $y = \mathrm{e}^{\sin x}$

7.2.31. $y = \ln(10x + 3)$

7.2.32. $y = \ln^5(3x - 6)$

7.2.33. $y = 5^{7^x}$

7.2.34. $y = x^x$

7.2.35. $y = x^{\sin x}$

7.2.36. $y = (\ln x)^x$

7.2.37. $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$

7.2.38. $y = \ln |x|$

7.2.39. $y = x \ln |x|$

7.2.40. $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

7.2.41. $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$

7.2.42. $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$

7.2.43. $y = 5 \sin x - 3 \cos x$

7.2.44. $y = \sin x \cos x$

7.2.45. $y = \sin(6x + 5)$

7.2.46. $y = \sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{3}$

7.2.47. $y = \sin^2 x$

7.2.48. $y = \arcsin \sqrt{x}$

7.2.49. $y = x - \operatorname{arctg} x$

7.2.50. $y = \arcsin \dfrac{x-1}{x}$

Následuje řešení zadaných úloh. V některých místech je připojena poznámka, která má pomoci pochopit použitý postup. Pokud u některých příkladů není uvedena množina, na které k dané funkci existuje její derivace, potom je za ní považována množina $\mathbb{R}$.

Řešení úloh

7.2.1 $\left(x^4\right)' = 4\,x^3$

7.2.2 $\left(\dfrac{7}{3x}\right)' = \dfrac{7}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{7}{3}\left(x^{-1}\right)' = \dfrac{7}{3}(-1)x^{-2} = -\dfrac{7}{3x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

7.2.3 $\left(\dfrac{5}{7x^3}\right)' = \dfrac{5}{7}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \dfrac{5}{7}\left(x^{-3}\right)' = \dfrac{5}{7}(-3)x^{-4} = -\dfrac{15}{7x^4}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

7.2.4 $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \in (0, \infty)$

7.2.5 $\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{2}\right)' = \left(\dfrac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty)$

7.2.6 $\left(\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)' = \left(\dfrac{3}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{3}{4\sqrt{x^3}}, \quad x \in (0, \infty)$

7.2.7 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}\,x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

7.2.8 $\left(4x - 1\right)' = 4\left(x\right)' - \left(1\right)' = 4 \cdot 1 - 0 = 4$

7.2.9 $\left(7x^2 + 6x - 3\right)' = 7\left(x^2\right)' + 6\left(x\right)' - \left(3\right)' = 7 \cdot 2x + 6 \cdot 1 - 0 = 14x + 6$

7.2.10

$$\begin{aligned}\left(3x^5 - 7x^3 + 5x^2 + 2\right)' &= 3\left(x^5\right)' - 7\left(x^3\right)' + 5\left(x^2\right)' + \left(2\right)'\\ &= 3\left(5x^4\right) - 7\left(3x^2\right) + 5\left(2x\right) + 0 = 15x^4 - 21x^2 + 10x\end{aligned}$$

7.2.11

$$\begin{aligned}\Big(\left(5 - 2x\right)\left(5 + 3x^4\right)\Big)' &= (5 - 2x)'(5 + 3x^4) + (5 - 2x)(5 + 3x^4)'\\ &= (-2)\,(5 + 3x^4) + (5 - 2x)(12x^3)\\ &= -30x^4 + 60x^3 - 10\end{aligned}$$

7.2.12

$$
\begin{aligned}
\Big(\big(\sqrt{x}+2\big)\big(x-\sqrt{x}\big)\Big)' &= \big(\sqrt{x}+2\big)'\big(x-\sqrt{x}\big)+\big(\sqrt{x}+2\big)\big(x-\sqrt{x}\big)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\big(x-\sqrt{x}\big)+\big(\sqrt{x}+2\big)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\big(\sqrt{x}+2\big)\big(2\sqrt{x}-1\big)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+2\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}, \\
&\quad x\in(0,\infty)
\end{aligned}
$$

7.2.13

$$
\begin{aligned}
\big((x+1)(x+2)(x+3)\big)' = {} & (x+1)'(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)'(x+3)+ \\
& +(x+1)(x+2)(x+3)' = (x+2)(x+3)+ \\
& +(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2) = 3x^2+12x+11
\end{aligned}
$$

7.2.14

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{5+x}{1-x}\right)' &= \frac{(5+x)'\cdot(1-x)-(5+x)\cdot(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1\cdot(1-x)-(5+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-x+5+x}{(1-x)^2} = \frac{6}{(1-x)^2}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}
\end{aligned}
$$

7.2.15

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2x+5}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{(2x+5)'\cdot\sqrt{x}-(2x+5)\cdot\big(\sqrt{x}\big)'}{x} = \frac{2\sqrt{x}-(2x+5)\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\
&= \frac{2\sqrt{x}-\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{4x}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x-2x-5}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^3}}, \\
&\quad x\in(0,\infty)
\end{aligned}
$$

7.2.16

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^2-5x-14}\right)' &= \frac{(1)'\cdot(x^2-5x-14)-1\cdot(x^2-5x-14)'}{(x^2-5x-14)^2} \\
&= \frac{0-(2x-5)}{(x^2-5x-14)^2} = \frac{5-2x}{(x^2-5x-14)^2}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,7\}
\end{aligned}
$$

7.2.17

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{(x-7)(x+2)}{x+5}\right)' &= \frac{\big((x-7)(x+2)\big)'(x+5)-(x-7)(x+2)(x+5)'}{(x+5)^2} \\
&= \frac{\big((x+2)+(x-7)\big)(x+5)-(x-7)(x+2)}{(x+5)^2} \\
&= \frac{(2x-5)(x+5)-(x-7)(x+2)}{(x+5)^2} \\
&= \frac{2x^2+5x-25-(x^2-5x-14)}{(x+5)^2} = \frac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}, \\
&\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-5\}
\end{aligned}
$$

7.2.18 $\big((5x-7)^4\big)' = 4\,(5x-7)^3\,(5x-7)' = 4\,(5x-7)^3\cdot 5 = 20\,(5x-7)^3$

Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u=5x-7$.

7.2.19 $\big((x^5+7x)^3\big)' = 3\,(x^5+7x)^2\,(x^5+7x)' = 3\,(x^5+7x)^2\,\big(5x^4+7\big)$

Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u=x^5+7x$.

7.2.20

$$\left(\sqrt{4-x^2}\,\right)' = \left((4-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}\left(4-x^2\right)' = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}\,(-2x)$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in (-2,2)$$

Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u(x) = 4 - x^2$.

7.2.21

$$\left(\sqrt{8+\sqrt[3]{x}}\right)' = \left((8+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(8+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(8+x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{8+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{8+\sqrt[3]{x}}}, \quad x \in (-512,0) \cup (0,\infty)$$

7.2.22

$$\left(\sqrt{-1+2x-x^2}\,\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-1+2x-x^2}}\cdot\left(-1+2x-x^2\right)'$$
$$= \frac{1-x}{\sqrt{-1+2x-x^2}}$$

Zjistíme, pro jaká x mají výrazy smysl. Definiční obor funkce f je $D(f) = \{1\}$, tedy funkce f je definována v jediném bodě $x = 1$. Má v tomto bodě derivaci? Podle Definice 7.1.1 by tato musela být definována v nějakém neprázdném okolí bodu $x = 1$. To však není splněno, takže funkce f nemá derivaci v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$. Nenechte se zmýlit tím, že jsme „nalezli" předpis pro derivaci funkce f. Tento předpis totiž nemá smysl pro žádné reálné číslo.

7.2.23

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{(4x-8)^3}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{(4x-8)^3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(x+(4x-8)^{\frac{3}{2}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{(4x-8)^3}}}\left(1+\frac{3}{2}(4x-8)^{\frac{1}{2}}\left(4x-8\right)'\right) =$$
$$= \frac{1+6\sqrt{4x-8}}{2\sqrt{x+\sqrt{(4x-8)^3}}}, \quad x \in \langle 2,\infty)$$

7.2.24 $\left(5^x - 2\cdot 7^x\right)' = \left(5^x\right)' - 2\cdot\left(7^x\right)' = 5^x\cdot\ln 5 - 2\cdot 7^x\cdot\ln 7$

7.2.25 $\left(x^5 + 5^x\right)' = \left(x^5\right)' + \left(5^x\right)' = 5x^4 + 5^x\ln 5$

Upozornění: Pozor na rozdíl mezi polynomem $y = x^5$ a exponenciální funkcí $y = 5^x$.

7.2.26 $\left(\log_5 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 5}, \quad x \in (0,\infty)$

7.2.27 $\left(\log_4 x + 7\log_5 x\right)' = \left(\log_4 x\right)' + 7\left(\log_5 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 4} + \dfrac{7}{x\ln 5}, \ x \in (0,\infty)$

7.2.28 $\left(\mathrm{e}^{5-x^2}\right)' = \mathrm{e}^{5-x^2}\left(5-x^2\right)' = -2x\cdot\mathrm{e}^{5-x^2}$

Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u(x) = 5 - x^2$.

7.2.29 $\left(5^{3x}\right)' = 5^{3x}\left(3x\right)'\ln 5 = 3\cdot\ln 5\cdot 5^{3x}$

7.2.30 $\left(\mathrm{e}^{\sin x}\right)' = \mathrm{e}^{\sin x}\left(\sin x\right)' = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

7.2.31 $\left(\ln(10x+3)\right)' = \dfrac{1}{10x+3}\left(10x+3\right)' = \dfrac{10}{10x+3}, \quad x > -\frac{3}{10}$

Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u(x) = 10x + 3$.

7.2.32

$$\left(\ln^5(3x-6)\right)' = 5\ln^4(3x-6)\left(\ln(3x-6)\right)' = \frac{15\ln^4(3x-6)}{3x-6},$$
$$x \in (2,\infty)$$

Nápověda: Jedná se o dvojí derivaci složené funkce. Poprvé derivujeme funkci s vnitřní funkcí $u = \ln(3x-6)$, podruhé s vnitřní funkcí $v = 3x-6$.

7.2.33 $\left(5^{7^x}\right)' = 5^{7^x}\left(7^x\right)'\ln 5 = 5^{7^x}\cdot 7^x\cdot\ln 7\cdot\ln 5$

Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u(x) = 7^x$.

7.2.34

$$\begin{aligned}\left(x^x\right)' &= \left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln x}\left(x\ln x\right)' = \mathrm{e}^{x\ln x}\big((x)'\ln x + x(\ln x)'\big) = \mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)\\ &= x^x(\ln x+1), \quad x\in(0,\infty)\end{aligned}$$

Nápověda: Jedná se o derivaci funkce, která obsahuje proměnnou v základu i exponentu mocniny. Při její derivaci používáme vzorec $A^B = \mathrm{e}^{B\ln A}$, $A>0$, který vyplývá ze vztahů $A^B = \mathrm{e}^{\ln A^B}$, resp. $\ln A^B = B\cdot\ln A$.

7.2.35

$$\begin{aligned}\left(x^{\sin x}\right)' &= \left(\mathrm{e}^{\sin x\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{\sin x\ln x}\big(\sin x\ln x\big)'\\ &= \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^{\sin x}\big((\sin x)'\ln x + \sin x(\ln x)'\big) = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right),\\ &\quad x\in(0,\infty)\end{aligned}$$

7.2.36

$$\begin{aligned}\big((\ln x)^x\big)' &= \left(\mathrm{e}^{x\ln(\ln x)}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln(\ln x)}\big(x\ln(\ln x)\big)'\\ &= (\ln x)^x\big((x)'\ln(\ln x) + x(\ln(\ln x))'\big)\\ &= (\ln x)^x\left(1\cdot\ln(\ln x) + x\cdot\frac{1}{\ln x}(\ln x)'\right) = (\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right),\\ &x\in(1,\infty)\end{aligned}$$

7.2.37

$$\begin{aligned}\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

7.2.38 Vypočtěte derivaci funkce $y = \ln|x|$.

Řešení: Podle definice absolutní hodnoty je

$$\ln|x| = \begin{cases}\ln(-x) & \text{pro} \quad x\in(-\infty,0)\\ \ln x & \text{pro} \quad x\in(0,\infty)\end{cases}.$$

Pro $x=0$ není funkce $y=\ln|x|$ definována. Vypočteme předpisy derivace funkce $\ln|x|$ na obou intervalech. Je

$$\big(\ln|x|\big)' = \begin{cases}\big(\ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{x} & \text{pro} \quad x\in(-\infty,0)\\ \big(\ln x\big)' = \frac{1}{x} & \text{pro} \quad x\in(0,\infty)\end{cases}.$$

Pro všechna $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tedy je $\big(\ln|x|\big)' = \dfrac{1}{x}$.

7.2.39 $\big(x\ln|x|\big)' = (x)'\ln|x| + x(\ln|x|)' = \ln|x| + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln|x|+1, \quad x\neq 0$

7.2.40

$$\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\big((\mathrm{e}^x)+(\mathrm{e}^{-x})'\big) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}(-1)) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

7.2.41

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\right)' &= \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})'(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})-(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})'}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}\\ &= \frac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}(-1))(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})-(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}(-1))}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}\\ &= \frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2-(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{-4}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2}, \quad x \neq 0\end{aligned}$$

7.2.42

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)'\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\left(\frac{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\right)\\ &= \frac{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x^2+x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}, \quad x\in(0,\infty)\end{aligned}$$

7.2.43

$$\begin{aligned}\left(5\sin x-3\cos x\right)' &= 5\left(\sin x\right)'-3\left(\cos x\right)' = 5\cos x-3(-\sin x)\\ &= 5\cos x+3\sin x\end{aligned}$$

7.2.44 $\left(\sin x\cos x\right)' = (\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)' = \cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$
7.2.45 $\left(\sin(6x+5)\right)' = \left(\cos(6x+5)\right)\cdot\left(6x+5\right)' = \cos(6x+5)\cdot 6$
Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u(x) = 6x+5$.
7.2.46 $\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{3}\right)' = \left(\cos\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{x}{2}\right)'+\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{x}{3}\right)' = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}$
Nápověda: Jedná se o dvě složené funkce, poprvé s vnitřní funkcí $u = x/2$, podruhé $v = x/3$.
7.2.47 $\left(\sin^2 x\right)' = \left(2\sin x\right)\left(\sin x\right)' = 2\sin x\cos x$
Nápověda: Jedná se o derivaci složené funkce s vnitřní funkcí $u(x) = \sin x$
7.2.48

$$\begin{aligned}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}},\\ & x\in(0,1)\end{aligned}$$

7.2.49 $(x-\operatorname{arctg} x)' = 1-\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
7.2.50

$$\begin{aligned}\left(\arcsin\frac{x-1}{x}\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2}}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-(x-1)^2}{x^2}}}\cdot\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{|x|}{x^2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}, \quad x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)\end{aligned}$$

7.3 Derivace vyšších řádů

Z Definice 7.2.1 plyne, že derivací funkce f je opět funkce. Takovou funkci je možné opět zderivovat. Tím dostaneme tzv. druhou derivaci funkce f. Derivaci funkce f nazýváme derivací prvního řádu, resp. první derivací funkce f, její derivaci pak nazýváme derivací druhého řádu, resp. druhou derivací funkce f atd. Značíme ji symbolem

$$f''(x), \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}, \quad \text{resp.} \quad y'', \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Pokud lze i tuto funkci zderivovat, získáme tím třetí derivaci funkce atd. Obecně: derivací $(n-1)$-ní derivace získáme n-tou derivaci funkce f.

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \qquad n \in \mathbb{N} \tag{7.35}$$

První, druhou a třetí derivaci funkce označujeme příslušným počtem čárek. Derivaci čtvrtého a vyššího řádu je zvykem označovat číslicí v závorce. Viz

$$f',\ f'',\ f''',\ f^{(4)},\ f^{(5)},\ f^{(6)} \text{ atd.}$$

Příklad 7.17

7.17. Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 11$.

Řešení: Nejprve musíme vypočítat derivaci prvního řádu $f'(x)$. Jejím zderivováním pak dostaneme $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(5x^3 - 4x^2 + 7x - 11\right)' \\ &= 15x^2 - 8x + 7 \\ f''(x) &= \left(15x^2 - 8x + 7\right)' \\ &= 30x - 8 \end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ má derivaci pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, funkce $f'(x)$ má také derivaci pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Funkce $f''(x) = 30x - 8$ je tedy druhou derivací funkce $f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 7.18

7.18. Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \left((1+x^2)^{-1}\right)' = (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x \\ &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f''(x) &= \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{(-2)\cdot(1+x^2)^2 - (-2x)\cdot 2\,(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{\left(1+x^2\right)\left((-2)\left(1+x^2\right) + 8x^2\right)}{(1+x^2)^4} = \frac{\left(1+x^2\right)\left(6x^2-2\right)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{\left(6x^2-2\right)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ má derivaci pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, funkce $f'(x)$ má také derivaci pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Funkce $f''(x) = \dfrac{\left(6x^2-2\right)}{(1+x^2)^3}$ je tedy druhou derivací funkce $f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 7.19

7.19. Vypočtěte $f''(0)$, jestliže $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) \\ f''(x) &= \left(\mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x)\right)' = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) + \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2) \\ &= 2\,\mathrm{e}^{-x^2} \cdot \left(2x^2 - 1\right) \\ f''(0) &= 2\,\mathrm{e}^{-0^2} \cdot \left(2 \cdot 0^2 - 1\right) = 2 \cdot \mathrm{e}^0 \cdot (0-1) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

Je tedy $f''(0) = -2$.

7.4 Cvičení

Derivace podle základních vzorců

V následujících úlohách vypočtěte první derivaci zadaných funkcí.

7.4.1. $f(x) = 5x^2 + 3x - 11$

7.4.2. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 7x + 6$

7.4.3. $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{1\,000}$

7.4.4. $f(x) = \dfrac{6x^2 + 3x - 10}{50}$

7.4.5. $f(x) = 5 \sin x - 7 \cos x + 3$

7.4.6. $f(x) = 7 \operatorname{tg} x + \sin x$

7.4.7. $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

7.4.8. $f(x) = 3 \ln x - 5$

7.4.9. $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$

7.4.10. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

Derivace součinu a podílu funkcí

V následujících úlohách vypočtěte první derivaci zadaných funkcí.

7.4.11. $f(x) = \big(x^2 + 1\big) \cdot \big(3x + 10\big)$

7.4.12. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

7.4.13. $f(x) = \ln x \cdot \sin x$

7.4.14. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x$

7.4.15. $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot 3 \sin x \cdot \ln x$

7.4.16. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

7.4.17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

7.4.18. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

7.4.19. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

7.4.20. $f(x) = x^2 \cdot \dfrac{\sin x}{\ln x}$

Derivace složené funkce

V následujících úlohách vypočtěte první derivaci zadaných funkcí.

7.4.21. $f(x) = (3x^2 + 6x - 1)^5$

7.4.22. $f(x) = \dfrac{5}{(1 + 3x)^4}$

7.4.23. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

7.4.24. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

7.4.25. $f(x) = (5x^2 - 4x)^{2013}$

7.4.26. $f(x) = \ln(3x^2 + 10)$

7.4.27. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{10-2x}}$

7.4.28. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + 1}}$

7.4.29. $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$

7.4.30. $f(x) = \operatorname{arctg}(5x - 1)$

Smíšené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte první derivaci zadaných funkcí.

7.4.31. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

7.4.32. $f(x) = \ln(x \cdot \sin x)$

7.4.33. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 2}{4 - x}\right)$

7.4.34. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{x^2 + 5}}$

7.4.35. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos(2x)}$

7.4.36. $f(x) = (3x + 1) \cdot 2^{3x+5}$

7.4.37. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 10)}{4x}$

7.4.38. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{5}{x+2}}$

7.4.39. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt[5]{1-\sin x}}$

7.4.40. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

Derivace vyšších řádů

V následujících úlohách vypočtěte druhé derivace zadaných funkcí.

7.4.41. $f(x) = 3x + 5$

7.4.42. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 11$

7.4.43. $f(x) = (2x+1)(4x-6)$

7.4.44. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

7.4.45. $f(x) = 4\sin x - 3\cos x$

7.4.46. $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

7.4.47. $f(x) = \ln(x+2)$

7.4.48. $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$

7.4.49. $f(x) = x\,\ln x - x$

7.4.50. $f(x) = \dfrac{5+\ln x}{x}$

Výsledky cvičení

7.4.1 $f'(x) = 10x + 3$ **7.4.2** $f'(x) = 3x^2 + 20x + 7$ **7.4.3** $f'(x) = -\frac{2}{1\,000}$ **7.4.4** $f'(x) = \frac{12x+3}{50}$ **7.4.5** $f'(x) = 5\cos x + 7\sin x$ **7.4.6** $f'(x) = \frac{7}{\cos^2 x} + \cos x$ **7.4.7** $f'(x) = 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ **7.4.8** $f'(x) = \frac{3}{x}$ **7.4.9** $f'(x) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ **7.4.10** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **7.4.11** $f'(x) = 9x^2 + 20x + 3$ **7.4.12** $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ **7.4.13** $f'(x) = \frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x$ **7.4.14** $f'(x) = (\cos x - 2x\sin x)/(2\sqrt{x})$ **7.4.15** $f'(x) = 3\operatorname{tg} x\left(\frac{\ln x}{\cos x} + \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$ **7.4.16** $f'(x) = (x^2 + 2x - 1)/(x+1)^2$ **7.4.17** $f'(x) = (x^2 - 4x + 1)/(x-2)^2$ **7.4.18** $f'(x) = 1/(\cos^2 x)$ **7.4.19** $f'(x) = (1 - \ln x)/(x^2)$ **7.4.20** $f'(x) = (2x\sin x \ln x - x\sin x + x^2 \cos x \ln x)/(\ln^2 x)$ **7.4.21** $f'(x) = 5(3x^2 + 6x - 1)^4 \cdot (6x+6)$ **7.4.22** $f'(x) = -20/(1+3x)^5$ **7.4.23** $f'(x) = -x/\sqrt{9-x^2}$ **7.4.24** $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ **7.4.25** $f'(x) = 2\,013(5x^2 - 4x)^{2\,012} \cdot (10x - 4)$ **7.4.26** $f'(x) = 6x/(3x^2+10)$ **7.4.27** $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-10}$ **7.4.28** $f'(x) = (1 + 1/(3\sqrt[3]{(x+1)^2}))/(2\sqrt{x + \sqrt[3]{x+1}})$ **7.4.29** $f'(x) = (\cos 2x)/\sqrt{\sin 2x}$ **7.4.30** $f'(x) = 5/((5x-1)^2+1)$ **7.4.31** $f'(x) = -1/\sqrt{(x+1)(x-1)^3}$ **7.4.32** $f'(x) = (\sin x + x\cos x)/(x \cdot \sin x)$ **7.4.33** $f'(x) = 6/((x+2)(4-x))$ **7.4.34** $f'(x) = -10x/\sqrt{(x^2+5)^3}$ **7.4.35** $f'(x) = 2\sin x \operatorname{tg}(2x) + \cos x/\cos(2x)$ **7.4.36** $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x+5} \cdot (1 + (3x+1)\ln 2)$ **7.4.37** $f'(x) = ((2x^2)/(x^2+10) - \ln(x^2+10))/(4x^2)$ **7.4.38** $f'(x) = -5 \cdot \mathrm{e}^{\frac{5}{x+2}}/(x+2)^2$ **7.4.39** $f'(x) = (2\cos x)/\sqrt[5]{(1-\sin x)^6}$ **7.4.40** $f'(x) = (x^2+1)^2/((x^2+1)^2+1)$ **7.4.41** $f'(x) = 0$ **7.4.42** $f'(x) = 24x - 10$ **7.4.43** $f'(x) = 16$ **7.4.44** $f'(x) = 2(x^3 + 3x^2 - 3x - 1)/(x^2+1)^3$ **7.4.45** $f'(x) = 3\cos x - 4\sin x$ **7.4.46** $f'(x) = -8\cos 2x/(\sin 2x)^3$ **7.4.47** $f'(x) = -1/(x+2)^2$ **7.4.48** $f'(x) = \mathrm{e}^x(x+2)$ **7.4.49** $f'(x) = 1/x$ **7.4.50** $f'(x) = (7 + 2\ln x)/x^3$

Kapitola 8

Použití derivací

8.1 L'Hospitalovo pravidlo

V této kapitole si ukážeme využití derivací při výpočtu některých limit ve tvaru neurčitých výrazů. O tom hovoří následující věta.

Věta 8.1.1 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty.$$

Nechť dále existuje limita

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom existuje i limita

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.1}$$

Znění věty zůstává v platnosti i pro limity v nevlastních bodech a také pro jednostranné limity.

Počítáme-li limitu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a přitom je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, potom říkáme, že počítáme limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Analogicky, pro $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$ označujeme limitu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ jako limitu typu $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$.

Historická poznámka 8.1.2. L'Hospitalovo pravidlo bylo poprvé publikováno v roce 1696 v učebnici *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, jejímž autorem byl francouzský markýz GUILLAUME DE L'HOSPITAL (1661 - 1704). L'Hospitalovo jméno zde není uvedeno celé. Vzhledem k tomu, že pocházel z jednoho z nejváženějších francouzských šlechtických rodů, jeho úplné jméno by zabralo celý odstavec. L'Hospital nebyl původním autorem uvedené myšlenky. Skutečným objevitelem byl patrně JOHANN BERNOULLI (1667 - 1748), který dané pravidlo znal již v letech 1691/92. V korespondenci jej sdělil l'Hospitalovi a ten jej s jeho svolením publikoval ve své učebnici.

V následujících příkladech si ukážeme, jak nám l'Hospitalovo pravidlo pomůže významně zjednodušit výpočet limit ve formě neurčitých výrazů. Poznamenejme, že v některých příkladech použitím l'Hospitalova pravidla dostaneme opět limitu typu $\dfrac{0}{0}$, nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$. V takovém případě lze při splnění předpokladů Věty 8.1.1 pro funkce f' a

g' opět použít l'Hospitalovo pravidlo. V takovém případě budeme pracovat s limitou $\lim_{x\to a} f''/g''$ atd.

Upozorněme ještě na častou chybu, které se nezkušení uživatelé diferenciálního počtu dopouštějí. Touto chybou je záměna l'Hospitalova pravidla se vzorcem pro derivaci podílu dvou funkcí. Zdůrazněme proto, že v případě l'Hospitalova pravidla zderivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli zadaného zlomku. V případě derivace podílu pak používáme jiný postup, který odpovídá vzorci (7.10) na straně 353.

Příklad 8.1

8.1. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Řešení: Dosazením $x = 0$ do předpisů funkcí $y = \sin x$ a $y = x$ dostaneme pokaždé nulovou hodnotu. Je proto $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Tím je splněn první předpoklad Věty 8.1.1. Ověřme zbývají předpoklad, tj. ověřme, zda existuje $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

Tedy uvedená limita existuje. Potom platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = 1.$$

Zadaná limita tedy existuje a její hodnota je rovna jedné.

Při řešení Příkladu 8.1 jsme zdůrazňovali ověření podmínek Věty 8.1.1. V dalších příkladech již nebudeme tolik zdůrazňovat ověřování těchto podmínek, nicméně vždy si splnění těchto podmínek ověřte, tj. používejte znění Věty 8.1.1 pouze na limity typu $0/0$, resp. ∞/∞. V následujících příkladech budeme toto ověření naznačovat vložením symbolu $\dfrac{0}{0}$, resp. $\dfrac{\infty}{\infty}$ do výpočtu.

Příklad 8.2

8.2. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-5x+6\right)'}{(x-2)'} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{1} = -1$

K postupu v Příkladu 8.2 připojíme následující poznámku. Zápis řešení je veden tak, jako bychom již věděli, že $\lim_{x\to a} f'/g'$ existuje. Správný zápis by měl vypadat tak, že nejprve ověříme existenci limity podílu f'/g', a teprve potom její hodnotu položíme rovnu limitě podílu f/g. Pro zjednodušení zápisu však budeme i nadále používat výše uvedený zápis.

Příklad 8.3

8.3. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{-x} = \dfrac{0}{1} = 0$

Příklad 8.4

8.4. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{\cos x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}}{-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2}{\cos^3 x} = -2$$

Po prvním použití l´Hospitalova pravidla jsme opět dostali limitu ve tvaru $0/0$. Proto bylo znovu použito l´Hospitalovo pravidlo.

8.5. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$.

Příklad 8.5

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} &= \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} \\ &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \sin x = (-1)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

V následujících příkladech budeme řešit tzv. limity typu $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 1^∞. Mnohé z nich lze převést na zlomek ve tvaru $0/0$, resp. ∞/∞ a poté dopočítat jejich hodnotu pomocí l'Hospitalova pravidla. Při výpočtu budeme symbolem $\overset{\text{l'H.}}{=}$ naznačovat, kdy jsme použili l'Hospitalovo pravidlo.

8.6. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Příklad 8.6

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln x &= 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\lim_{x\to 0^+} x = 0\end{aligned}$$

Zadaná limita byla ve tvaru $0\cdot(-\infty)$. Při jejím výpočtu jsme využili rovnost $x = 1/(1/x)$. Tím jsme limitu převedli do tvaru $-\infty/\infty$ a poté již bylo možné použít l´Hospitalovo pravidlo.

8.7. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)$.

Příklad 8.7

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right) &= (\infty-\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)} = \frac{0}{0} \\ &\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-(1+x)}{x+1}}{\frac{(x+1)\ln(x+1)+x}{x+1}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(x+1)\ln(x+1)+x} = \frac{0}{0} \\ &\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\ln(x+1)+1+1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Zadaná limita byla ve tvaru $(\infty-\infty)$. Funkci jsme úpravou na společného jmenovatele převedli na jeden zlomek. Tím jsme dostali limitu typu $0/0$. Následovalo použití l´Hospitalova pravidla, přičemž po úpravě jsme opět dostali limitu typu $0/0$. Následovalo druhé použití l´Hospitalova pravidla, které již postačovalo k určení hodnoty zadané limity.

8.8. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x$.

Příklad 8.8

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x &= 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) \\ &= (-2)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Zadaná limita byla ve tvaru $0 \cdot \infty$. Při výpočtu jsme upravili zadanou funkci do jiného tvaru, použili jsme opět vztah $x = 1/(1/x)$. Následným použitím l´Hospitalova pravidla jsme dostali limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(x)$, kterou jsme již vyřešili v Příkladu 8.6. Použili jsme proto výsledek z tohoto příkladu.

Příklad 8.9

8.9. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(\ln(x)\ln(x+1)\big)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+} \big(\ln(x)\ln(x+1)\big) = (-\infty)\cdot 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{0}{\frac{1}{-\infty}} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln^2 x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Limita je ve tvaru $(-\infty)\cdot 0$. Úpravou jsme ji převedli do tvaru $0/0$ a použili l´Hospitalovo pravidlo. Při dalším výpočtu jsme pak využili výsledek Příkladu 8.8.

Příklad 8.10

8.10. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x} = 1^{-\infty} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x)\ln(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(x+1)} = e^0 = 1$$

Limita byla ve tvaru $1^{-\infty}$. Použitím vztahů $A = e^{\ln A}$ a $\ln A^b = b\cdot \ln A$ jsme limitu převedli do tvaru, kdy v exponentu máme výraz $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(x+1)$. Tuto limitu jsme již spočítali v Příkladu 8.9, zde jsme zjištěný výsledek využili.

8.2 Tečna ke grafu funkce

Při zavádění pojmu limita funkce a derivace funkce jsme často využívali pojem tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Připomeňme intuitivní představu tečny jakožto přímky, která prochází daným bodem grafu a má v tomto bodě stejný sklon jako samotný graf. Nutnou a postačující podmínku existence tečny spolu s návodem na nalezení rovnice této tečny uvádí následující věta.

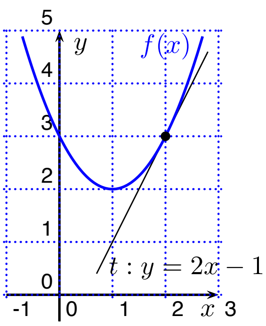
Věta 8.2.1. *Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má derivaci v bodě x_0. Potom existuje tečna ke grafu funkce v bodě $[x_0, y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$. Rovnici této tečny lze odvodit ze vztahu*

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{8.2}$$

kde $f'(x_0)$ je derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Ze vzorce (8.2) je zřejmé, že směrnice tečny odpovídá derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0. To je v souladu s tím, jak jsme zavedli pojem derivace funkce v Kapitole 7.

Příklad 8.11



8.11. Vypočtěte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 2x + 3$ v bodě $P = [2, f(2)]$.

Řešení: Podle zadání je $x_0 = 2$, určíme hodnotu y_0. Je $y_0 = f(2) = 2^2 - 2\cdot 2 + 3 = 3$. Pro derivaci funkce f platí $f'(x) = 2x - 2$. Je $f'(2) = 2\cdot 2 - 2 = 2$. Dosazením do vzorce (8.2) dostaneme

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - 3 &= 2(x - 2) \\ &= 2x - 4 \\ y &= 2x - 1. \end{aligned}$$

Hledaná rovnice tečny je $y = 2x - 1$.

Příklad 8.12

8.12. Nalezněte tečnu ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ v bodě $P = [0, f(0)]$.

Řešení: Podle zadání je $x_0 = 0$, určíme hodnotu y_0.

$$y_0 = f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Pro derivaci funkce f platí $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$. Je $f'(0) = \dfrac{2}{(0+1)^2} = 2$. Dosazením do vzorce (8.2) dostaneme

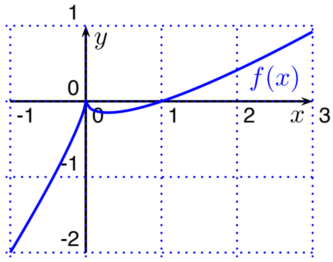
$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - (-1) &= 2(x - 0) \\ y &= 2x - 1. \end{aligned}$$

Hledaná tečna má rovnici $y = 2x - 1$.

Příklad 8.13

8.13. Nalezněte tečnu ke grafu funkce $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$ v bodě $P = [0, f(0)]$.

Řešení: Podle zadání je $x_0 = 0$, určíme hodnotu y_0. Je $y_0 = f(0) = 0 - \sqrt[3]{0^2} = 0$. Pro derivaci funkce f platí $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Tato funkce je definována na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. V bodě $x = 0$ tedy funkce f nemá derivaci. Proto neexistuje tečna ke grafu funkce v tomto bodě.



Následující dvě úlohy jsou odlišné od předchozích. Naším úkolem bude nalézt tečnu (tečny) ke grafu funkce, přičemž budeme znát pouze předpis funkce a bod neležící na grafu funkce, kterým má tečna procházet. Při řešení budeme muset nejprve nalézt bod $[x_0, f(x_0)]$, ve kterém se tečna dotýká grafu funkce f, a teprve poté dopočítat její rovnici.

Příklad 8.14

8.14. Vypočtěte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 2x + 2$, která prochází bodem P o souřadnicích $[1, 0]$.

Řešení: Předpokládejme, že hledaná tečna se dotýká grafu funkce f v bodě o souřadnicích $[x_0, f(x_0)] = [x_0, y_0]$. Najdeme tento bod. Vyjdeme z rovnice (8.2). Víme, že tečna prochází bodem o souřadnicích $[1, 0]$. Souřadnice dosadíme do předpisu rovnice tečny. Je $(0 - y_0) = k(1 - x_0)$. Směrnici k rovnice tečny zatím neznáme. Víme však, že je rovna derivaci funkce f v bodě x_0, tedy je $k = 2x_0 - 2$. Tím dostaneme

$$0 - y_0 = (2x_0 - 2)(1 - x_0). \tag{8.3}$$

Víme, že $y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 2x_0 + 2$. Dosazením do (8.3) dostaneme rovnici o jedné neznámé

$$0 - (x_0^2 - 2x_0 + 2) = (2x_0 - 2)(1 - x_0). \tag{8.4}$$

Rovnici (8.4) převedeme jednoduchou úpravou na rovnici $x_0^2 - 2x_0 = 0$, která má dva kořeny $x = 0$ a $x = 2$. Zjistili jsme, že existují dvě tečny ke grafu funkce, které procházejí bodem o souřadnicích $[1, 0]$. Jedna z nich se dotýká grafu funkce v bodě o souřadnicích $[0, f(0)] = [0, 2]$ a druhá v bodě o souřadnicích $[2, f(2)] = [2, 2]$.

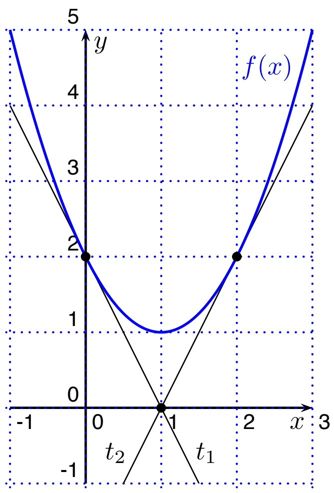
Nyní máme několik možností, jak rovnice obou tečen dopočítat. Buď si uvědomíme, že známe dva body, kterými přímka prochází (tj. bod dotyku tečny s grafem funkce f a předepsaný bod $[1, 0]$). Potom řešíme úlohu analogickou příkladu 5.65 na straně 256. Nebo nalezneme tečnu ke grafu funkce f v bodech $[0, 2]$ a $[2, 2]$, viz příklad 8.11.

K výpočtu tečny v bodě $[0, 2]$ použijeme druhou možnost. Již víme, že rovnice tečny bude vyhovovat rovnosti

$$y - 2 = f'(0)(x - 0).$$

Protože je $f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$ rovnice tečny vyhovuje rovnosti $y - 2 = -2(x - 0)$. Snadnou úpravou dostaneme rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0, 2]$ ve tvaru

$$t_1 : y = -2x + 2.$$



K výpočtu tečny ke grafu funkce v bodě $[2, 2]$ použijeme první zmiňovanou možnost. Hledáme přímku s rovnicí $y = kx+q$, která prochází body $[2, 2]$ a $[1, 0]$. Směrnici přímky k vypočteme podle vzorce

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2-0}{2-1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Hodnotu q zjistíme dosazením souřadnic jednoho z bodů, např. bodu $[1, 0]$, do rovnice přímky. Je $0 = 2 \cdot 1 + q$, tedy $q = -2$. Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[2, 2]$ tedy zní

$$t_2 : y = 2x - 2.$$

Ověřte výpočtem, že obě nalezené tečny skutečně procházejí bodem o souřadnicích $[1, 0]$!

8.3 Asymptoty grafu funkce

Při určování rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 jsme předpokládali, že funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci a je tedy v tomto bodě definovaná. Nyní se budeme zabývat těmi případy, kdy funkce z nejrůznějších důvodů uvedenou podmínku nesplňuje. Speciálně se budeme zabývat těmi případy, kdy funkce $f(x)$ není v bodě x_0 definována, nebo je bod x_0 nevlastním bodem funkce.

Pro tečnu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 platilo, že pro $x \to x_0$ se sklon grafu funkce stále více blížil sklonu tečny a v bodě x_0 sklon grafu funkce i příslušné tečny byly shodné. Nyní se budeme zabývat situací, kdy se pro $x \to x_0$ graf funkce svým sklonem blíží sklonu jisté přímky, nicméně v bodě x_0 není funkce definována, nebo se jedná o nevlastní bod $\pm\infty$. Takovou přímku potom nazýváme asymptota grafu funkce a můžeme ji považovat za jakousi „zobecněnou tečnu“ grafu funkce v uvedených typech bodů.

Funkce může mít několik asymptot, nemusí však mít ani jednu asymptotu. V následující definici si přiblížíme pojem asymptoty grafu funkce v nevlastních bodech ∞, resp. $-\infty$.

Definice 8.3.1. Předpokládejme, že existují vlastní limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2,$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q_1, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q_2.$$

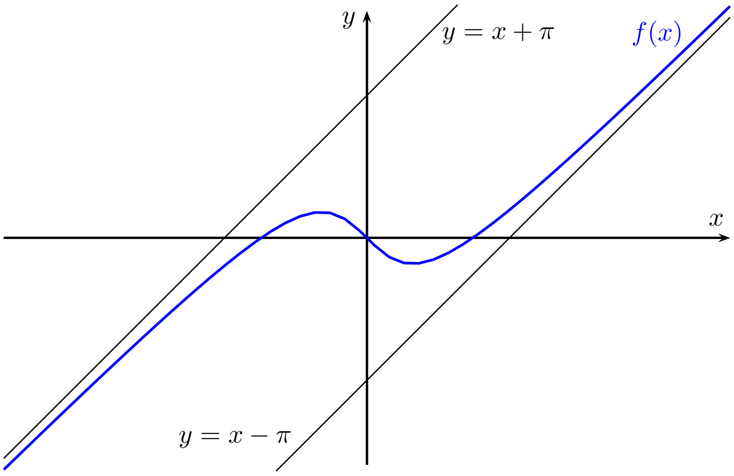
Potom řekneme, že přímka o rovnici $y = k_1x + q_1$, resp. $y = k_2x + q_2$ je (*šikmou*) *asymptotou* grafu funkce f v ∞, resp. $-\infty$. Je-li $k_1 = 0$, resp. $k_2 = 0$, mluvíme o tzv. vodorovné asymptotě funkce f.

Přibližně řečeno, směrnice šikmé asymptoty nám ukazuje rychlost změny funkce pro značně velké hodnoty argumentu. Na obrázku s grafem funkce také poznáte asymptotu tak, že pro velké hodnoty argumentu se graf funkce stále více přibližuje asymptotě funkce.

Příklad 8.15

8.15. Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

Řešení: Funkce f je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je spojitá na $\mathbb{R}$. Vyšetříme existenci



Obrázek 8.1: Graf funkce $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ s dvěma šikmými asymptotami $y = x + \pi$ a $y = x - \pi$

šikmých asymptot.

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) \\
&= 1 - 2 \cdot \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 1, \\
k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) \\
&= 1 - 2 \cdot \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = 1, \\
q_1 &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} [(x - 2\operatorname{arctg} x) - x] = -2 \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x \\
&= -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi, \\
q_2 &= \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} [(x - 2\operatorname{arctg} x) - x] = -2 \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x \\
&= -2 \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

Při řešení jsme využili skutečnost, že $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$. Šikmou asymptotou v $-\infty$ je přímka s rovnicí $y = x + \pi$ a šikmou asymptotou v ∞ je přímka s rovnicí $y = x - \pi$, viz Obrázek 8.1.

8.16. Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = 4x^2 + 5x - 10$. **Příklad 8.16**

Řešení: Výpočtem zjistíme, zda má funkce $f(x) = 4x^2 + 5x - 10$ šikmou asymptotu.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2 + 5x - 10}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 4x + 5 - \frac{10}{x} = \pm\infty.$$

Uvedené limity nejsou vlastní limity. Proto funkce f nemá šikmou asymptotu.

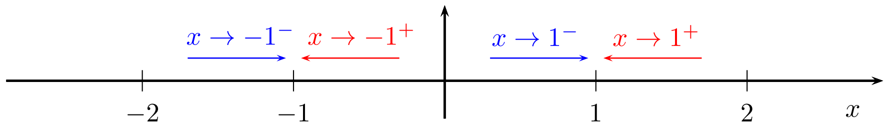
Definice 8.3.2. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 (*svislou*) *asymptotu* $x = x_0$, jestliže funkce f má v bodě x_0 alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu.

8.17. Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$. **Příklad 8.17**

Řešení: Funkce f není definována v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Ke zjištění existence svislé asymptoty vyšetříme jednostranné limity v obou bodech. Nejprve vyšetříme jednostrannou limitu

$$\lim_{x\to -1^-}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right).$$

Pro $x \to -1^-$ leží všechny uvažované hodnoty x na číselné ose vlevo od čísla -1, jsou proto v absolutní hodnotě větší než jedna a jejich druhá mocnina je také větší než jedna. Od této mocniny odečítáme číslo jedna, výsledek proto musí být kladné číslo.



Pro $x \to -1^-$ tedy platí $x^2-1 \to 0^+$. Je

$$\lim_{x\to -1^-}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) = 1+\frac{1}{0^+} = 1+\infty = \infty.$$

S analogickým zdůvodněním vypočteme následující limity. Platí

$$\lim_{x\to -1^+}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) = 1+\frac{1}{0^-} = 1+(-\infty) = -\infty,$$

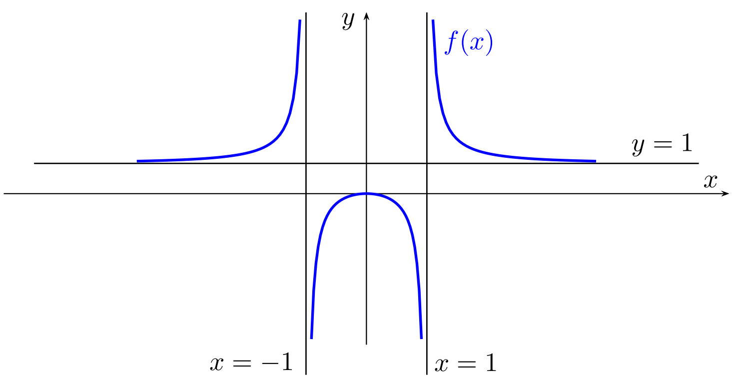
$$\lim_{x\to 1^-}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) = 1+\frac{1}{0^-} = 1+(-\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) = 1+\frac{1}{0^+} = 1+\infty = \infty.$$

Funkce f má nevlastní jednostranné limity v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$, má proto svislé asymptoty $x = -1$ a $x = 1$. K vyšetření existence šikmých asymptot vypočteme limity

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{1}{\pm\infty}\cdot\frac{1}{\infty} = 0\cdot 0 = 0,\\
q &= \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right) - 0\cdot x\right]\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{1}{x^2-1}-0\right] = 1.
\end{aligned}$$

Funkce f má vodorovnou asymptotu s rovnicí $y = 1$. Viz Obrázek 8.2.



Obrázek 8.2: Graf funkce $f(x) = 1+\dfrac{1}{x^2-1}$ s dvěma svislými asymptotami $x = -1, x = 1$ a jednou vodorovnou asymptotou $y = 1$

Příklad 8.18

8.18. Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Řešení: Funkce f není definována v bodě $x = 2$. Vyšetříme proto obě jednostranné limity v tomto bodě. Položme $t = x - 2$. Potom je

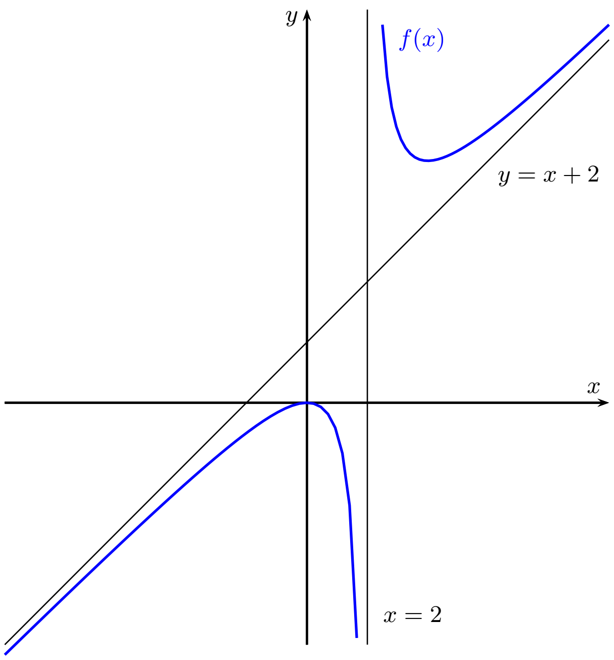
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{t\to 0^-} \frac{(t+2)^2}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{4}{t} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(t+2)^2}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{4}{t} = \infty.$$

V bodě $x = 2$ má funkce nevlastní jednostranné limity, proto je přímka o rovnici $x = 2$ svislou asymptotou funkce f. Nyní vyšetříme existenci šikmé asymptoty.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\dfrac{2}{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\dfrac{2}{x}} = 2$$

Přímka s rovnicí $y = x + 2$ je tedy šikmou asymptotou ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, viz Obrázek 8.3.



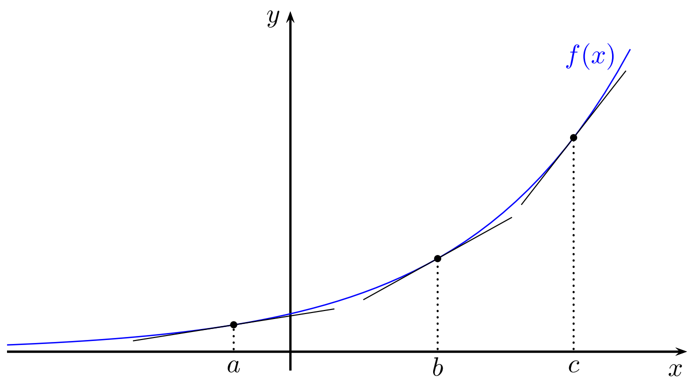
Obrázek 8.3: Graf funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ se svislou asymptotou $x = 2$ a šikmou asymptotou $y = x + 2$

8.4 Průběh funkce

Derivace funkce nám poskytuje dobrou představu o chování funkce v celém definičním oboru. Některé úlohy spojené s vyšetřováním průběhu funkce jsme již zmínili. Jedná se o vyšetřování definičního oboru funkce, stanovení případných asymptot funkce. Nyní k těmto úlohám přidáme další, konkrétně vyšetřování monotonie a vypuklosti funkce. Těmito úlohami máme na mysli zjištění, na kterých intervalech je funkce rostoucí, resp. klesající a konvexní, resp. konkávní, viz Kapitola 8.4.1 a 5.3.4. V souvislosti s těmito úkoly se řeší úlohy, které mají praktické uplatnění v mnoha případech - vyšetřování lokálních a globálních extrémů funkce.

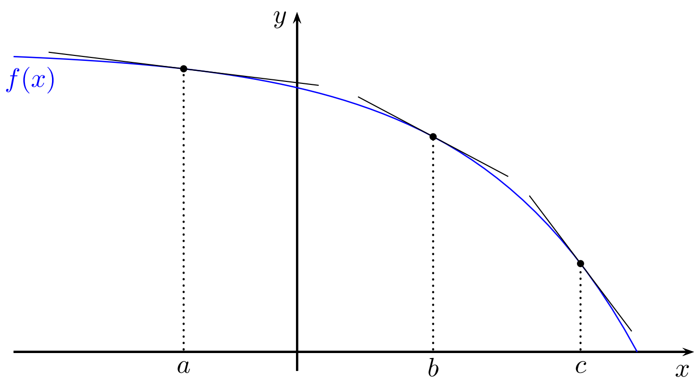
8.4.1 Vyšetřování intervalů monotonie funkce

Při práci s derivací funkce je dobré mít na zřeteli její význam. Na Obrázku 8.4 je znázorněn graf rostoucí funkce a několik jejích tečen. Všimněte si, že všechny tečny mají kladnou směrnici.



Obrázek 8.4: Tečny ke grafu rostoucí funkce

Podobně jsou na Obrázku 8.5 znázorněny tečny ke grafu klesající funkce. V tomto případě mají všechny zobrazené tečny zápornou směrnici.



Obrázek 8.5: Tečny ke grafu klesající funkce

Již víme, že směrnice tečny v bodě x_0 je rovna derivaci funkce v daném bodě. Lze tedy snadno nahlédnout, že hodnota derivace v bodě x_0 naznačuje, zda je funkce rostoucí či klesající v bodě x_0. Následující věta toto tvrzení upřesňuje.

Věta 8.4.1. *Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci a platí $f'(x_0) > 0$. Potom funkce f je v bodě x_0 rostoucí. Je-li $f'(x_0) = 0$ a existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je $f'(x) > 0$, potom je funkce f v bodě x_0 také rostoucí.*

Chceme-li najít všechny body, ve kterých je funkce rostoucí, stačí najít derivaci funkce a zjistit, ve kterých bodech je tato derivace kladná. Podobná věta platí i pro klesající funkci.

Věta 8.4.2. *Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci a platí $f'(x_0) < 0$. Potom funkce f je v bodě x_0 klesající. Je-li $f'(x_0) = 0$ a existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je $f'(x) < 0$, potom je funkce f v bodě x_0 také klesající.*

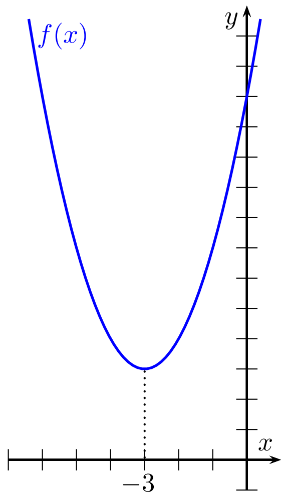
Pomocí Vět 8.4.1 a 8.4.2 je možné nalézt intervaly monotonie, tj. zjistit, na kterých intervalech je funkce rostoucí a na jakých intervalech je funkce klesající. Budeme přitom postupovat tak, že nalezneme derivaci funkce a zjistíme, na kterých intervalech je derivace funkce kladná, resp. záporná.

Příklad 8.19

8.19. V Příkladu 5.78 na straně 270 jsme vyšetřovali intervaly monotonie kvadratické funkce $f(x) = x^2 + 6x + 12$. Ověřme zjištěné výsledky výpočtem s využitím Vět 8.4.1 a 8.4.2

Řešení: Při hledání intervalů monotonie potřebujeme zjistit, ve kterých bodech je derivace funkce f (tj. funkce $f'(x) = 2x + 6$) kladná a ve kterých bodech je záporná. Řešení nalezneme pomocí nulového bodu funkce, tedy řešením rovnice

$$\begin{aligned} 2x + 6 &= 0 \\ x &= -3. \end{aligned}$$



Funkce $f'(x) = 2x + 6$ je spojitá, jejím jediným nulovým bodem je $x = -3$. Proto intervaly monotonie budou $I_1 = (-\infty, -3)$ a $I_2 = (-3, \infty)$. Nyní musíme zjistit, ve kterém z uvedených intervalů je funkce rostoucí a ve kterém klesající. K tomu vybereme z každého intervalu po jednom vhodném bodu. Z intervalu I_1 si vybereme např. bod $x_1 = -10$, z intervalu I_2 vyberme bod $x_2 = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 6 \\ f'(-10) &= 2 \cdot (-10) + 6 \\ &= -14 \\ &< 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f'(x) &= 2x + 6 \\ f'(0) &= 2 \cdot 0 + 6 \\ &= 6 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Pro $x_1 \in I_1$ je $f'(x_1) < 0$. Proto je i derivace $f'(x)$ záporná pro všechna $x \in I_1$. Pro $x_2 \in I_2$ je $f'(x_2) > 0$ a derivace $f'(x)$ je tedy kladná pro všechna $x \in I_2$.

Vzhledem ke znění Vět 8.4.1 a 8.4.2 plyne, že funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $I_1 = (-\infty, -3)$ a rostoucí na intervalu $I_2 = (-3, \infty)$, což je v souladu s výsledky zjištěnými v Příkladu 5.78.

V následujícím příkladu si ukážeme, že neplatí věta obrácená k Větě 8.4.1. Je-li funkce $f(x)$ rostoucí v nějakém bodě x_0 a má v tomto bodě derivaci, nemusí nutně platit nerovnost $f'(x_0) > 0$.

Příklad 8.20

8.20. Je dána funkce $f(x) = 1 + (x - 1)^3$. Zjistíme

a) ve kterých bodech x je odpovídající tečna rovnoběžná s osou x,

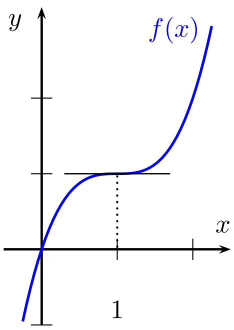
b) ve kterých bodech x je funkce $f(x)$ rostoucí, resp. klesající.

Řešení:

a) Nalezneme derivaci funkce $f(x)$. Je $f'(x) = 3(x - 1)^2$. Je-li tečna ke grafu funkce $f(x)$ rovnoběžná s osou x, potom její směrnice je rovna nule. Hledáme tedy všechna x, pro která je $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2 &= 0 && \textit{\dots původní zadání rovnice} \\ (x-1)^2 &= 0 && \textit{\dots obě strany rovnice dělíme třemi} \\ |x-1| &= 0 && \textit{\dots obě strany rovnice odmocníme} \\ x &= 1 && \textit{\dots rovnice má jediný kořen } x = 1 \end{aligned}$$

Tečna je rovnoběžná s osou x pro $x = 1$. V žádném jiném bodě $x \in D(f)$ není $f'(x) = 0$, proto je tečna ke grafu funkce $f(x)$ rovnoběžná s osou x pouze v tomto jediném bodě.



b) Zjistíme, ve kterých bodech je derivace zadané funkce kladná, resp. záporná. Z předpisu derivace funkce $f'(x) = 3(x-1)^2$ vidíme, že až na kladnou multiplikativní konstantu je předpis funkce dán druhou mocninou jistého výrazu a tato derivace tedy nemůže nabývat záporné funkční hodnoty. S výjimkou bodu $x = 1$ jsou funkční hodnoty $f'(x)$ kladné, a původně zadaná funkce $f(x)$ je proto rostoucí pro všechna $x \neq 1$.

Otázkou zůstává, zda je funkce rostoucí také v bodě $x = 1$. K jejímu zodpovězení použijeme druhou část Věty 8.4.1. Víme, že je $f'(1) = 0$ a pro všechna $x \neq 1$ je $f'(x) > 0$. Proto existuje okolí bodu $x = 1$, na kterém je $f'(x) > 0$ a funkce je rostoucí i v bodě $x = 1$.

Funkce $f(x) = 1 + (x-1)^3$ je tedy rostoucí pro všechna $x \in D(f)$, tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

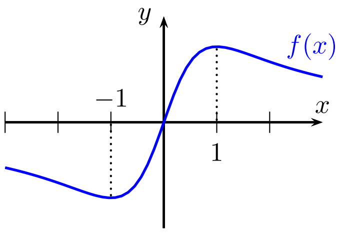
Příklad 8.21

8.21. Vyšetříme intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Řešení: Je $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Nulové body funkce f' jsou $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Definiční obor funkce f' je množina $\mathbb{R}$. Tuto množinu rozdělíme pomocí nulových bodů funkce na intervaly $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$, $I_3 = (1, \infty)$ a dosazením zjistíme „znaménko“ funkce f' v těchto intervalech, viz Tabulka 8.1, kde znaménko $+$, resp. $-$ znamená, že funkce f' má pro všechna x z daného intervalu kladnou, resp. zápornou funkční hodnotu. Protože funkce f' je záporná ve všech bodech intervalů $(-\infty, -1)$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

Tabulka 8.1: Intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

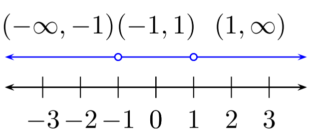


a $(1, \infty)$, je funkce f na těchto množinách klesající (v Tabulce 8.1 vyznačeno symbolem $\downarrow$). V intervalu $(-1, 1)$ je f' kladná, tedy funkce f je v tomto intervalu rostoucí (v Tabulce 8.1 vyznačeno symbolem $\uparrow$).

Příklad 8.22

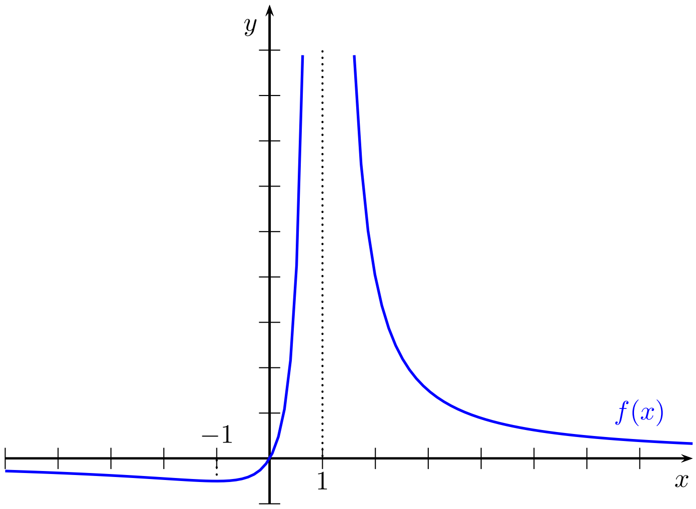
8.22. Vypočteme intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$.

Řešení: Nejdříve nalezneme nulové body funkce $f'(x)$ a také body, ve kterých není tato funkce definována. Je $f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$. Funkce f' není definována v bodě $x = 1$ a jejím jediným nulovým bodem je $x = -1$. Definiční obor funkce f' je těmito body rozdělen na tři intervaly $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$ a $I_3 = (1, \infty)$. Dosazením konkrétních hodnot do těchto intervalů zjistíme znaménko funkce f' na daném intervalu. Z intervalu I_1 uvažujme například bod $x = -2$, z intervalu I_2 bod $x = 0$, z intervalu I_3 bod $x = 2$. Tím dostaneme



$$f'(-2) = \frac{-2(-2+1)}{(-2-1)^3} = -\frac{2}{27}$$
$$f'(0) = \frac{-2(0+1)}{(0-1)^3} = 2$$
$$f'(2) = \frac{-2(2+1)}{(2-1)^3} = -6.$$

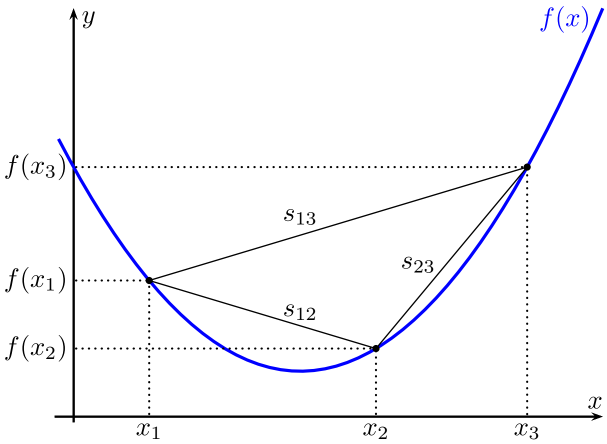
Funkce f' je proto záporná pro všechna $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a kladná pro všechna $x \in (-1, 1)$. Funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $I_1 = (-\infty, -1)$, rostoucí na intervalu $I_2 = (-1, 1)$ a klesající na intervalu $I_3 = (1, \infty)$.



Obrázek 8.6: Graf funkce $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$

8.4.2 Vyšetřování intervalů vypuklosti funkce

V Kapitole 5.3.4 jsme si přiblížili pojem konvexní a konkávní funkce jakožto způsobu, kterým je vypuklý (prohnutý) graf funkce. Nyní si již můžeme zavést korektní definici konvexní, resp. konkávní funkce na intervalu I. Pomohou nám přitom směrnice sečen odpovídajících třem libovolným bodům x_1, x_2, x_3 z intervalu I, kde předpokládáme $x_1 < x_2 < x_3$, viz Obrázek 8.7. Označme sečny spojující body $[x_1,\ f(x_1)]$ a



Obrázek 8.7: Sečny ke grafu konvexní funkce

$[x_2,\ f(x_2)]$ symbolem s_{12}, analogicky pak sestrojme sečny s_{13} a s_{23}. Z Kapitoly 5.6.2 víme, že směrnici sečny s_{12} (označme ji symbolem $k(s_{12})$) vypočteme ze vztahu

$$k(s_{12}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Analogicky pak dostaneme

$$k(s_{13}) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$
$$k(s_{23}) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Nyní si uvědomme, jaký je vzájemný sklon výše uvedených směrnic sečen. Z obrázku je zřejmé, že nejnižší směrnici má sečna s_{12}, o něco větší je hodnota směrnice sečny

s_{13} a nejvyšší hodnotu má směrnice sečny s_{23}, je tedy $k(s_{12}) \leq k(s_{13}) \leq k(s_{23})$.[1]) Uvedené pozorování nastane v případě funkce konvexní na intervalu I pro jakákoliv x_1, x_2, x_3, pro která platí $x_1 < x_2 < x_3$. Konvexní funkci lze tedy definovat následujícím způsobem.

Definice 8.4.3. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *konvexní na intervalu* I, jestliže pro všechny body $x_1, x_2, x_3 \in I$, které vyhovují nerovnostem $x_1 < x_2 < x_3$, jsou splněny nerovnosti

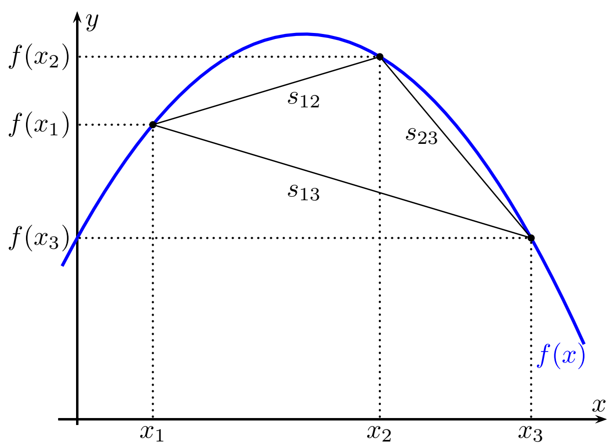
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{8.5}$$

Pokud ve vzorci (8.5) zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme definici *ryze konvexní funkce*.

Analogicky je možné zavést definici konkávní funkce. V tomto případě snadno nahlédneme, že pro příslušné sečny platí nerovnosti

$$k(s_{23}) \leq k(s_{13}) \leq k(s_{12}),$$

viz Obrázek 8.8. Díky uvedeným nerovnostem můžeme uvést definici konkávní funkce v následujícím znění.



Obrázek 8.8: Sečny ke grafu konkávní funkce

Definice 8.4.4. Řekneme, že funkce f je *konkávní na intervalu* I, jestliže pro všechny body $x_1, x_2, x_3 \in I$, které vyhovují nerovnostem $x_1 < x_2 < x_3$, platí nerovnosti

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{8.6}$$

Pokud ve vzorci (8.6) zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme definici *ryze konkávní funkce*.

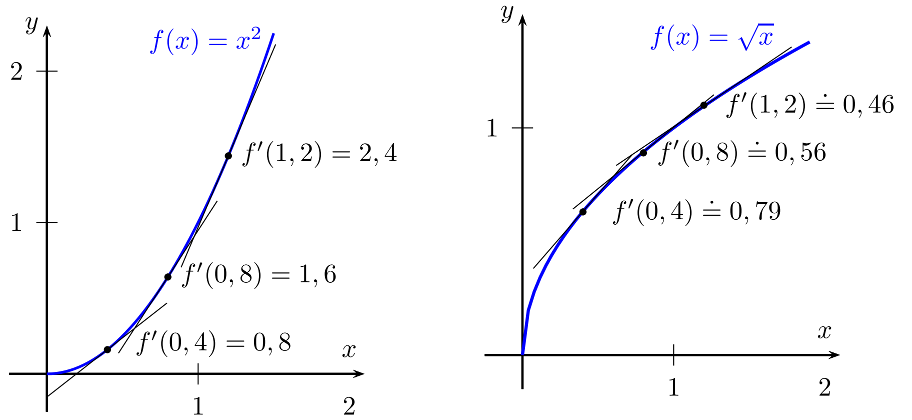
Poznamenejme, že existují i další možnosti, jak definovat konvexní a konkávní funkci. V této učebnici jsme použili definici, která je geometricky velmi názorná a je ve shodě i s ostatními možnými definicemi. Připomeňme např. souvislost s polohou tečny pod resp. nad grafem funkce, kterou jsme zmínili v Kapitole 5.3.4.

---

[1]) Pokud máte problém s porovnáním hodnot směrnic jednotlivých sečen, uvědomte si, že hodnota směrnice odpovídá sklonu sečny. Představte si, že jste cyklisté a jedete po jednotlivých sečnách ve směru osy x zleva doprava. Pojedete-li z kopce, má daná směrnice zápornou hodnotu. Jedete-li do kopce, je tato směrnice kladná. Čím prudší je kopec do kterého jedete, tím větší je hodnota směrnice. Při určování nerovností mezi směrnicemi jednotlivých sečen si tedy stačí představit dané sečny jako kopce do kterých jedete a srovnat je dle obtížnosti výjezdu.

Definice 8.4.5. Řekneme, že funkce f je *ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní v bodě* x_0, jestliže bod x_0 je vnitřním bodem intervalu, na kterém je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní.

V následující části si ukážeme souvislost mezi vypuklostí funkce a derivací této funkce. Z Obrázku 8.9(a) je patrné, že u konvexní funkce se s rostoucím x zvětšuje sklon



(a) Rostoucí hodnoty směrnic tečen u konvexní funkce

(b) Klesající hodnoty směrnic tečen u konkávní funkce

Obrázek 8.9: Vývoj hodnot směrnic tečen pro zvětšující se hodnoty proměnné x

grafu funkce, a s tím se tedy zvětšují i hodnoty směrnic příslušných tečen. Vzhledem k souvislosti směrnice tečny a derivace funkce v daném bodě je zřejmé, že s růstem x dochází i k růstu $f'(x)$, uvedená derivace tedy musí být rostoucí funkcí. Naopak z Obrázku 8.9(b) vidíme, že směrnice u konkávní funkce s rostoucí hodnotou x klesají. Derivace konkávní funkce tedy musí být klesající funkcí.

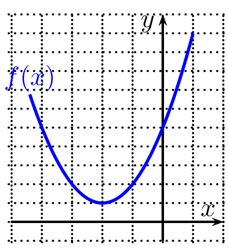
Z Kapitoly 8.4.1 víme, že funkce, která je rostoucí na intervalu I, má na tomto intervalu nezápornou derivaci (pokud tato derivace existuje). Funkce, která je klesající na intervalu I, má na tomto intervalu nekladnou derivaci. Z tohoto pozorování plyne následující věta, která nám umožní poznat, na jakých intervalech je funkce konvexní, resp. konkávní.

Věta 8.4.6. *Předpokládejme, že existuje druhá derivace f'' funkce f v bodě x_0. Je-li $f''(x_0) \geq 0$, je funkce f v bodě x_0 konvexní. Je-li $f''(x_0) \leq 0$, je funkce f v bodě x_0 konkávní. Nahradíme-li neostré nerovnosti ostrými, bude uvedená věta platit pro funkci ryze konvexní, resp. ryze konkávní v bodě x_0.*

Obecný postup pro nalezení intervalů vypuklosti spočívá v nalezení druhé derivace funkce a ve zjištění, na kterých intervalech je tato druhá derivace kladná a na kterých záporná.

8.23. Nalezneme intervaly vypuklosti funkce $f(x) = x^2 + 4x + 5$. **Příklad 8.23**

Řešení: Nejprve vypočteme druhou derivaci funkce.



$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 4x + 5\\
f'(x) &= 2x + 4\\
f''(x) &= 2
\end{aligned}
$$

Pro druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 + 4x + 5$ platí $f''(x) = 2$ ve všech bodech definičního oboru. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je tedy $f''(x) > 0$ a funkce $f(x) = x^2 + 4x + 5$ je konvexní na $\mathbb{R}$.

Příklad 8.24

8.24. Nalezneme intervaly vypuklosti funkce $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 15$.

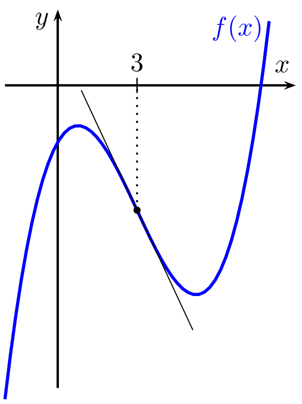
Řešení: Opět vyjdeme z druhé derivace zadané funkce.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 + 12x - 15 \\ f'(x) &= 3x^2 - 18x + 12 \\ f''(x) &= 6x - 18 \end{aligned}$$

Intervaly vypuklosti získáme řešením nerovnic $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$. Vyjdeme přitom z řešení rovnice $f''(x) = 0$, tedy

$$\begin{aligned} 6x - 18 &= 0 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Funkce $f''(x) = 6x - 18$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jediným bodem, ve kterém může dojít ke změně znaménka funkční hodnoty, je bod $x_0 = 3$. Definiční obor se nám tímto rozdělí na dva podintervaly $I_1 = (-\infty, 3)$ a $I_2 = (3, \infty)$, ve kterých bude znaménko hodnoty f'' neměnné. K určení znaménka hodnoty f'' stačí z každého intervalu vybrat po jednom bodu a určit příslušné znaménko funkční hodnoty. Z intervalu I_1 vyberme například bod $x_1 = 0$, z intervalu I_2 vězměme bod $x_2 = 10$.



$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x - 18 \\ f''(0) &= 6 \cdot 0 - 18 \\ &= -18 < 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f''(x) &= 6x - 18 \\ f''(10) &= 6 \cdot 10 - 18 \\ &= 42 > 0 \end{aligned}$$

V intervalu I_1 byla pro vybraný bod zjištěna záporná funkční hodnota; stejné znaménko budou mít všechny body z definičního oboru a funkce $f''(x) = 6x - 18$ je na intervalu I_1 záporná. Na intervalu $I_1 = (-\infty, 3)$ je funkce $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 15$ konkávní. V bodě $x_2 = 10$ nám vyšla hodnota druhé derivace kladná, na intervalu I_2 je tedy $f''(x)$ kladná, a funkce $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12x - 15$ je proto na intervalu $I_2 = (3, \infty)$ konvexní.

Všimněte si, že v právě uvedeném příkladu má tečna sestrojená ke grafu funkce v bodě $x_0 = 3$ tu vlastnost, že vlevo od bodu $x_0 = 3$ leží nad grafem funkce a napravo od bodu $x_0 = 3$ leží pod grafem funkce $f(x)$. Bod $x_0 = 3$ má skutečně tu vlastnost, že je jakousi hranicí mezi oblastí, ve které je funkce konvexní a oblastí, ve které je funkce konkávní. Takový bod nazýváme inflexní bod.

Definice 8.4.7. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *inflexní bod*, jestliže se v tomto bodě mění funkce z konvexní na konkávní, resp. z konkávní na konvexní.

Vzhledem k vlastnostem funkce uvedeným ve Větě 8.4.6 je zřejmé, že pokud má funkce v bodě x_0 inflexní bod a současně v tomto bodě existuje spojitá druhá derivace funkce f, potom je hodnota této derivace nutně rovna nule. Zdůvodnění je prosté. Inflexní bod odděluje oblasti s rozdílnou (opačnou) vypuklostí, a tedy i s rozdílným znaménkem druhé derivace. Vzhledem k předpokládané spojitosti druhé derivace pak musí být $f''(x_0) = 0$. Ne každý bod, ve kterém je druhá derivace rovna nule, je ovšem inflexním bodem. V některých případech se stane, že v bodě x_0 je $f''(x_0) = 0$, ale v jistém prstencovém okolí bodu x_0 platí pro všechny jeho prvky x nerovnost $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$. V takovém případě bod x_0 není inflexním bodem.

Příklad 8.25

8.25. Nalezněte intervaly vypuklosti a inflexní bod funkce $f(x) = 3x^5 - 10x^4$.

Řešení: Definičním oborem funkce je množina $\mathbb{R}$. Vypočteme druhou derivaci zadané funkce.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 - 10x^4, \\ f'(x) &= 15x^4 - 40x^3, \\ f''(x) &= 60x^3 - 120x^2, \\ &= 60x^2(x-2). \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že rovnice $f''(x) = 60x^2(x-2) = 0$ má dva nulové body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Definiční obor druhé derivace funkce $D(f'')$ se těmito body rozdělí na tři podintervaly $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, 2)$ a $I_3 = (2, \infty)$. Z každého tohoto intervalu vybereme nějaký bod a v tomto bodě zjistíme znaménko druhé derivace. Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 8.2, kde symbol $\cap$, resp. $\cup$ značí, že v daném intervalu je funkce konkávní, resp. konvexní. Je zřejmé, že v intervalu I_1 i I_2 je funkce $f(x)$ konkávní,

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
f''	$-$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Tabulka 8.2: Intervaly vypuklosti funkce $f(x) = 3x^5 - 10x^4$

v intervalu I_3 je funkce $f(x)$ konvexní.

Při výpočtu jsme nalezli dva body, ve kterých byla druhá derivace funkce rovna nule. Ověříme, který z nich je inflexním bodem. Bod $x_1 = 0$ leží mezi oblastmi, které jsou obě konkávní. V tomto bodě tedy nedochází ke změně vypuklosti, a bod $x_1 = 0$ proto není inflexním bodem funkce $f(x)$. Povšimněte si, že na jistém levostranném i pravostranném okolí tohoto bodu jsou hodnoty druhé derivace obě záporné a nedochází tedy ke změně znaménka a tedy i vypuklosti. Bod $x_2 = 2$ odděluje zleva oblast, na které je funkce konkávní od oblasti vpravo, která je konvexní. V tomto bodě tedy dochází k změně vypuklosti a bod $x_2 = 2$ je (jediným) inflexním bodem funkce $f(x)$.

8.26. Nalezněte intervaly vypuklosti funkce $f(x) = 5 - \dfrac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}$. **Příklad 8.26**

Řešení: Nejprve určíme definiční obor zadané funkce. Protože předpis funkce obsahuje druhou odmocninu, je nutné, aby její argument byl nezáporný. Do definičního oboru můžeme zahrnout pouze ta x, která vyhovují nerovnici

$$1 - x^2 \geq 0,$$

tedy $x \in \langle -1, 1\rangle$. Nyní vypočteme druhou derivaci funkce.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5 - \frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} = 5 - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} \\
f'(x) &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{1/2}\cdot(-2x) = x\sqrt{1-x^2} \\
f''(x) &= \sqrt{1-x^2} + x\,\frac{1}{2}\,\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Funkce f'' má dva nulové body $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Definiční obor funkce f'',

x	$(-1, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, 1)$
f''	$-$	$+$	$-$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$

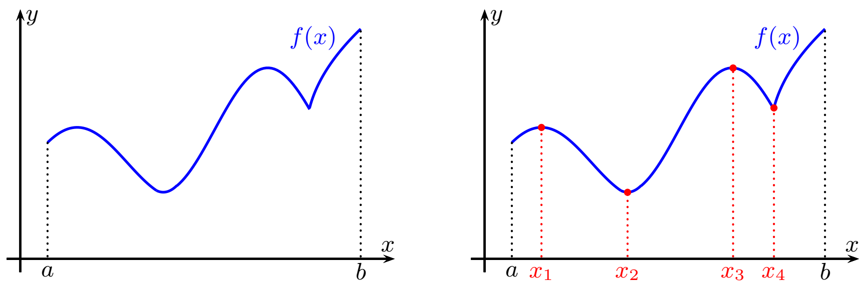
Tabulka 8.3: Intervaly konvexity funkce $f(x) = 5 - \dfrac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}$

tj. množinu $(-1, 1)$, rozdělíme těmito body na tyto tři intervaly $I_1 = (-1, -1/\sqrt{2})$, $I_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ a $I_3 = (1/\sqrt{2}, 1)$. Dosazením konkrétních hodnot z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkční hodnoty v těchto intervalech. Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 8.3. Funkce f je konkávní na intervalu $(-1, -1/\sqrt{2}\rangle$, konvexní na intervalu $\langle -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$ a konkávní na intervalu $\langle 1/\sqrt{2}, 1)$. Funkce má dva inflexní body $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8.4.3 Lokální a globální extrémy funkce

V Příkladu 5.80 na straně 272 jsme nalezli cenu, za kterou by mělo nakladetelství prodávat danou knihu, aby dosáhlo na nejvyšší možné tržby z jejího prodeje. Využili jsme přitom, že obrat nakladatelství byl popsán kvadratickou funkcí. Maximální hodnota této funkce odpovídala vrcholu paraboly, která je grafem této kvadratické funkce, přičemž souřadnice takového vrcholu umíme vypočítat.

V této kapitole se naučíme hledat extrémní (maximální či minimální) hodnoty i pro ostatní „rozumné“ funkce. Tato znalost představuje jednu z nejvýznamnějších aplikací diferenciálního počtu.



(a) Graf funkce $f(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a,\, b\rangle$

(b) Graf stejné funkce s vyznačením dolíků a vrcholů

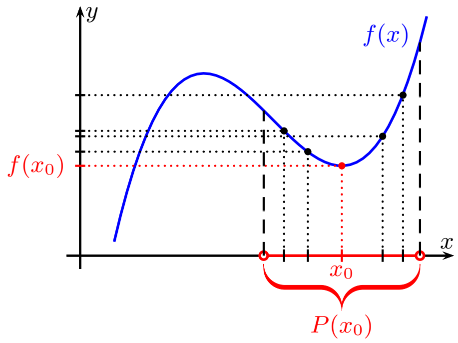
Obrázek 8.10: Grafické zobrazení vývoje ceny akcií jisté firmy

Obrázek 8.10(a) zobrazuje graf funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a,\, b\rangle$. Čtenáři jistě dokáží určit úseky grafu, ve kterých je funkce $f(x)$ rostoucí, resp. klesající. Nás budou v následujících řádcích zajímat takové body x, ve kterých dochází ke změně monotonie, tj. body, ve kterých se funkce mění z rostoucí na klesající funkci, resp. z klesající funkce na rostoucí. K čemu mohou být takové body vhodné ukáže následující ilustrační příklad.

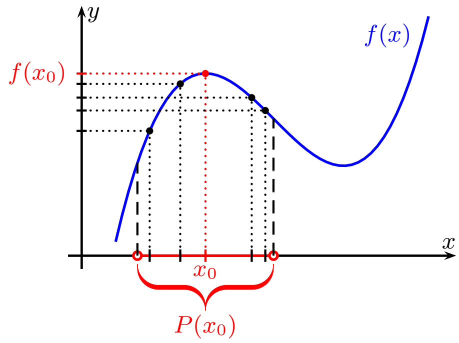
Předpokládejme, že vývoj cen akcií jisté firmy lze v období jednoho měsíce graficky znázornit pomocí grafu na Obrázku 8.10(a). Přestože lze získat jistý zisk nákupem akcií v čase a a jejich prodejem v čase b, lepším (ziskovějším) způsobem je nákup akcií vždy, když je cena akcie v „dolíku“, tedy v okamžiku, kdy její cena přestala klesat a začala růst, a následný prodej akcií vždy, když cena akcie dosáhne vrcholu, tedy v okamžiku, kdy cena akcie přestala růst a začala klesat[2]). Na Obrázku 8.10(b) je zmíněný graf nakreslen ještě jednou s vyznačením „dolíků“ (v bodech x_2 a x_4) a „vrcholů“ (v bodech x_1 a x_3). Nadále budeme těmto bodům říkat *lokální minima* a *lokální maxima*, resp. společně je budeme označovat jako *lokální extrémy funkce*.

Slovo *lokální* zdůrazňuje, že se jedná o extrémní hodnotu v jistém okolí (označme ho symbolem $P(x_0)$) daného bodu x_0. Bod, ve kterém funkce nabývá své lokální maximum, tedy nemusí být nutně bodem s největší funkční hodnotou na celém definičním oboru a lokální minimum nemusí být nutně bodem, ve kterém funkce nabývá svou nejmenší hodnotu v rámci definičního oboru, viz Obrázek 8.11. Povšimněte si, že na zobrazené množině nalezneme body x, ve kterých má funkce větší funkční hodnotu, než je lokální maximum, resp. menší, než je lokální minimum. Nicméně, je možné najít jisté okolí $P(x_0)$ bodu x_0, ve kterém je tato hodnota extrémní, tj. nejvyšší, resp. nejnižší. Tímto způsobem jsou lokální extrémy i definovány, viz následující definice.

[2]) V tomto okamžiku pomineme fakt, že je nesnadné předem určit, kdy cena dané akcie dosáhne „dolíku“ a „vrcholu“ jako signálu k nákupu či prodeji akcií.



(a) Funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 lokální minimum. Je možné sestrojit okolí $P(x_0)$, ve kterém funkce $f(x)$ nabývá nejmenší hodnotu právě v bodě x_0.



(b) Funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 lokální maximum. Je možné najít okolí $P(x_0)$, ve kterém funkce $f(x)$ nabývá největší hodnotu právě v bodě x_0.

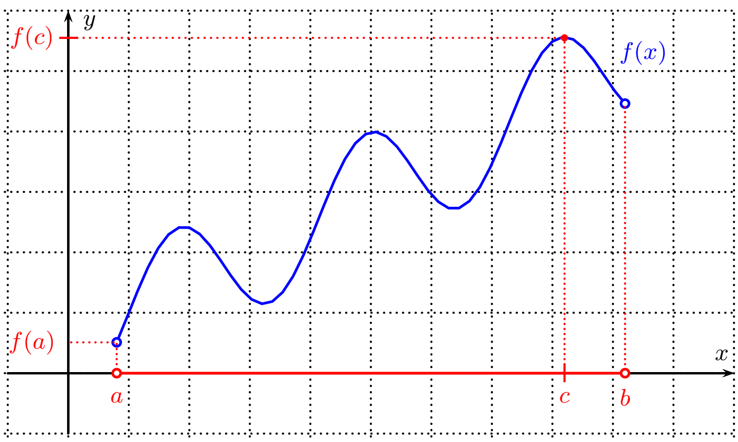
Obrázek 8.11: Lokální extrémy funkce f v bodě x_0

Definice 8.4.8. Řekneme, že funkce f má *lokální minimum*, resp. *lokální maximum* v bodě x_0, jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je splněna nerovnost

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{resp.} \quad f(x_0) \geq f(x). \tag{8.7}$$

Nahradíme-li v nerovnostech (8.7) neostré nerovnosti za ostré, dostaneme definici *ostrého lokálního minima*, resp. *ostrého lokálního maxima*.

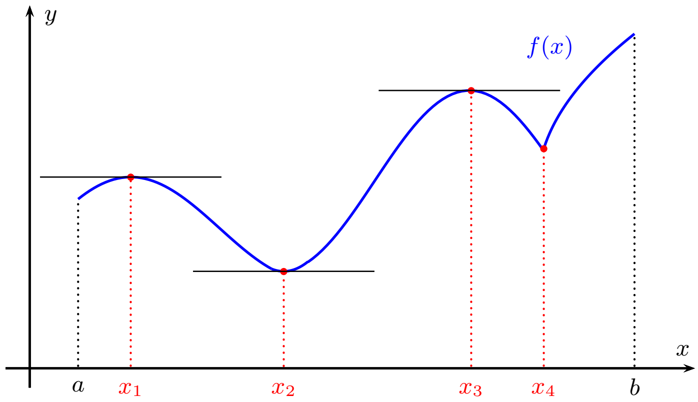
Definice 8.4.8 umožňuje, aby funkce nabývala lokální maxima, resp. lokální minima v několika různých bodech a funkční hodnota v těchto bodech se lišila. Podívejte se na na Obrázek 8.12 a ověřte, že funkce $f(x)$ má na zobrazeném intervalu tři lokální maxima a dvě lokální minima a funkční hodnoty se ve všech těchto bodech liší.



Obrázek 8.12: Extrémy funkce $f(x)$ na otevřeném intervalu $(a,\, b)$.

Připomeňme, že v Kapitole 5.3.4 na straně 231 jsme zavedli pojem globálních extrémů. Zamysleme se nad počtem globálních extrémů, které nabývá na intervalu $(a,\, b)$ funkce $f(x)$ uvedená na Obrázku 8.12. Z obrázku se zdá, že nejmenší funkční hodnotu nabývá funkce $f(x)$ v bodě a. Ovšem tento bod není prvkem otevřeného intervalu $(a,\, b)$, a proto nelze funkční hodnotu v tomto bodě uvažovat. Pro všechny ostatní body otevřeného intervalu $(a,\, b)$ platí, že jejich funkční hodnota není nejnižší, proto funkce $f(x)$ nemá globální minimum v otevřeném intervalu $(a,\, b)$. Pokud bychom hledali globální minimum na uzavřeném intervalu $\langle a,\, b\rangle$, bod a by patřil do vyšetřované množiny a funkce $f(x)$ by měla v uvažovaném intervalu globální minimum v bodě a. Globální minimum funkce by bylo v tomto případě v jednom z krajních bodů vyšetřované množiny. Nejvyšší funkční hodnotu nabývá funkce $f(x)$ v bodě c. V tomto bodě tedy funkce nabývá jedno ze svých lokálních maxim a současně globální maximum (a to bez ohledu na to, zda vyšetřujeme extrémy funkce na otevřeném či uzavřeném intervalu).

V případě, že známe graf funkce, je relativně snadné nalézt extrémy funkce. Jak ovšem nalézt tyto extrémy, když graf funkce nemáme k dispozici? Ukážeme si obecnou metodu, která nám umožní nalézt extrémy funkce (lokální i globální) bez znalosti jejího grafu. Nejprve se zaměříme na lokální extrémy. Vyjdeme přitom z funkce uvedené na Obrázku 8.13.



Obrázek 8.13: Tečny ke grafu funkce v lokálních extrémech

Všimněte si, že tečny sestrojené ke grafu funkce v bodech x_1, x_2, x_3 jsou rovnoběžné s osou x, jejich směrnice je tedy rovna nule. Ze vztahu směrnice tečny v daném bodě a derivace funkce v tomto bodě plyne, že derivace funkce v tomto bodě také musí být rovna nule. V bodě x_4 má graf funkce „hrot“, ve kterém nelze sestrojit tečnu ke grafu. Funkce $f(x)$ v tomto bodě nemá derivaci. Přitom víme, že v uvedených bodech $x_1, \dots, x_4$ funkce nabývá lokální extrémy. Platí tedy následující věta.

Věta 8.4.9. *Funkce $f(x)$ může mít lokální extrém jen v takovém bodě x_0, v němž je derivace funkce rovna nule, tj. $f'(x_0) = 0$, nebo v němž derivace funkce neexistuje.*

Při hledání lokálních extrémů většinou postupujeme tak, že nalezneme derivaci funkce a zjistíme, ve kterých bodech je tato derivace rovna nule, tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$. Body, které jsou řešením uvedené rovnice, je zvykem nazývat *body podezřelé z extrému*. Kromě toho je nutné zjistit, ve kterých bodech je původní funkce $f(x)$ definována, ale derivace funkce již v těchto bodech neexistuje. I takové body jsou potom podezřelé z extrému.

Příklad 8.27

8.27. Pro funkci $f(x) = \left(x^2 + 9\right) \cdot (x - 6)$ nalezněte všechny body podezřelé z extrému.

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Derivací funkce f dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot (x - 6) + (x^2 + 9) \cdot 1 \\ &= 3x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

Derivace funkce je opět definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, proto nenastane případ, že by derivace funkce nebyla v některých bodech definována.

Nalezneme všechna řešení rovnice $f'(x) = 0$. Dosazením vypočtené derivace dostaneme kvadratickou rovnici $3x^2 - 12x + 9 = 0$, jejímž řešením jsou kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$, viz Kapitola 5.6.4 na straně 267. Funkce $f(x) = \left(x^2 + 9\right) \cdot (x - 6)$ má dva body podezřelé z extrému a to $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.

8.28. Pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ nalezněte všechny body podezřelé z extrému.

Příklad 8.28

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Derivací funkce f dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{(x-1)^2} \\ &= (x-1)^{2/3} \\ f'(x) &= \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}. \end{aligned}$$

Vypočtená derivace funkce není definována v bodě $x_1 = 1$. Funkce $f(x)$ je přitom v bodě $x_1 = 1$ definována a platí $f(1) = 0$. Bod $x_1 = 1$ je bodem podezřelým z extrému.

Řešení rovnice $f'(x) = 0$ je snadné. Vidíme, že předpis derivace funkce má tvar zlomku. Zlomek může mít nulovou hodnotu pouze pro taková x, pro která je čitatel zlomku roven nule. Vypočtený zlomek má však pro libovolné x hodnotu rovnu dvěma, proto rovnice $f'(x) = 0$ nemá v tomto případě žádné řešení. Jediným bodem podezřelým z extrému je proto bod $x_1 = 1$.

8.29. Pro funkci $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x}$ nalezněte všechny body podezřelé z extrému.

Příklad 8.29

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, jinými slovy, není definována pro $x = 0$. Vypočteme derivaci funkce f.

$$\begin{aligned} f(x) &= x\,\mathrm{e}^{1/x} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{1/x} + x\,\mathrm{e}^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Vypočtená derivace funkce není definována v bodě $x = 0$. Ovšem funkce $f(x)$ také není definována v bodě $x = 0$, a proto nemá smysl v tomto bodě vyšetřovat lokální extrémy funkce (tím, že v tomto bodě není funkce definována, není možné určit její funkční hodnotu, a tuto tedy nelze porovnávat s ostatními funkčními hodnotami). Bod $x = 0$ proto není bodem podezřelým z extrému.

Řešení rovnice $f'(x) = 0$ je snadné. Vidíme, že předpis derivace funkce má tvar součinu výrazů $\mathrm{e}^{1/x}$ a $(1 - 1/x)$. Výraz $\mathrm{e}^{1/x}$ je kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, proto nemůže být roven nule pro žádné $x \in \mathbb{R}$. Výraz $\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ je roven nule pouze pro $x_1 = 1$. Jediným bodem podezřelým z extrému je proto bod $x_1 = 1$.

Uvedené tři příklady měly ukázat možnosti, se kterými se můžeme setkat při stanovování bodů podezřelých z extrému. V některých případech se můžeme setkat s funkcemi, které nemají žádný takový bod. Příkladem může být např. funkce $f(x) = x^3 + x$. Její derivace existuje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $f'(x) = 3x^2 + 1$. Tento výraz má kladnou hodnotu pro všechna $x \in \mathbb{R}$, proto ani derivace funkce není rovna nule pro žádné x. Uvedená funkce nemá bod podezřelý z extrému.

Zbývá nám vyřešit otázku, jak z nalezených podezřelých bodů rozlišit ty, ve kterých funkce nabývá své lokální minimum, a ty, ve kterých funkce nabývá své lokální maximum. K tomu nám dobře pomůže pojem vypuklosti funkce. Na Obrázku 8.13 vidíme, že v bodech, ve kterých má funkce tečnu, je funkce ve svých lokálních minimech konvexní a ve svých lokálních maximech konkávní. Již víme, jaký je vztah mezi vypuklostí funkce a její druhou derivací. Můžeme tedy vyslovit následující větu.

Věta 8.4.10. *Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci a platí $f'(x_0) = 0$. Je-li druhá derivace funkce f v bodě x_0 kladná, tj. je-li $f''(x_0) > 0$, potom má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum. Je-li druhá derivace funkce f v bodě x_0 záporná, tj. je-li $f''(x_0) < 0$, potom má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum.*

V následujících příkladech si ukážeme, jak lze s pomocí Věty 8.4.10 hledat lokální extrémy funkce.

Příklad 8.30

8.30. Vypočtěte lokální extrémy funkce $f(x) = 20 + 8x^2 - x^4$.

Řešení: Funkce je definována na množině $\mathbb{R}$. Nejprve určíme všechny body, ve kterých je derivace funkce rovna nule nebo ve kterých derivace neexistuje.

$$\begin{aligned} f(x) &= 20 + 8x^2 - x^4 \\ f'(x) &= 16x - 4x^3 = 4x\left(4 - x^2\right) \end{aligned}$$

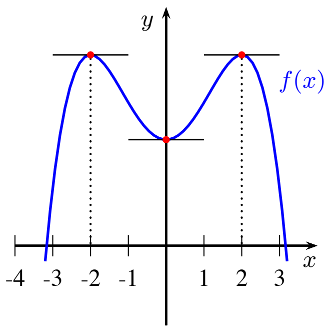
Z předpisu derivace funkce snadno vidíme, že i derivace je definována na množině $\mathbb{R}$, nenastane tedy případ, že by derivace funkce nebyla pro nějaké x definována. Nyní určíme všechny body x, ve kterých je derivace funkce rovna nule.

$$\begin{aligned} 4x\left(4 - x^2\right) &= 0 & & \\ 4x &= 0 & & \ldots \text{tedy } x_1 = 0 \\ 4 - x^2 &= 0 & & \ldots \text{tedy } x^2 = 4, \text{proto } x_2 = -2, x_3 = 2 \end{aligned}$$

Rovnice $f'(x) = 0$ má tři různé kořeny $x_1 = 0, x_2 = -2$ a $x_3 = 2$. Pomocí druhé derivace určíme, o jaké typy extrémů se v jednotlivých případech jedná. Druhou derivaci získáme derivací funkce $f'(x)$. Je

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(16x - 4x^3\right)', \\ &= 16 - 12x^2. \end{aligned}$$

Podle znaménka funkční hodnoty druhé derivace v bodech x_1, x_2, resp. x_3 zjistíme typ extrému v uvedených bodech.



$$\begin{aligned} f''(-2) &= 16 - 12 \cdot (-2)^2 & f''(0) &= 16 - 12 \cdot 0^2 & f''(2) &= 16 - 12 \cdot 2^2 \\ &= 16 - 48 & &= 16 - 0 & &= 16 - 48 \\ f''(-2) &< 0 & f''(0) &> 0 & f''(2) &< 0 \end{aligned}$$

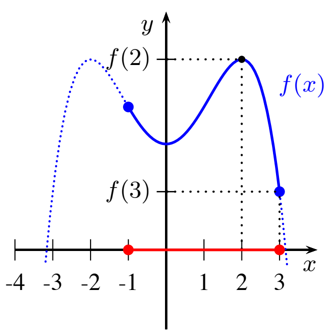
Zjistili jsme, že v bodě $x_1 = 0$ je první derivace rovna nule a druhá derivace je v tomto bodě kladná. Z Věty 8.4.10 vyplývá, že v bodě $x_1 = 0$ funkce $f(x)$ nabývá své lokální minimum. V bodech $x_2 = -2$ a $x_3 = 2$ je první derivace rovna nule a druhá derivace je v uvedených bodech záporná. Podle Věty 8.4.10 pak funkce $f(x)$ v těchto bodech nabývá své lokální maximum.

Příklad 8.31

8.31. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = 20+8x^2-x^4$ na uzavřeném intervalu $I = \langle -1, 3\rangle$.

Řešení: Tato úloha rozšiřuje zadání Příkladu 8.30. Využijeme poznatky, které jsme již získali při řešení předchozí úlohy. Víme, že v intervalu $I = \langle -1, 3\rangle$ nabývá funkce $f(x)$ lokální minimum v bodě $x_1 = 0$ a lokální maximum v bodě $x_3 = 2$. Jiné lokální extrémy funkce $f(x)$ v uvedeném intervalu nemá. Tyto dva body rozdělily interval I na tři podintervaly $I_1 = \langle -1, 0\rangle$, $I_1 = \langle 0, 2\rangle$ a $I_3 = \langle 2, 3\rangle$. Na každém z nich je funkce $f(x)$ monotónní. Extrémní hodnoty pro bude funkce nabývat v krajních bodech uvedených podintervalů. Vypočteme funkční hodnoty v těchto krajních bodech a jejich porovnáním zjistíme nejnižší a nejvyšší funkční hodnotu na celém intervalu I.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 20 + 8 \cdot (-1)^2 - (-1)^4 & f(0) &= 20 + 8 \cdot 0^2 - 0^4 \\ &= 20 + 8 - 1 & &= 20 + 0 - 0 \\ &= 27 & &= 20 \end{aligned}$$



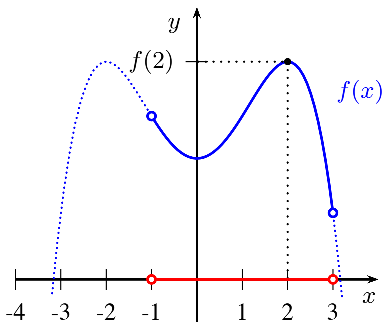
$$\begin{aligned} f(2) &= 20 + 8 \cdot 2^2 - 2^4 & f(3) &= 20 + 8 \cdot 3^2 - 3^4 \\ &= 20 + 32 - 16 & &= 20 + 72 - 81 \\ &= 36 & &= 11 \end{aligned}$$

Nejvyšší hodnotu nabývá funkce v bodě $x_3 = 2$, nejnižší funkční hodnota nastává v krajním bodě intervalu $x_4 = 3$. Toto jsou také globální extrémy funkce $f(x)$ na intervalu $I = \langle -1, 3\rangle$.

Povšimněte si, že výsledek příkladu 8.31 je v souladu s Weierstrassovou větou 6.1.12 ze strany 323, která tvrdí, že spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu svou nejmenší i největší funkční hodnotu. V následujícím příkladu si ukážeme, že pro otevřené intervaly analogická věta nemusí platit.

8.32. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = 20+8x^2-x^4$ na otevřeném intervalu $I = (-1, 3)$. **Příklad 8.32**

Řešení: V této úloze navážeme na výsledky Příkladu 8.31. Jediný rozdíl oproti zmíněné úloze nastal ve vynechání obou krajních bodů intervalu I, tzn. že v této úloze bod $x = 3$ není prvkem intervalu I. Víme, že v tomto bodě měla funkce $f(x)$ své globální minimum. Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ je v intervalu $(2, 3)$ klesající, existuje ke každému $x \in (2, 3)$ reálné číslo c, kde $x < c < 3$, jehož funkční hodnota $f(c)$ je menší než hodnota $f(x)$. Žádný bod z intervalu $(2, 3)$ proto nemůžeme prohlásit za bod s nejmenší funkční hodnotou, a funkce $f(x)$ proto v otevřeném intervalu $(-1, 3)$ nemá globální minimum. Globálním maximem zůstal v souladu s výsledkem Příkladu 8.31 bod $x_3 = 2$, neboť tento je vnitřním bodem množiny $(2, 3)$.



Obrázek 8.14: Graf funkce $f(x) = 20+8x^2-x^4$ a její globální extrémy na otevřeném intervalu $I = (-1, 3)$

V předchozích úlohách jsme pracovali s funkcí, jejíž derivace byla definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V následující úloze si ukážeme, jak lze zjistit, zda má funkce lokální extrém v bodě, ve kterém není derivace funkce definována.

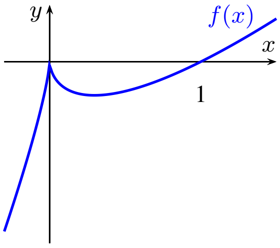
8.33. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$. **Příklad 8.33**

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a je ve všech těchto bodech spojitá (později uvidíme, že se jedná o důležitou informaci). Derivace funkce $f(x)$ má předpis $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Nalezneme nulový bod funkce $f'(x)$, tj. vypočteme řešení rovnice $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \\ 1 &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \\ \sqrt[3]{x} &= \frac{2}{3} \\ x &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Rovnice má jediné řešení $x = \dfrac{8}{27}$. Vypočteme hodnotu druhé derivace v tomto bodě.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} \\ f''\left(\frac{8}{27}\right) &= \frac{2}{9\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{9}{8} > 0 \end{aligned}$$

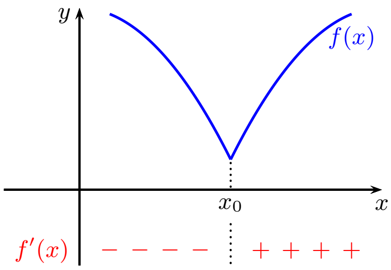


Podle Věty 8.4.10 má funkce f v bodě $x = \dfrac{8}{27}$ lokální minimum.

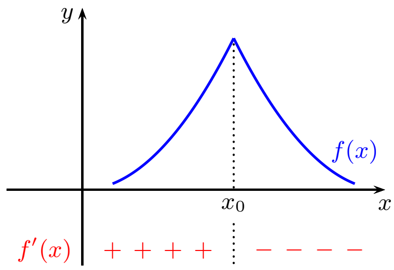
Z předpisu funkce $f'(x)$ lze nahlédnout, že tato funkce není definována v bodě $x = 0$. Již jsme přitom zmínili, že funkce f je v tomto bodě definovaná a spojitá. Zjistíme, zda v bodě $x = 0$ nastává lokální extrém funkce f. Snadno ověříme, že pro všechna $x < 0$ je $f'(x) > 0$. Proto je funkce f rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$. Pro všechna $x \in \left(0, \dfrac{8}{27}\right)$ je $f'(x) < 0$, proto je funkce f na tomto intervalu klesající. Protože funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$, tak jsme oprávněni provést následující úvahu. Až do bodu $x = 0$ se funkční hodnoty funkce f s rostoucí hodnotou proměnné x zvětšují, v bodě $x = 0$ se růst zastaví a od bodu $x = 0$ se funkční hodnoty snižují. Proto má funkce f v bodě $x = 0$ lokální maximum. Uvědomte si, jak se graficky odlišují lokální extrémy v bodech, ve kterých existuje, resp. neexistuje derivace funkce.

Příklad 8.33 ukazuje, jak lze rozhodnout o případném lokálním extrému v bodě x_0, jestliže v tomto bodě neexistuje derivace funkce.

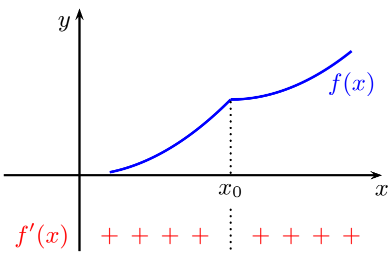
- Pokud v bodě x_0 není definována ani samotná funkce $f(x)$, potom nelze určit v bodě x_0 funkční hodnotu a nelze ji ani porovnávat s ostatními funkčními hodnotami. Funkce $f(x)$ v takovém případě nemůže mít v bodě x_0 jakýkoliv extrém.
- Je-li v bodě x_0 funkce $f(x)$ definována, potom lze případný typ extrému vyčíst z monotonie funkce v okolí bodu x_0. Tuto monotonii vyčteme ze znaménka první derivace funkce. Předpokládejme tedy, že existuje první derivace funkce $f(x)$ v jistém levostranném a pravostranném okolí bodu x_0.



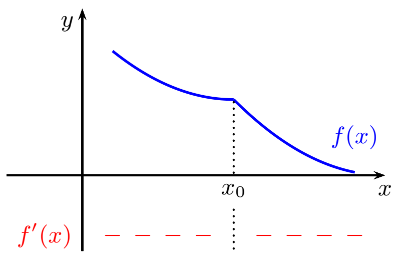
(a) Je-li v levostranném okolí bodu x_0 derivace funkce záporná a v pravostranném okolí kladná, potom v levostranném okolí je funkce klesající a v pravostranném rostoucí. Je-li funkce spojitá v bodě x_0, potom má v tomto bodě lokální minimum.



(b) Je-li v levostranném okolí bodu x_0 derivace funkce kladná a v pravostranném okolí záporná, potom v levostranném okolí je funkce rostoucí a v pravostranném klesající. Je-li funkce spojitá v bodě x_0, potom má v tomto bodě lokální maximum.



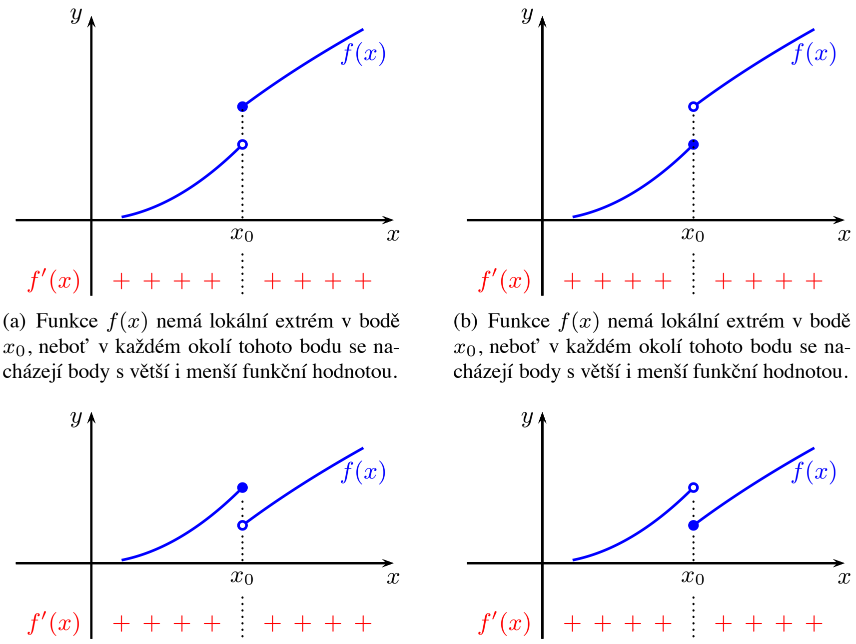
(c) Je-li v levostranném okolí bodu x_0 derivace funkce kladná a v pravostranném okolí je také kladná, potom v levostranném i pravostranném okolí je funkce rostoucí. Je-li funkce spojitá v bodě x_0, potom funkce je rostoucí na celé uvažované množině a nemá v bodě x_0 extrém.



(d) Je-li v levostranném i pravostranném okolí bodu x_0 derivace funkce záporná, potom je funkce klesající v levostranném i pravostranném okolí bodu x_0. Je-li funkce spojitá v bodě x_0, potom je funkce $f(x)$ klesající na oboustranném okolí a v bodě x_0 nemá funkce $f(x)$ extrém.

Obrázek 8.15: Vyšetřování druhu lokálních extrémů podle znaménka první derivace

V právě popsaných případech jsme předpokládali, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 definovaná a spojitá. V některých případech však funkce $f(x)$ sice v bodě x_0 definována je, ale není v něm spojitá. Naznačme, jak lze v takovém případě určit typ případného lokálního extrému. Na pomoc si vezmeme ilustrační grafy. V každém grafu je popsáno, jakým způsobem jsme došli k uvedenému výsledku. Nejsou samozřejmě uvedeny všechny možné případy. Předpokládáme však, že po promyšlení uvedených ukázek si čtenáři v ostatních zde neuvedených případech již dokáží odpovědět na otázku, o jaký typ lokálního extrému se jedná.



(a) Funkce $f(x)$ nemá lokální extrém v bodě x_0, neboť v každém okolí tohoto bodu se nacházejí body s větší i menší funkční hodnotou.

(b) Funkce $f(x)$ nemá lokální extrém v bodě x_0, neboť v každém okolí tohoto bodu se nacházejí body s větší i menší funkční hodnotou.

(c) Funkce $f(x)$ má *lokální maximum* v bodě x_0, neboť lze nalézt takové okolí bodu x_0, že pro všechna x z tohoto okolí je splněna nerovnost $f(x_0) > f(x)$.

(d) Funkce $f(x)$ má *lokální minimum* v bodě x_0, neboť lze nalézt takové okolí bodu x_0, že pro všechna x z tohoto okolí je splněna nerovnost $f(x_0) < f(x)$.

Obrázek 8.16: Vyšetřování druhu lokálních extrémů podle znaménka první derivace a se zřetelem k nespojitosti funkce v bodě x_0

Z uvedených případů je zřejmé, že k určení typu extrému nestačí pouze sledovat znaménko první derivace funkce. Všimněte si, že na Obrázcích 8.16(c) a 8.16(d) jsou hodnoty první derivace v okolí bodu x_0 kladné, přesto funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 v jednom případě lokální maximum a ve druhém případě lokální minimum. V následujícím příkladu si ukážeme další možnosti určení typu lokálního extrému.

Příklad 8.34

8.34. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^4\,(x-2)^3$.

Řešení: Uvedená funkce je polynomem sedmého řádu. Snadno odvodíme, že zadaná funkce má derivace všech řádů ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$. Lokální extrémy tedy mohou existovat pouze v bodech, ve kterých je první derivace rovna nule.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[x^4 \cdot (x-2)^3\right]' \\
&= \left[x^4\right]' \cdot (x-2)^3 + x^4 \cdot \left[(x-2)^3\right]' && \ldots \textit{ derivace součinu dvou funkcí} \\
&= 4x^3 \cdot (x-2)^3 + x^4 \cdot 3(x-2)^2 && \ldots \textit{ provedení derivace} \\
&= x^3(x-2)^2\left[4(x-2)+3x\right] && \ldots \textit{ vytknutí výrazu } x^3(x-2)^2 \\
&= x^3(x-2)^2(7x-8) && \ldots \textit{ zjednodušení výrazu}
\end{aligned}
$$

Z předpisu $f'(x)$ snadno nalezneme nulové body derivace funkce f.

$$\begin{aligned}
x^3(x-2)^2(7x-8) &= 0 && \dots \textit{ rovnice } f'(x)=0\\
x^3 &= 0 && \dots \textit{ tedy } x_1 = 0\\
(x-2)^2 &= 0 && \dots \textit{ tedy } x_2 = 2\\
(7x-8) &= 0 && \dots \textit{ tedy } x_3 = \tfrac{8}{7}
\end{aligned}$$

Vypočteme hodnotu druhé derivace funkce f v těchto bodech.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[x^3(x-2)^2(7x-8)\right]'\\
&= 3x^2(x-2)^2(7x-8) + x^3\cdot 2(x-2)(7x-8) + x^3(x-2)^2\cdot 7\\
&= x^2(x-2)\left[3(x-2)(7x-8) + 2x(7x-8) + 7x(x-2)\right]\\
&= 6x^2(x-2)(7x^2-16x+8)\\
f''(0) &= 0\\
f''(2) &= 0
\end{aligned}$$

$$f''\left(\frac{8}{7}\right) = 6\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{7}-2\right)\cdot\left[7\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^2 - 16\cdot\frac{8}{7}+8\right] = \frac{2304}{343} > 0$$

Podle Věty 8.4.10 nabývá funkce $f(x)$ v bodě x_3 lokální minimum. O lokálním extrému v bodech x_1 a x_2 však nemůžeme podle Věty 8.4.10 rozhodnout. Druhá derivace v těchto bodech je rovna nule a o tomto případě se uvedená věta nezmiňuje. Využijeme tedy znaménka první derivace. Připomeňme, že v uvedených bodech existuje derivace funkce a funkce je tedy podle Věty 7.2.2 v těchto bodech spojitá. Nulové body první derivace jsou $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{8}{7}$, reálnou osu tedy rozdělíme na čtyři podintervaly, ve kterých se nemění znaménko derivace a toto znaménko dosazením vhodného bodu zvnitřku podintervalu určíme. Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 8.4. Z této tabulky vy-

x	$(-\infty,0)$	$(0,8/7)$	$(8/7,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

Tabulka 8.4: Znaménka první derivace funkce $f(x) = x^4(x-2)^3$

čteme, že funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu $(-\infty,0)$ a klesající na intervalu $(0,8/7)$. Vzhledem k spojitosti funkce tedy musí být v bodě $x_1 = 0$ lokální maximum funkce. Naproti tomu na intervalech $(8/7,\,2)$ a $(2,\,\infty)$ je funkce rostoucí, v bodě $x_2 = 2$ tedy funkce $f(x)$ nemůže nabývat lokální extrém. Všimněte si, že Tabulka 8.4 potvrzuje již známý fakt, že v bodě $x_3 = 8/7$ funkce $f(x)$ nabývá své lokální minimum.

V Příkladu 8.34 jsme použili znaménka první derivace na okolí nulových bodů první derivace. Lze ovšem postupovat ještě jiným způsobem využívajícím derivace vyšších řádů. O tom hovoří následující věta, která je jistým zobecněním Věty 8.4.10.

Věta 8.4.11. *Předpokládejme, že je $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 1,2,\dots,(n-1)$ a současně $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom*

a) *je-li n liché, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod,*

b) *je-li n sudé, potom funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 své*

   (i) *lokální minimum, jestliže je $f^{(n)}(x_0) > 0$,*

   (ii) *lokální maximum, jestliže je $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Právě vyslovenou větu můžeme využít v situaci, kdy nalezneme body, ve kterých je první derivace rovna nule (označme je symbolem x_i), ale druhá derivace je v těchto bodech také rovna nule. V takovém případě můžeme postupovat tak, že vypočteme třetí derivaci funkce a zjistíme, zda je tato třetí derivace v bodech x_i různá od nuly, či je v těchto bodech rovna nule. Pokud by byla různá od nuly, potom je $f'(x_i) = 0$, $f''(x_i) = 0$, ale $f'''(x_i) \neq 0$, je tedy $f^{(k)}(x_i) = 0$ pro $k = 1$ a $k = 2$, ale $f^{(n)}(x_i) \neq 0$ pro $n = 3$. První derivace různá od nuly nastane v bodě x_i pro $n = 3$, tedy pro liché n a funkce $f(x)$ má v bodě x_i inflexní bod.

Pokud by v bodě x_i byla i třetí derivace rovna nule, potom vypočteme čtvrtou derivaci a spočítáme její hodnotu v bodě x_i. Bude-li tato hodnota různá od nuly, potom jsou nulové derivace $f^{(k)}(x_i)$ pro $k \in \{1, 2, 3\}$ a $f^{(n)}(x_i) \neq 0$ pro $n = 4$. První nenulová derivace je potom sudého řádu a funkce nabývá v bodě x_i lokální maximum, jestliže je $f^{(4)}(x_i) < 0$, resp. lokální minimum, jestliže je $f^{(4)}(x_i) > 0$. Je-li i čtvrtá derivace funkce f v bodě x_i rovna nule, potom nalezneme pátou derivaci funkce a postupujeme analogicky podle předchozích dvou odstavců.

8.35. S pomocí Věty 8.4.11 rozhodněme o lokálních extrémech funkce $f(x) = x^4\,(x-2)^3$. **Příklad 8.35**

Řešení: Připomeňme, že úlohu jsme již vyřešili v Příkladu 8.34. Nyní pouze ověříme zjištěné výsledky pomocí Věty 8.4.11. Víme, že první derivace je rovna nule v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ a $x_3 = 8/7$. Dále víme, že druhá derivace v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ je rovna nule a v bodě $x_3 = 8/7$ je $f''(8/7) > 0$. V bodě x_3 je tedy první[3]) derivací s nenulovou funkční hodnotou derivace druhého (tedy sudého) řádu. Funkce $f(x)$ tedy má v tomto bodě lokální extrém. Vzhledem ke kladné hodnotě této derivace se pak jedná o lokální minimum funkce f.

K určení typu případného extrému ve zbývajících bodech musíme vypočítat derivace vyšších řádů. K urychlení postupu již nebudeme vypisovat všechny mezikroky výpočtu. Čtenář jistě zvládne danou funkci zderivovat a zjednodušit samostatně.

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \left[6x^2(x-2)(7x^2-16x+8)\right]' \\
&= 12x(x-2)(7x^2-16x+8) + 6x^2(7x^2-16x+8) + 6x^2(x-2)(14x-16) \\
&= 6x(35x^3-120x^2+120x-32) \\
f'''(0) &= 6\cdot 0\cdot(35\cdot 0^3 - 120\cdot 0^2 + 120\cdot 0 - 32) \\
f'''(0) &= 0 \\
f'''(2) &= 6\cdot 2\cdot(35\cdot 2^3 - 120\cdot 2^2 + 120\cdot 2 - 32) \\
&= 96
\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že v bodě $x_2 = 2$ jsou první dvě derivace rovny nule a první nenulová derivace je třetího (tedy lichého) řádu. Vzhledem k znění Věty 8.4.11 má funkce $f(x)$ v bodě $x_2 = 2$ inflexní bod (a nemá v tomto bodě žádný lokální extrém).

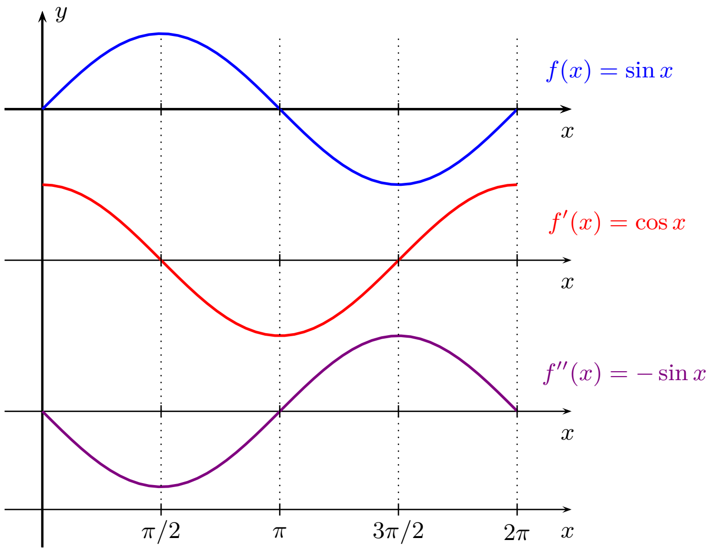
Zbývá určit typ případného extrému v bodě $x_1 = 0$. Vzhledem k tomu, že v tomto bodě byly nulové všechny tři předchozí derivace, musíme vypočítat hodnotu čtvrté derivace funkce v tomto bodě.

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= \left[6x\cdot(35x^3-120x^2+120x-32)\right]' \\
&= 6(35x^3-120x^2+120x-32) + 6x(105x^2-240x+120) \\
f^{(4)}(0) &= 6\cdot(35\cdot 0^3 - 120\cdot 0^2 + 120\cdot 0 - 32) + 6\cdot 0\cdot(105\cdot 0^2 - 240\cdot 0 + 120) \\
f^{(4)}(0) &= 6\cdot(-32) < 0
\end{aligned}$$

Derivací s nenulovou hodnotou v bodě $x_1 = 0$ se stala teprve derivace čtvrtého (tedy sudého) řádu. Funkce $f(x)$ má v bodě $x_1 = 0$ lokální extrém a vzhledem k záporné hodnotě této derivace se jedná o lokální maximum funkce $f(x)$.

Na závěr této části si shrneme poznatky vyložené v současné kapitole pomocí názorného příkladu. Mějme dánu funkci $f(x) = \sin x$ a také její derivace $f'(x) = \cos x$ a $f''(x) = -\sin x$. Grafy všech tří funkcí jsou zakresleny v Obrázku 8.17 (graf každé funkce je zakreslen na samostatné ose). V Tabulce 8.5 jsou potom vyznačeny některé

[3]) Slovo „první“ zde používáme pro označení pořadí ve smyslu nejprvnější, nejdřívější, resp. první s uvedenou vlastností. Nikoliv tedy jako označení řádu derivace.



Obrázek 8.17: Grafy funkcí $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

vlastnosti těchto funkcí. Z obrázku i tabulky je zřejmé, že v intervalech, ve kterých platí $f' > 0$, je funkce f rostoucí (v tabulce značíme symbolem $\uparrow$) a v intervalech, ve kterých je $f' < 0$, je funkce f klesající (v tabulce značíme symbolem $\downarrow$). Dále je dobře

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$f(x) = \sin x$	$\uparrow \cap$	$\downarrow \cap$	$\downarrow \cup$	$\uparrow \cup$
$f'(x) = \cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x) = -\sin x$	$-$	$-$	$+$	$+$

Tabulka 8.5: Znaménka hodnot funkcí f' a f'' a jejich vliv na vlastnosti funkce f

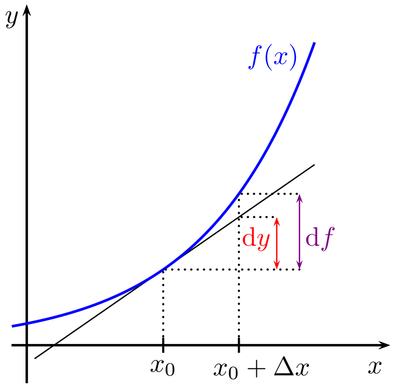
patrné, že v intervalech, ve kterých je $f'' > 0$, je funkce f konvexní (v tabulce značíme symbolem $\cup$) a v intervalech, ve kterých je $f'' < 0$, je funkce f konkávní (v tabulce značíme symbolem $\cap$).

Dále si všimněte, kde má funkce f lokální extrémy a jaké vlastnosti mají v těchto bodech funkce f' a f''. V bodě $x = \frac{\pi}{2}$ má funkce f lokální maximum, funkce f' je v tomto bodě rovna nule a funkce f'' je v tomto bodě záporná. V bodě $x = \frac{3\pi}{2}$ má funkce f lokální minimum, funkce f' je v tomto bodě rovna nule a funkce f'' je v tomto bodě kladná. Všechny uvedené výsledky dobře potvrzují poznatky z této kapitoly.

8.5 Diferenciál funkce

V této části se budeme zabývat možností vyjádřit přibližnou hodnotu přírůstku funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí lineární funkce. K tomu nám pomůže pojem diferenciálu funkce. Mějme funkci $f(x)$ a pevně zvolený bod x_0. Přejdeme-li z bodu x_0 do bodu $x_0 + \Delta x$, potom se změní také hodnota funkce f o číslo $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Velikost změny funkční hodnoty samozřejmě závisí na hodnotě čísla Δx, tedy na vzdálenosti bodů x_0 a $x_0 + \Delta x$. Přírůstek funkční hodnoty Δf je proto funkcí proměnné Δx.

Tečna má v bodě x_0 stejný směr jako graf funkce $f(x)$v bodě x_0, proto i přírůstek funkce Δf a přírůstek lineární funkce, jejímž grafem je uvažovaná tečna (označme jej symbolem Δf_L), je pro malé hodnoty Δx přibližně stejný. Z kapitoly o derivaci funkce víme, že platí $f'(x_0) = k$, kde k představuje hodnotu směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Z kapitoly o lineární funkci víme, že přírůstek lineární funkce Δf_L lze vyjádřit ve tvaru $\Delta f_L = k \cdot \Delta x$. Nahradíme-li přírůstek $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ hodnotou $f'(x_0) \cdot \Delta x$, dopouštíme se chyby, která je pro malé hodnoty Δx zanedbatelná. O tom hovoří následující věta.



Obrázek 8.18: Pojem diferenciálu funkce

Věta 8.5.1. *Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Potom přírůstek funkce f ve tvaru $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

kde $\alpha(\Delta x)$ je funkce, pro kterou platí vztah

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0. \tag{8.8}$$

Výraz $\alpha(\Delta x)\Delta x$ představuje chybu, které se dopustíme, nahradíme-li Δf výrazem $f'(x_0)\Delta x$. Díky vztahu (8.8) víme, že uvažovaná chyba klesá rychleji než $|\Delta x|$ a to nám umožňuje vyjádřit funkční hodnoty v okolí bodu x_0 s dostatečnou přesností.

Definice 8.5.2. Funkci $f'(x)\Delta x$ proměnné Δx nazýváme *diferenciálem funkce* $f(x)$ v bodě x_0. K označení diferenciálu funkce $f(x)$ v bodě x_0 používáme symboly $\mathrm{d}f(x_0)$, resp. $\mathrm{d}y(x_0)$.

Pro diferenciál v obecně zadaném bodě x používáme symbol $\mathrm{d}f$, resp. $\mathrm{d}y$. Potom je $\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \Delta x$. Nyní uvažujme funkci $g(x) = x$. V každém jejím bodě platí $\mathrm{d}x = \mathrm{d}g(x) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Symbol $\mathrm{d}x$ nazýváme *diferenciálem argumentu*, resp. *diferenciálem nezávisle proměnné* a platí

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.9}$$

Pro dostatečně malá čísla Δx je $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ a pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x_0 + \Delta x$ pak můžeme používat vztah

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{8.10}$$

8.36. Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $(1,02)^5$. **Příklad 8.36**

Řešení: Při výpočtu předpokládejme, že je dána funkce $f(x) = x^5$, bod $x_0 = 1$ a $\Delta x = 0,02$. Potom je $f(1) = 1^5 = 1$, $f'(x) = 5x^4$, tedy $f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$. Dosazením do vzorce (8.10) dostaneme

$$\begin{aligned}(1,02)^5 &= f(1 + 0,02)\\ &\approx f(1) + f'(1) \cdot \Delta x = 1 + 5 \cdot 0,02 = 1,1.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že s pomocí kalkulačky lze určit přesnou hodnotu. Je $1,02^5 = 1,104081$. Rozdíl mezi odhadem a skutečnou hodnotou činí 0,004081, tedy necelých $0,4\,\%$ skutečné hodnoty.

Příklad 8.37

8.37. Vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{26}$.

Řešení: Čtenáři jistě znají hodnotu $\sqrt{25}$. Při výpočtu proto předpokládejme, že je dána funkce $f(x) = \sqrt{x}$, bod $x_0 = 25$ a $\Delta x = 1$. Je $f(25) = \sqrt{25} = 5$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, tedy $f'(25) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{25}} = \dfrac{1}{10} = 0,1$. Dosazením těchto hodnot do vzorce (8.10) dostaneme

$$\sqrt{26} \approx 5 + 0,1 \cdot 1 = 5,1.$$

Výpočet na kalkulátoru ukazuje, že $\sqrt{26} = 5,099019514$. Odchylka činí 0,000980486, tedy necelých $0,02\,\%$ skutečné hodnoty. Povšimněte si, že i při relativně velké hodnotě $\Delta x = 1$ jsme v tomto případě dostali výsledek s dostatečně vysokou přesností.

Příklad 8.38

8.38. Je dána funkce $f(x) = x^2$.

a) Najděte diferenciál $\mathrm{d}y$ pro libovolnou hodnotu nezávisle proměnné x a přírůstku $\mathrm{d}x$.

b) Pomocí vzorce vypočteného v úloze a) vypočtěte diferenciál $\mathrm{d}y$ pro $x = 3$ a $\Delta x = 0,1$ a porovnejte jej s hodnotou skutečného přírůstku funkce pro zadané hodnoty.

Řešení:

a) Použitím vzorce (8.9) dostaneme rovnost $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$.

b) Použitím výsledku předchozího příkladu dostaneme rovnosti

$$\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3 \cdot 0,1 = 0,6.$$

Pro skutečný přírůstek funkce platí

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 \\ &= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 0,61. \end{aligned}$$

Příklad 8.39

8.39. Nalezněte diferenciál funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pro $x = 27$.

Řešení: Je $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, tedy $f'(27) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \dfrac{1}{27}$. Z Definice 8.5.2 dostaneme

$$\mathrm{d}y = f'(27)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{27}.$$

Všimněte si, že konkrétní volbou $\mathrm{d}x$ dostaneme konkrétní hodnoty diferenciálů $\mathrm{d}y$. V tomto případě je tedy $\mathrm{d}y$ funkcí $\mathrm{d}x$.

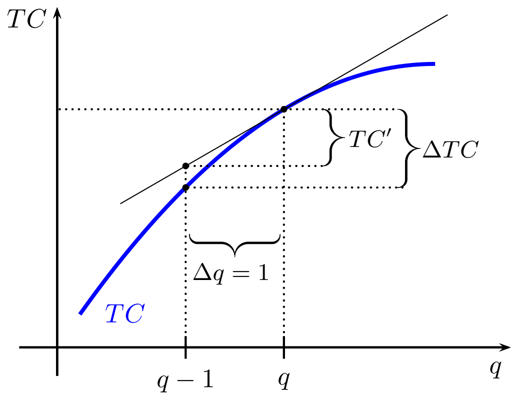
8.6 Použití pojmu derivace v ekonomii

8.6.1 Mezní náklady, příjem a zisk

Jednou z důležitých aplikací diferenciálního počtu v ekonomii je analýza mezních veličin a hledaní maximálních nebo minimálních hodnot celkových veličin. V předmětu Mikroekonomie se (budoucí) ekonomové setkávají s pojmy mezní náklady, mezní příjem a mezní zisk. V Kapitole 5.6.3 na straně 258 jsme se setkali s pojmy celkové náklady, celkový příjem a celkový zisk. Nyní si látku rozšíříme o pojmy mezní náklady, mezní příjem a mezní zisk.

Připomeňme, že slovo *mezní* znamená změnu dané veličiny v případě přidání dodatečné jednotky vstupu, resp. výstupu. Pojem *mezní náklady* určuje, jak vzrostou celkové náklady na výrobu dodatečné jednotky výstupu. Označíme-li celkové náklady na výrobu q kusů výrobku jako funkci $TC(q)$, potom symbol $TC(q-1)$ značí náklady na $q-1$ kusů výrobků a rozdíl $\Delta TC = TC(q) - TC(q-1)$ odpovídá meznímu nákladu na výrobu q-ho výrobku.

V Kapitole 8.5 jsme si ukázali, jak lze pomocí diferenciálu vyjádřit přibližnou hodnotu funkce v okolí daného bodu. Podobně lze ukázat souvislost mezních veličin a derivace funkce. Na Obrázku 8.19 odpovídá ΔTC rozdílu hodnot funkce TC v bodech



Obrázek 8.19: Ukázka souvislosti derivace funkce a mezních veličin

q a $q-1$, a tedy ΔTC představuje mezní náklady v bodě q. Symbol $TC'(q)$ značí hodnotu derivace funkce TC v bodě q.[4]) Z obrázku je přitom patrná podobnost obou hodnot, je tedy $\Delta TC \approx TC'(q)$. Je-li znám předpis pro funkci celkových nákladů $TC(q)$, potom předpis pro mezní náklady v bodě q často vyjadřuje funkce $TC'(q)$. Podobně bychom mohli zavést pojem *mezní příjem*, resp. *mezní zisk* jakožto veličiny, které udávají, o kolik vzroste celkový příjem, resp. celkový zisk při prodeji q-tého výrobku.

Analýza mezních veličin má významnou roli zejména v mikroekonomii. V následujícím příkladu ukážeme na souvislost mezních nákladů s derivací funkce celkových nákladů.

Příklad 8.40

8.40. Malá pizzerie v obchodním centru vyrábí a prodává pizzu. Manažer pizzerie odhadl denní náklady na výrobu q kusů pizzy pomocí vztahu

$$TC(q) = 1\,500 + 32q - \frac{q^2}{10}.$$

Vypočtěte a interpretujte hodnoty

a) $TC'(50)$,

b) $TC(50) - TC(49)$.

Řešení:

a) Nejprve vypočteme hodnotu $TC'(50)$.

$$TC'(x) = \left[1\,500 + 32q - \frac{q^2}{10}\right]' = 32 - \frac{q}{5}$$

$$TC'(50) = 32 - \frac{50}{5} = 22$$

Vyrobí-li v pizzerii 49 kusů pizzy, potom náklady na výrobu dodatečné 50. pizzy činí přibližně 22 Kč.

[4]) Připomeňme, že derivace funkce v bodě je definována právě jako směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě. Hodnota $TC'(q)$ na obrázku odpovídá přírůstku funkce, jejímž grafem je tečna, pro $\Delta q = 1$. Je tedy $TC'(q)$ směrnicí tečny ke grafu funkce v bodě q, a tedy i derivací funkce TC v bodě q.

b) Nyní vypočteme hodnotu rozdílu $TC(50) - TC(49)$.

$$\begin{aligned} TC(50) &= 1\,500 + 32 \cdot 50 - \frac{50^2}{10} = 2\,850 \\ TC(49) &= 1\,500 + 32 \cdot 49 - \frac{49^2}{10} = 2\,827,9 \\ TC(50) - C(49) &= 2\,850 - 2\,827,9 = 22,1 \end{aligned}$$

Vyrobí-li v pizzerii 49 kusů pizzy, potom nárůst celkových nákladů při výrobě dodatečné 50. pizzy činí přesně 22,1 Kč.

Problém 8.40.1. Pro stejné zadání jako v Příkladu 8.40 vypočtěte a interpretujte hodnoty

a) $TC'(100)$, b) $TC(100) - TC(99)$.

Analogickým způsobem jako v Příkladu 8.40 lze odvodit následující vztahy.

Mezní náklady, obrat a zisk

Označme symbolem q počet výrobků, které byly za jisté časové období vyrobeny, resp. prodány. Potom platí

$$\begin{aligned} \text{celkové náklady} &= TC(q) \\ \text{mezní náklady} &= TC'(q) \\ \text{celkový příjem} &= TR(q) \\ \text{mezní příjem} &= TR'(q) \\ \text{celkový zisk} &= \pi(q) \\ &= TR(q) - TC(q) \\ \text{mezní zisk} &= \pi'(q) \\ &= TR'(q) - TC'(q) \\ &= (\text{mezní příjem}) - (\text{mezní náklady}). \end{aligned}$$

V následujícím příkladu si ukážeme, jak spolu mezní náklady, mezní příjmy i mezní zisk souvisejí.

Příklad 8.41

8.41. Obchodní oddělení hypermarketu zvažuje zařazení jistého druhu vína do své nabídky. Oddělení provedlo marketingový průzkum a z něj odhadlo rovnici poptávky po tomto víně ve tvaru funkce

$$p = 200 - \frac{q}{50}, \tag{8.11}$$

kde q je množství prodaných lahví vína měsíčně při ceně p korun. Obchodní oddělení dále odhadlo funkci nákladů na nákup vína pomocí následujícího předpisu

$$TC(q) = 140\,000 + 40q, \tag{8.12}$$

kde $TC(q)$ představuje náklady na pořízení q kusů lahví tohoto vína.

V souvislosti s Příkladem 8.40 můžeme mezní náklady vypočítat jako derivaci nákladové funkce.

$$\begin{aligned} TC'(q) &= \left[140\,000 + 40q\right]' \\ &= 40 \end{aligned}$$

Derivací nákladové funkce je konstanta $TC'(q) = 40$, což znamená, že zvýšení počtu lahví vína o jednotku (přidání dodatečné jednotky vstupu) zvětší náklady o 40 Kč při jakémkoliv počtu objednaných lahví vína.

Celkový příjem TR je dán vztahem $TR = p \cdot q$. Již víme, že předpis pro celkový příjem firmy můžeme upravit pomocí rovnice poptávky (8.11), a tím vyjádřit celkový příjem firmy jakožto funkci jediné proměnné

$$\begin{aligned} TR(q) &= p \cdot q \\ &= \left(200 - \frac{q}{50}\right) \cdot q \\ &= 200q - \frac{q^2}{50}. \end{aligned}$$

Mezní příjem vypočteme jako derivaci funkce $TR(q)$.

$$\begin{aligned} TR'(q) &= \left(200q - \frac{q^2}{50}\right)' \\ &= 200 - \frac{q}{25} \end{aligned}$$

Připomeňme, že mezní příjem $TR'(q)$ ukazuje, jak se změní celkový příjem firmy při prodeji dodatečné jednotky výrobku. Je např.

$$TR'(1\,000) = 160, \qquad TR'(5\,000) = 0, \qquad TR'(7\,000) = -80.$$

To znamená, že dodatečný příjem z prodeje $1\,000$., $5\,000$. a $7\,000$. kusu přinese 160, resp. 0, resp. -80 Kč navíc. Při objemu prodeje 999 lahví vína přinese prodej $1\,000$. láhve vína 160 Kč navíc a při tomto objemu prodeje s rostoucím počtem prodaných lahví vína roste i celkový příjem firmy. Při objemu prodeje $4\,999$ kusů přinese prodej následujícího kusu 0 Kč, tedy při tomto objemu prodeje nezmění zvýšení počtu prodaných výrobků celkový příjem firmy. Při objemu prodeje $6\,999$ lahví vína přinese prodej následující láhve pokles obratu o 80 Kč, tedy při tomto objemu prodeje již zvýšení počtu prodaných lahví vede k poklesu celkového příjmu firmy[5]).

Na Obrázku 8.20 je právě popsaná situace znázorněna graficky. Do jednoho souřadnicového systému je zakreslen graf funkce celkových nákladů i graf funkce celkového příjmu firmy. Z obrázku je zřejmé, že k přechodu ze ztráty do zisku a naopak dochází v takzvaných bodech zvratu. Pro tyto body je splněna rovnost $TC(q) = TR(q)$; tato rovnost nám umožňuje vypočítat polohu bodů zvratu.

$$\begin{aligned} TC(q) &= TR(q) \\ 140\,000 + 40q &= 200q - \frac{q^2}{50} \\ \frac{q^2}{50} - 160q + 140\,000 &= 0 \\ q^2 - 8\,000q + 7\,000\,000 &= 0 \end{aligned}$$

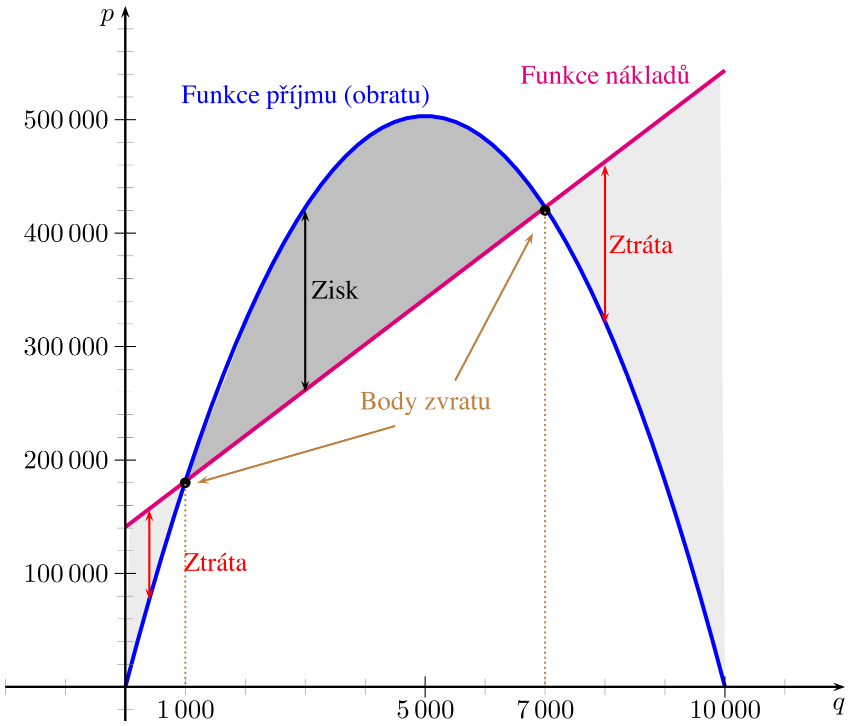
Poslední řádek představuje kvadratickou rovnici, jejímž řešením jsou hodnoty

$$\begin{aligned} q_1 &= 1\,000 \\ q_2 &= 7\,000. \end{aligned}$$

Body zvratu tedy nastanou pro objem prodeje $q_1 = 1\,000$, resp. $q_2 = 7\,000$ kusů lahví vína, což dobře odpovídá situaci znázorněné na Obrázku 8.20.

V Kapitole 5.6.3 jsme ukázali, že zisk π firmy vypočteme tím, že od celkového příjmu firmy odečteme její celkové náklady. Zisk hypermarketu z prodeje vína tedy

[5]) Připomeňme, že v dané situaci používáme jistý ekonomický model, ve kterém předpokládáme platnost rovnice poptávky. Zvýšení objemu prodeje dosáhneme snížením ceny. Abychom prodali velký počet láhví vína (např. $7\,000$ kusů), musí být cena již tak nízká, že celkový příjem firmy se takto vysokým objemem prodejem snižuje.



Obrázek 8.20: Funkce nákladů a obratu při prodeji vína

můžeme popsat rovnicí

$$\begin{aligned}\pi(q) &= TR(q) - TC(q),\\ &= \left(200q - \frac{q^2}{50}\right) - (140\,000 + 40q),\\ &= -\frac{q^2}{50} + 160q - 140\,000.\end{aligned}$$

Graf na Obrázku 8.20 nám poskytuje nějaké informace i o funkci $\pi(q)$. Z grafu snadno vyčteme, že při objemu prodeje 1 000, resp. 7 000 lahví vína se náklady a příjmy firmy sobě rovnají. Při takovém množství prodaných kusů výrobků je zisk hypermarketu roven nule. Pokud je počet prodaných výrobků v rozmezí od 1 000 do 7 000 kusů, potom je celkový příjem firmy větší než její celkové náklady, funkce $\pi(q)$ je kladná a firma realizuje zisk. Pro $q < 1\,000$, resp. pro $q > 7\,000$ jsou celkové náklady firmy vyšší než její celkový příjem, funkce $\pi(q)$ je záporná a firma je ve ztrátě.

Mezní zisk firmy vypočteme opět jako derivaci funkce π.

$$\begin{aligned}\pi'(q) &= \left(-\frac{q^2}{50} + 160q - 140\,000.\right)'\\ &= -\frac{q}{25} + 160\end{aligned}$$

Vypočteme mezní zisk pro hodnoty q rovno 2 000, resp. 4 000, resp. 7 000.

$$\pi'(2\,000) = 80 \qquad \pi'(4\,000) = 0 \qquad \pi'(7\,000) = -120$$

Z vypočtených hodnot a z významu hodnot mezního zisku vyčteme, že při objemu prodeje 1 999 kusů dosáhneme zvýšením prodeje o jeden kus navýšení zisku o 80 Kč. Při objemu prodeje 3 999 lahví vína nepřinese navýšení objemu prodeje o jednotku změnu zisku a při objemu prodeje 6 999 lahví vína vede navýšení prodeje o jednu láhev ke snížení zisku o 120 Kč. Z uvedeného textu se zdá, že nejlepší volbou je zvolit cenu vína tak, aby objem prodeje dosahoval 4 000 lahví vína měsíčně. Při menším objemu lze totiž přidáním dodatečně prodané láhve vína zvýšit zisk, při vyšším objemu prodeje vede přidaná jednotka již k poklesu zisku.

V Kapitole 8.7 si ukážeme, jak lze použít mezní veličiny k nalezení takového objemu produkce (a s použitím rovnice poptávky také prodejní ceny), při kterém je možný zisk maximální.

8.6.2 Cenová elasticita poptávky

V této kapitole se budeme zabývat vlivem změny ceny nabízeného zboží na změnu poptávaného množství tohoto zboží. Předpokládejme, že malé pekařství prodává, kromě jiného, velice oblíbený švédský koláč. Již víme, že pokud se zvýší cena tohoto koláče, klesne zájem o jeho koupi. Nás může zajímat, zda přitom dojde ke snížení celkového příjmu pekařství (díky převažujícímu vlivu nižšího poptávaného množství), či ke zvýšení celkového příjmu (díky převažujícímu vlivu vyšší prodejní ceny).

Uvažujme například situaci, kdy při zvýšení ceny o $1\,\%$ dojde k poklesu poptávaného množství o $3\,\%$. V takovém případě poptávka „citlivě“ reaguje na změnu ceny a malá změna ceny vede k výrazné změně poptávaného množství. Říkáme, že poptávka je v takovém případě *elastická*. Snadno odvodíme, že celkový příjem firmy v této situaci poklesne. Pokud při navýšení ceny o $1\,\%$ klesne poptávané množství o $0,5\,\%$, potom je zřejmé, že poptávka není tolik citlivá na změnu ceny a říkáme, že poptávka je *neelastická*. V takovém případě při zvýšení ceny poptávané množství příliš neklesne a celkový obrat vzroste. Může se také stát, že při zvýšení ceny o $1\,\%$ dojde k poklesu poptávaného množství o $1\,\%$. V takovém případě hovoříme o *jednotkové elasticitě* poptávky a obrat firmy se v takovém případě nezmění.

V právě uvedených případech porovnáváme relativní změnu ceny a poptávaného množství. Poměr těchto veličin nazýváme *cenová elasticita poptávky*, resp. pouze *elasticita poptávky*. Ukážeme si použití derivací při vyjádření elasticity. Relativní změnu ceny, resp. poptávaného množství vypočteme ze vztahu

$$\frac{\Delta p}{p}, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\Delta q}{q},$$

kde p je cena prodávaného statku a q je odpovídající poptávané množství při ceně p.

V mikroekonomii se funkce poptávky často vyskytuje ve tvaru, kde popisujeme cenu p v závislosti na poptávaném množství q, je tedy $p = f(q)$. V této kapitole však sledujeme vliv změny ceny na poptávané množství, proto budeme uvažovat funkci poptávky, která poptávané množství vyjadřuje jako funkci ceny. Je tedy $q = f(p)$. Takový přechod je snadné provést.[6])

$$\begin{aligned} p &= 400 - \frac{q}{20} && \ldots \textit{ rovnice poptávky ve tvaru } p = f(q) \\ 20p &= 8\,000 - q && \\ q &= 8\,000 - 20p && \ldots \textit{ rovnice poptávky ve tvaru } q = f(p) \end{aligned}$$

Relativní změnu poptávaného množství můžeme vyjádřit pomocí funkce $q = f(p)$. Změna poptávaného množství odpovídá rozdílu poptávaného množství při zvýšené ceně $p + \Delta p$ a poptávaného množství při původní ceně p. Je tedy $\Delta q = f(p + \Delta p) - f(p)$. Potom je

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{f(p + \Delta p) - f(p)}{f(p)}.$$

Již jsme zmínili, že elasticita poptávky představuje poměr relativních změn poptávaného množství a ceny. Označme *cenovou elasticitu poptávky* (někdy se používá také

---

[6]) Poznamenejme, že z matematického pohledu se jedná o nalezení inverzní funkce.

označení *koeficient cenové elasticity*) symbolem E. Potom je

$$E = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{f(p+\Delta p)-f(p)}{f(p)}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{f(p+\Delta p)-f(p)}{f(p)} \cdot \frac{p}{\Delta p}$$
$$= \frac{f(p+\Delta p)-f(p)}{\Delta p} \cdot \frac{p}{f(p)}. \tag{8.13}$$

Nyní předpokládejme, že změna ceny se limitně blíží nule, je tedy $\Delta p \to 0$. Potom z rovnice (8.13) a Definice 7.4 na straně 347 plyne

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} \cdot \lim_{\Delta p \to 0} \frac{f(p+\Delta p)-f(p)}{\Delta p}$$
$$= \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p).$$

Limitním přechodem $\Delta p \to 0$ jsme zavedli tzv. *bodovou elasticitu poptávky* (někdy též *elasticitu poptávky v bodě*)

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p). \tag{8.14}$$

Připomeňme, že cena p a poptávané množství $q = f(p)$ musí mít nezápornou hodnotu. Funkce poptávky $q = f(p)$ je klesající funkce (s rostoucí cenou klesá poptávka), proto její derivace $f'(p)$ bude nabývat pouze záporné hodnoty. Funkce $E(p)$ tak bude mít zápornou hodnotu pro všechna p, ve kterých je definována.[7])

Příklad 8.42

8.42. Předpokládejme, že funkce poptávky po jistém zboží má tvar

$$p = 250 - \frac{q}{4}.$$

Vypočtěte předpis pro $E(p)$ a nalezněte hodnoty

a) $E(100)$, b) $E(150)$, c) $E(125)$.

Řešení: Rovnice poptávky je zadána ve tvaru $p = f(q)$, potřebujeme ji tedy převést do tvaru $q = f(p)$.

$$p = 250 - \frac{q}{4}$$
$$4p = 1\,000 - q$$
$$q = 1\,000 - 4p$$

Dále je

$$E(p) = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)}$$
$$= \frac{p \cdot (1\,000 - 4p)'}{1\,000 - 4p}$$
$$= \frac{p \cdot (-4)}{1\,000 - 4p}$$
$$= \frac{p}{p - 250}. \tag{8.15}$$

Dosazením konkrétních hodnot do předpisu (8.15) dostaneme požadované hodnoty.

$$E(100) = \frac{100}{100-250} = -\frac{2}{3} \doteq -0,67 \qquad E(150) = \frac{150}{150-250} = -1,5 \qquad E(125) = \frac{125}{125-250} = -1$$

Ekonomickou interpretaci zjištěných výsledků lze provést následujícím způsobem.

[7]) V některých učebnicích mikroekonomie, zejména pro bakalářský stupeň, se používá absolutní hodnota $E(p)$, takže bodová elasticita poptávky vychází s kladnou hodnotou.

a) $E(100) \doteq -0,67 > -1$. Při ceně $p = 100\,$Kč přinese malá procentuální změna ceny menší procentuální změnu poptávaného množství. Stoupne-li například cena o $10\,\%$, potom odpovídající změna poptávaného množství bude přibližně

$$-0,67 \cdot 10\,\% = -6,7\,\%.$$

Protože změna má zápornou hodnotu, odpovídá zvýšení ceny o $10\,\%$ pokles poptávaného množství o přibližně $6,7\,\%$. Poptávané množství příliš nereaguje na změnu ceny, poptávka je tedy neelastická.

b) $E(150) = -1,5 < -1$. Při ceně $p = 150\,$Kč přinese malá procentuální změna ceny větší (výraznější) procentuální změnu poptávaného množství. V tomto případě odpovídá nárůstu ceny o $10\,\%$ procentuální změna poptávaného množství ve výši

$$-1,5 \cdot 10\,\% = -15\,\%.$$

Zvýšení ceny o $10\,\%$ přinese pokles poptávaného množství o $15\,\%$. Poptávané množství citlivě reaguje na změnu ceny, poptávka je proto elastická.

c) $E(125) = -1$. Při ceně $125\,$Kč odpovídá procentuální změně ceny přibližně stejná procentuální změna poptávaného množství. Poptávka tedy má jednotkovou elasticitu.

Problém 8.42.1. Pro funkci poptávky $p = 300 - \frac{q}{20}$ nalezněte předpis pro $E(p)$ a vypočtěte $E(p)$ pro

a) $p = 100$, b) $p = 150$, c) $p = 200$.

Bodová elasticita poptávky

Předpokládejme, že vztah mezi poptávaným množstvím q po daném produktu a cenou p tohoto produktu je popsán funkcí poptávky $q = f(p)$.

Bodová elasticita poptávky je definována vztahem

$$E(p) = \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p). \tag{8.16}$$

Poptávka je

elastická pro $E(p) < -1$,

neelastická pro $-1 < E(p) \leq 0$,

jednotková pro $E(p) = -1$.

8.43. Je dána funkce poptávky ve tvaru $q = f(p) = 11\,250 - 6p^2$. **Příklad 8.43**

a) Vypočtěte hodnoty p, pro které je poptávka elastická a pro které je neelastická.

b) Zjistěte, jaký efekt bude mít zvýšení ceny o $10\,\%$ při ceně $p = 15$.

c) Zjistěte, jaký efekt bude mít zvýšení ceny o $10\,\%$ při ceně $p = 30$.

Řešení:

a) Nejprve vypočteme vztah pro cenovou elasticitu poptávky. Ze zadání plyne, že $f'(p) = -12p$. Potom je

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p) \\ &= \frac{p}{11\,250 - 6p^2} \cdot (-12p) \\ &= \frac{-12p^2}{11\,250 - 6p^2}\,. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Hranici mezi elastickou a neelastickou poptávkou tvoří hodnota $E(p) = -1$. Vypočteme, pro jakou cenu p je elasticita rovna -1.

$$\begin{aligned} \frac{-12p^2}{11\,250 - 6p^2} &= -1 \\ -12p^2 &= -11\,250 + 6p^2 \\ -18p^2 &= -11\,250 \\ p^2 &= 625 \\ p &= \pm 25 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Ze zadání plyne, že cena nemůže být záporná. Je tedy $p > 0$ a budeme uvažovat pouze kladný kořen rovnice (8.18). Dále omezíme rozsah možných hodnot p tak, aby poptávané množství q nedosahovalo záporných hodnot.

$$\begin{aligned} 11\,250 - 6p^2 &> 0 && \dots\ \textit{zápis nerovnice } q = f(p) > 0 \\ 6p^2 &< 11\,250 && \dots\ \textit{algebraická úprava} \\ p^2 &< 1\,875 && \dots\ \textit{algebraická úprava} \\ 0 < p &< 25\sqrt{3} \doteq 43,3 && \dots\ \textit{odmocnění a přidání podmínky } p > 0 \end{aligned}$$

Cena p se může pohybovat pouze v rozmezí $0 < p < 43,3$, přičemž při hodnotě $p = 25$ dochází ke změně poptávky z neelastické na elastickou. Dosazením libovolných hodnot z intervalů $(0,\ 25)$ a $(25,\ 43.3)$ do předpisu pro $E(p)$ zjistíme, při jakých cenách je $E(p) > -1$, resp. $E(p) < -1$. Výsledky jsou zaznamenány v Tabulce 8.6.

cena p	$(0,\ 25)$	$(25,\ 43.3)$
elasticita $E(p)$	$-1 < E(p) < 0$	$E(p) < -1$
poptávka q	elastická	neelastická

Tabulka 8.6: Cenová elasticita poptávky pro funkci poptávky $q = f(p) = 11\,250 - 6p^2$

b) Výsledek zjistíme dosazením hodnoty $p = 15$ do vzorce (8.17).

$$E(15) = \frac{-12 \cdot (15)^2}{11250 - 6 \cdot (15)^2} \doteq -0,27$$

Zvýšení ceny o deset procent při ceně 15 Kč povede ke změně poptávaného množství o přibližně $-0,27 \cdot (10\,\%) = -2,7\,\%$.

c) Nyní do vzorce (8.17) dosadíme hodnotu $p = 30$.

$$E(30) = \frac{-12 \cdot (30)^2}{11250 - 6 \cdot (30)^2} \doteq -1,85$$

Zvýšení ceny o deset procent při ceně 30 Kč povede ke změně poptávaného množství o přibližně $-1,85 \cdot (10\,\%) = -18,5\,\%$.

Problém 8.43.1. Je dána funkce poptávky ve tvaru $q = f(p) = 15\,000 - 8p$.

a) Vypočtěte hodnoty p, pro které je poptávka elastická a pro které je neelastická.

b) Zjistěte, jaký efekt bude mít zvýšení ceny o $10\,\%$ při ceně $p = 20$.

c) Zjistěte, jaký efekt bude mít zvýšení ceny o $10\,\%$ při ceně $p = 35$.

Elasticita poptávky a celkový příjem

V Kapitole 8.6.2 jsme zavedli pojem bodové elasticity poptávky. Nyní na tento pojem navážeme a ukážeme, jaký je vztah mezi bodovou elasticitou poptávky a růstem, resp. poklesem celkového příjmu. Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 8.44

8.44. Je dána funkce poptávky ve tvaru $q = 20\,000 - 40p$, kde $0 \le p \le 500$. Určete hodnoty p, pro které je:

a) celkový příjem TR rostoucí, resp. klesající,

b) poptávka elastická, resp. neelastická.

Řešení:

a) Celkový příjem vypočteme jako součin poptávaného množství q a ceny p jednoho kusu výrobku.

$$\begin{aligned} TR(p) &= p \cdot q \\ &= p \cdot (20\,000 - 40p) \\ &= 20\,000p - 40p^2 \end{aligned}$$

Derivací funkce $TR(q)$ zjistíme intervaly monotonie této funkce.

$$\begin{aligned} TR'(p) &= \left(20\,000p - 40p^2\right)' \\ &= 20\,000 - 80p \\ &= 80 \cdot (250 - p) \end{aligned} \tag{8.19}$$

Z předpisu (8.19) snadno odvodíme, že pro $0 < p < 250$ je $TR'(p) > 0$ a pro $250 < p < 500$ je $TR'(p) < 0$. Pro $p \in (0, 250)$ je celkový příjem rostoucí funkcí, tedy s růstem ceny stoupá velikost celkového příjmu. Pro $p \in (250, 500)$ je celkový příjem klesající funkcí - s růstem ceny klesá velikost celkového příjmu.

b) Nejprve vyjádříme předpis pro bodovou elasticitu poptávky pomocí vzorce (8.14).

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p) \\ &= \frac{p}{20\,000 - 40p} \cdot (-40) \\ &= \frac{-40p}{20\,000 - 40p} \\ &= \frac{p}{p - 500} \end{aligned} \tag{8.20}$$

Nyní zjistíme, při jaké ceně je hodnota $E(p)$ rovna -1.

$$\begin{aligned} \frac{p}{p - 500} &= -1 \\ p &= 500 - p \\ p &= 250 \end{aligned}$$

Ke zjištění, na kterém z intervalů $(0, 250)$ a $(250, 500)$ je poptávka elastická, resp. neelastická, opět vybereme po jednom bodu z obou intervalů a jejich dosazením do předpisu (8.20) zjistíme, kdy je $E(p) > -1$, resp. $E(p) < -1$. Výsledky jsou zaznamenány v Tabulce 8.7.

cena p	$(0,\, 250)$	$(250,\, 500)$
elasticita	$E(100) = -0,25$	$E(300) = -1,5$
elasticita $E(p)$	$-1 < E(p) < 0$	$E(p) < -1$
poptávka q	elastická	neelastická

Tabulka 8.7: Cenová elasticita poptávky pro funkci poptávky $q = 20\,000 - 40p$.

Porovnáním výsledků v části a), resp. b) Příkladu 8.44 zjistíme, že celkový příjem je rostoucí funkcí na intervalu, ve kterém je poptávka neelastická. Dále vidíme, že celkový příjem klesá na intervalu, ve kterém je poptávka elastická. Ověříme, zda-li toto tvrzení platí obecně.

Předpokládejme, že je dána funkce poptávky ve tvaru $q = f(p)$. Ze vztahu (8.16) snadno odvodíme rovnost

$$f'(p) = \frac{E(p) \cdot f(p)}{p}.$$

Potom pro celkový příjem (resp. jeho derivaci) platí následující rovnosti.

$$\begin{aligned}
TR(p) &= q \cdot p \\
&= f(p) \cdot p \\
TR'(p) &= f'(p) \cdot p + f(p) && \ldots \textit{ derivace součinu} \\
&= \frac{E(p) \cdot f(p)}{p} \cdot p + f(p) && \ldots \textit{ dosazení vzorce pro } f'(p) \\
&= E(p) \cdot f(p) + f(p) \\
&= f(p) \cdot \big[E(p) + 1\big] && \ldots \textit{ vytknutí členu } f(p)
\end{aligned}$$

Poptávané množství $q = f(p)$ nemůže být ze své podstaty záporné, vzhledem k ekonomické praxi ho lze považovat i za různé od nuly. Můžeme tedy předpokládat vztah $f(p) > 0$. Je-li výraz $E(p) + 1$ kladný, tj. je-li $E(p) > -1$, nabývá kladné hodnoty i funkce $TR'(p)$ a celkový příjem $TR(p)$ je potom rostoucí funkcí. Analogicky, je-li výraz $E(p)+1$ záporný, tj. je-li $E(p) < -1$, nabývá záporné hodnoty i funkce $TR'(p)$ a celkový příjem $TR(p)$ je klesající funkcí. Zjištěné výsledky jsou zobrazeny na Obrázku 8.21.

Shrnutí - Celkový příjem a bodová elasticita poptávky

Poptávka je neelastická:

- při poklesu ceny poklesne celkový příjem,
- při vzrůstu ceny vzroste celkový příjem.

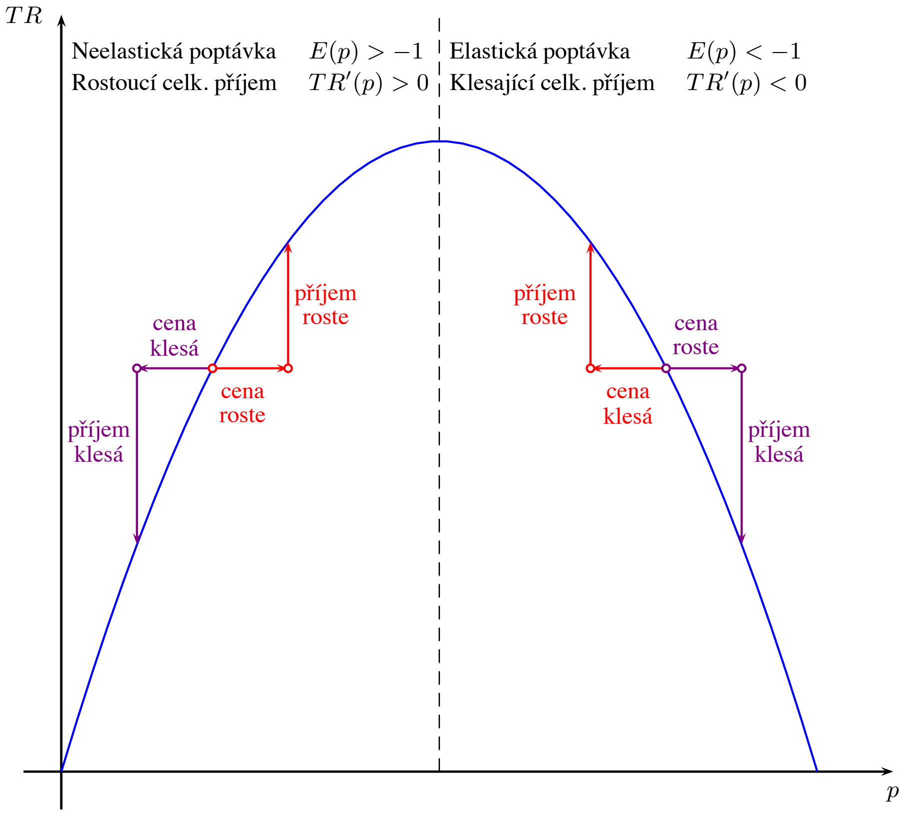
Poptávka je elastická:

- při poklesu ceny vzroste celkový příjem,
- při vzrůstu ceny poklesne celkový příjem.

Příklad 8.45

8.45. Malé nakladatelství vydávající notové zápisy známých i méně známých hudebních skladeb připravuje vydání klavírních skladeb Jaroslava Ježka. Ze zkušenosti vědí, že za cenu $p = 150$ Kč prodají $q = 2\,000$ kusů not měsíčně. Pokud se však cena not zvýší o 10 %, poptávané množství klesne na 1 880 prodaných kusů za měsíc. Pro zjednodušení předpokládejme, že poptávané množství je lineární funkcí ceny.

a) Vypočtěte hodnotu bodové elasticity poptávky při nové ceně.



Obrázek 8.21: Vztah mezi celkovým příjmem a elasticitou poptávky

b) Určete přibližnou změnu poptávaného množství, jestliže cena vzroste o dalších $10\ \%$.

c) Povede druhé zvýšení ceny o $10\ \%$ k růstu či poklesu celkového příjmu nakladatelství?

Řešení: Nejprve odvodíme předpis funkce poptávky. Ze zadání plyne, že hledáme její vyjádření ve tvaru lineární funkce $q = f(p) = mp + b$, kde m je směrnice lineární funkce a b je její absolutní člen. Hodnotu směrnice lze odvodit několika způsoby, viz Kapitola 5.6.2 na straně 253. V tomto případě pro směrnici m využijeme rovnost

$$m = \frac{\Delta q}{\Delta p}.$$

Potom je

$$m = \frac{2\,000 - 1\,880}{150 - 165} = \frac{120}{-15} = -8.$$

Absolutní člen b lineární funkce vypočteme dosazením do jejího předpisu se známými hodnotami.

$$\begin{aligned} q &= mp + b \\ 2\,000 &= (-8)\cdot 150 + b && \ldots \textit{ při ceně } p = 150 \text{ Kč } \textit{je } q = 2\,000 \textit{ ks} \\ b &= 2\,000 + 1\,200 \\ b &= 3\,200 \end{aligned}$$

Předpis funkce poptávky má tvar $q = f(p) = 3\,200 - 8p$. Nyní můžeme přikročit k řešení zadaných úloh.

a) Vyjdeme ze vzorce 8.14 na straně 402. Budeme přitom potřebovat derivaci funkce $q = f(p)$. Použitím výsledku z předchozí části dostaneme

$$f'(p) = (3\,200 - 8p)' = -8.$$

Dále je

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)} \\ &= \frac{p \cdot (-8)}{3\,200 - 8p} \\ &= \frac{-p}{400 - p} \\ E(165) &= \frac{-165}{400 - 165} \\ &\doteq -0,7. \end{aligned}$$

Bodová elasticita poptávky při ceně 165 Kč má hodnotu $E(165) \doteq -0,7$.

b) Při ceně $p = 165$ Kč povede další následné zvýšení ceny o deset procent k procentuální změně poptávaného množství ve výši přibližně

$$E(165) \cdot 10\,\% \doteq -0,7 \cdot 10\,\% = -7\,\%.$$

Poptávané množství tedy klesne přibližně o sedm procent, což znamená pokles přibližně o

$$0,07 \cdot 1\,880 \doteq 132 \text{ zákazníků}.$$

c) Bodová elasticita poptávky při ceně 165 Kč je rovna $E(165) \doteq -0,7 > -1$. Poptávka je proto při této ceně neelastická a další zvýšení ceny povede ke zvýšení celkového příjmu nakladatelství.

Problém 8.45.1. Vyřešte zadané úlohy z Příkladu 8.45, jestliže nyní při zvýšení ceny z 200 Kč na 220 Kč klesne poptávané množství po notách z hodnoty 1 600 kusů na 1 520 kusů.

Problém 8.45.2. Opakujte zadání Příkladu 8.45, jestliže nyní při ceně 440 Kč je poptávané množství rovno $q = 900$ kusů not a zvýšení ceny o deset procent vede ke snížení poptávaného množství na $q = 790$ kusů not.

8.7 Využití extrémů funkce

V této části si ukážeme některé příklady na praktické využití lokálních a globálních extrémů. Tyto úlohy by měly čtenáře seznámit s některými možnostmi řešení úloh z reálného světa související s hledáním nějaké minimální či maximální hodnoty. Při řešení takových úloh nelze použít nějakou univerzální šablonu, s jejíž pomocí bychom mechanicky vyřešili všechny zadané problémy. Nicméně lze doporučit následující postup.

Krok 1 Zamyslete se nad zadáním problému. Uvědomte si, které veličiny (proměnné - ať již známé, nebo ty, které máte vypočítat) jsou v úloze zadány a označte si je vhodnými symboly.

Krok 2 Pokuste se z uvedených proměnných sestavit model ve formě odpovídající funkce. Závisle proměnnou většinou bývá ta proměnná, která má nabývat maximální či minimální hodnotu. Nezávisle proměnnou v této funkci potom většinou bývá ta proměnná, jejíž hodnotu hledáte a která vede k dosažení maximální či minimální hodnoty závisle proměnné.

Krok 3 Vypočtěte lokální, resp. globální extrémy této funkce.

Krok 4 Posuď'te, zda nalezený výsledek odpovídá zadané situaci, tj. proveďte verifikaci výsledku.

Pokud máte dobře zvládnutou techniku nalezení extrémů zadané funkce, nejtěžším krokem bývá provedení Kroku 2. Použitou techniku výpočtu proto přiblížíme v následující sérii úloh.

Příklad 8.46

8.46. Sklárna vyrábí a prodává q kusů reprezentativních váz měsíčně. Maximální kapacita ve výrobní hale je 10 000 kusů za měsíc. Celkové náklady firmy na výrobu a prodej váz jsou popsány rovností

$$TC(q) = 80\,000 + 200q,$$

kde $TC(q)$ jsou celkové náklady vyjádřené v Kč při výrobě q kusů váz měsíčně. Funkce poptávky po výrobcích sklárny je

$$p = 1\,000 - q, \tag{8.21}$$

kde q je poptávané množství při ceně p. Určete:

a) nejvyšší možný celkový příjem,

b) nejvyšší možný celkový zisk, objem výroby, která přinese nejvyšší možný zisk a cenu, za kterou se mají vázy prodávat, aby se realizoval maximálně možný zisk. (Předpokládáme, že firma se chová rozumně a vyrábí právě tolik výrobků, kolik je schopna prodat.)

Řešení:

a) Celkový příjem firmy $TR(q)$ představuje příjem firmy, který vznikne prodejem q kusů váz, každé za cenu p Kč.

$$\begin{aligned} TR(q) &= q \cdot p \\ &= q \cdot (1\,000 - q) \\ &= 1\,000q - q^2 \end{aligned} \tag{8.22}$$

Našli jsme matematický model vyjadřující celkový příjem pomocí proměnné q. Nyní nalezneme maximum této funkce v rozmezí $0 \le q \le 10\,000$.

$$\begin{aligned} TR'(q) &= \left(1\,000q - q^2\right)' \\ TR'(q) &= 1\,000 - 2q \\ 1\,000 - 2q &= 0 \\ q &= 500 \end{aligned}$$

Derivace funkce $TR(q)$ je definována pro každé $q \in \mathbb{R}$ a její jediný nulový bod je roven $q = 500$. Tento bod je tedy jediným bodem podezřelým z extrému. Pomocí druhé derivace určíme typ případného extrému.

$$\begin{aligned} TR''(q) &= (1\,000 - 2q)' \\ &= -2 < 0 \end{aligned}$$

První derivace funkce $TR(q)$ v bodě $q = 500$ je rovna nule, druhá derivace je v tomto bodě záporná, funkce $TR(q)$ nabývá v tomto bodě své lokální maximum. Dosazením do předpisu (8.22) zjistíme hodnotu maximálního celkového příjmu firmy.

$$\begin{aligned} TR(500) &= 1\,000 \cdot 500 - (500)^2 \\ &= 250\,000 \text{ Kč} \end{aligned}$$

b) Celkový zisk $\pi(q)$ vypočítáme jako rozdíl celkového příjmu $TR(q)$ a celkových nákladů $TC(q)$. Jestliže firma za měsíc prodá q výrobků, každý výrobek za p korun, potom pro její celkový příjem $TR(q)$ platí rovnost $TR(q) = p \cdot q$. Víme, že vztah mezi cenou vázy a počtem prodaných váz je dán funkcí poptávky (8.21). Proto je

$$\begin{aligned} \pi(q) &= TR(q) - TC(q) \\ &= q \cdot p - TC(q) \\ &= q(1\,000 - q) - (80\,000 + 200q) \\ &= -q^2 + 800q - 80\,000. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Nyní známe funkci, která udává velikost zisku v závislosti na objemu produkce, resp. na počtu prodaných váz. Nalezneme maximum této funkce.

$$\begin{aligned} \pi'(q) &= \big(- q^2 + 800q - 80\,000\big)' \\ \pi'(q) &= -2q + 800 \\ 0 &= -2q + 800 \\ q &= 400 \end{aligned}$$

Bod podezřelý z extrému je $q = 400$. Pomocí Věty 8.4.10 zjistíme, o jaký typ případného extrému se jedná.

$$\begin{aligned} \pi''(q) &= \big(- 2q + 800\big)' \\ \pi''(q) &= -2 \\ \pi''(400) &= -2 \end{aligned}$$

Druhá derivace v bodě $q = 400$ má zápornou hodnotu, proto v tomto bodě funkce $\pi(q)$ nabývá své lokální (a také globální) maximum. Firma dosáhne nejvyššího celkového zisku, bude-li vyrábět a prodávat 400 váz měsíčně. Optimální cenu vázy zjistíme z funkce poptávky (8.21).

$$\begin{aligned} p &= 1\,000 - q \\ &= 1\,000 - 400 \\ &= 600 \end{aligned}$$

Sklárna by měla prodávat vázy za cenu 600 Kč. Velikost celkového zisku firmy zjistíme dosazením do rovnosti (8.23).

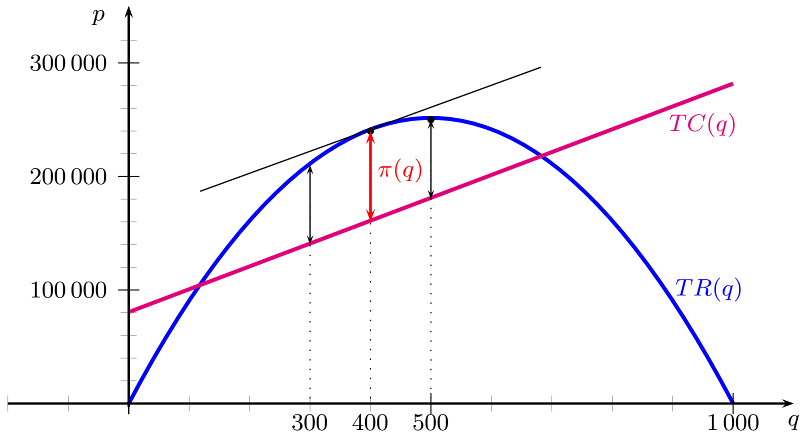
$$\begin{aligned} \pi(q) &= -q^2 + 800q - 80\,000 \\ \pi(400) &= -(400)^2 + 800 \cdot 400 - 80\,000 \\ &= 80\,000 \end{aligned}$$

Při ceně 600 Kč za jednu vázu firma prodá 400 váz měsíčně a celkový zisk bude roven 80 00 Kč.

Výsledky vypočtené v Příkladu 8.46 jsou zobrazeny na Obrázku 8.22. Z obrázku je patrné, že maximální zisk firma realizuje v okamžiku, kdy je sklon grafu funkce celkového příjmu roven sklonu funkce celkových nákladů. Po překročení této úrovně již celkové náklady rostou rychleji než celkový příjem, a zisk tak klesne. Během výpočtu jsme při hledání maxima zisku vycházeli z rovnosti $\pi'(q) = 0$. Jejím rozepsáním dostaneme

$$\begin{aligned} \pi'(q) &= \big[TR(q) - TC(q)\big]' \\ &= TR'(q) - TC'(q) \\ 0 &= TR'(q) - TC'(q) \\ TR'(q) &= TC'(q). \end{aligned}$$

Maximální zisk nastane při takovém množství q, při kterém je $TR'(q) = TC'(q)$, tzn. tehdy, je-li mezní příjem roven mezním nákladům. To je v souladu se závěrem, ke kterému jsme úvahou došli v Příkladu 8.41 na straně 398.



Obrázek 8.22: Funkce celkových nákladů a celkového příjmu při prodeji váz

8.47. Řešme předchozí úlohu znovu s tím, že některé údaje změníme. Nyní je maximální výrobní kapacita sklárny 10 000 kusů za měsíc. Náklady společnosti na výrobu a prodej váz jsou popsány rovností

Příklad 8.47

$$TC(q) = 180\,000 + 1100q,$$

kde $TC(q)$ jsou náklady vyjádřené v Kč při výrobě q kusů váz měsíčně. Funkce poptávky po výrobcích sklárny je

$$p = 5\,000 - \frac{q}{10}, \tag{8.24}$$

kde q je poptávané množství měsíčně při ceně p. Určete nejvyšší možný zisk, objem výroby, která přinese nejvyšší zisk a cenu, za kterou se vázy mají prodávat, aby se realizoval maximální zisk.

Řešení: Vzhledem k upravenému zadání úlohy je

$$\begin{aligned}
\pi(q) &= TR(q) - TC(q) \\
&= q \cdot p - TC(q) \\
&= q\left(5\,000 - \frac{q}{10}\right) - (180\,000 + 1100q) \\
&= -\frac{q^2}{10} + 3\,900q - 180\,000. \qquad (8.25)
\end{aligned}$$

Nalezneme extrémy funkce $\pi(q)$.

$$\begin{aligned}
\pi'(q) &= \left(-\frac{q^2}{10} + 3\,900q - 180\,000\right)' = -\frac{2q}{10} + 3\,900 \\
0 &= -\frac{2q}{10} + 3\,900 \\
q &= 19\,500
\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že funkce $\pi(q)$ má jediný bod podezřelý z extrému $q = 19\,500$. Ověříme, zda se jedná o extrém funkce.

$$\begin{aligned}
\pi''(q) &= \left(-\frac{2q}{10} + 3\,900\right)' \\
&= -\frac{2}{10} \\
\pi''(19\,500) &= -\frac{2}{10}
\end{aligned}$$

Druhá derivace funkce $\pi(q)$ v bodě $q = 19\,500$ je záporná, v uvedeném bodě tedy funkce nabývá svého lokálního maxima. Připomeňme, že maximální výrobní kapacita sklárny je $10\,000$ kusů váz měsíčně, a firma proto nemůže vyrábět $19\,500$ kusů váz měsíčně. Jak by se měla firma v této situaci zachovat? Snadno ověříme, že na intervalu $\langle 0, 19\,500\rangle$ je funkce $\pi(q)$ rostoucí. Tedy globální maximum funkce $\pi(q)$ na intervalu $\langle 0, 10\,000\rangle$ nastává v bodě $q = 10\,000$. Z toho plyne, že firma by měla využít plnou výrobní kapacitu a vyrábět $10\,000$ kusů váz měsíčně. Optimální cenu vázy zjistíme z funkce poptávky (8.24).

$$\begin{aligned} p &= 5\,000 - \frac{q}{10} \\ &= 5\,000 - \frac{10\,000}{10} \\ &= 4\,000 \end{aligned}$$

Firma by měla prodávat jednotlivé vázy za $4\,000$ Kč. Zisk sklárny zjistíme dosazením do rovnosti (8.25).

$$\begin{aligned} \pi(10\,000) &= -\frac{q^2}{10} + 3\,900q - 180\,000 \\ &= -\frac{(10\,000)^2}{10} + 3\,900 \cdot 10\,000 - 180\,000 \\ &= 28\,820\,000 \end{aligned}$$

Při ceně $4\,000$ Kč za jednu vázu sklárna prodá $10\,000$ váz měsíčně a její zisk bude $28\,820\,000$ Kč.

Předchozí dvě úlohy ukázaly význam lokálních extrémů při hledání globálních extrémů. V obou případech jsme vlastně hledali globální maximum funkce $\pi(q)$ na intervalu $\langle 0,\ 10\,0000\rangle$. V prvním případě bylo tímto extrémem lokální maximum funkce, podruhé nabývala funkce své globální maximum v krajním bodě intervalu.

Příklad 8.48

8.48. Pěstitel ovoce odhadl na základě historických záznamů, že když na jeden hektar půdy zasadí $2\,000$ jabloní, potom v budoucnu každý strom vydá průměrně úrodu 70 kg jablek. Za každých 10 stromů navíc zasazených na jeden hektar, klesne průměrný výnos z jednoho stromu o 1 kg jablek. Kolik stromů by měl sadař zasadit na jeden hektar, aby maximalizoval celkový výnos *TP* (označení pochází z anglického *Total Product*) z jednoho hektaru? Kolik kilogramů jablek činí maximální celkový výnos z jednoho hektaru?

Řešení: Tato úloha se od předchozích dvou úloh liší tím, že nejsou zadány žádné výchozí vztahy ve formě funkcí. Při výpočtu budeme muset nejprve nalézt příslušné vztahy mezi jednotlivými proměnnými. Maximalizovat máme celkový výnos *TP*. Ten tedy bude představovat závisle proměnnou. Velikost celkového výnosu ovlivníme počtem stromů na jednom hektaru. Tuto veličinu budeme považovat za nezávisle proměnnou. Nalezneme předpis funkce, která udává, jak celkový výnos z jednoho hektaru závisí na počtu stromů na tomto hektaru.

Celkový výnos *TP* je dán součinem průměrného výnosu *AP* (z anglického *Average Product*) z jednoho stromu a počtem stromů na jednom hektaru. Nejprve zjistíme, jak průměrný výnos *AP* z jednoho stromu závisí na počtu stromů na jednom hektaru. V zadání úlohy je stanoveno, že vždy, když počet stromů na jednom hektaru vzroste o 10 kusů, klesne průměrný výnos z jednoho stromu o 1 kg jablek. Funkce popisující vztah mezi oběma veličinami tedy bude lineární funkcí. Její předpis snadno odvodíme na základě znalostí o vlastnostech lineární funkce. Vždy, když hodnota nezávisle proměnné vzroste o 10 jednotek, klesne hodnota závisle proměnné o jednu jednotku. Směrnice m této lineární funkce tedy musí mít hodnotu $m = -1/10$. Hodnotu absolutního členu b vypočteme dosazením známých hodnot do předpisu funkce.

Označme si počet stromů na jednom hektaru symbolem q, průměrný výnos z jednoho stromu symbolem AP. Víme, že AP je funkcí q, a to lineární funkcí ve tvaru

$AP(q) = mq+b$. Již víme, že směrnice funkce má hodnotu $m = -1/10$. Dále víme, že pokud je na jednom hektaru zasazeno 2 000 stromů, potom je průměrný výnos z jednoho stromu roven 70 kg. Je tedy $AP(2\,000) = 70$. Dosazením těchto hodnot do předpisu funkce $AP(q)$ snadno vypočteme hodnotu koeficientu b.

$$\begin{aligned}
AP(q) &= mq + b && \textit{předpis lineární funkce}\\
&= -\frac{1}{10}q + b && \textit{dosazení hodnoty směrnice}\\
AP(2\,000) &= -\frac{1}{10}\cdot 2\,000 + b && \textit{při počtu } 2\,000 \textit{ stromů na hektar}\ldots\\
70 &= -200 + b && \ldots\ \textit{sklidíme průměrně 70 kg z jednoho stromu}\\
b &= 270 && \textit{závěrečný výpočet hodnoty } b
\end{aligned}$$

Průměrný výnos z jednoho stromu je dán funkcí

$$AP(q) = -\frac{1}{10}q + 270.$$

Pro celkový výnos $TP(q)$ z jednoho hektaru platí následující rovnosti.

$$\begin{aligned}
TP(q) &= \text{počet stromů} \times \text{výnos z jednoho stromu}\\
&= q \cdot AP(q)\\
&= q \cdot \left(-\frac{1}{10}q + 270\right)\\
&= -\frac{q^2}{10} + 270q
\end{aligned}$$

Nyní známe předpis, který vyjadřuje velikost celkového výnosu z jednoho hektaru v závislosti na hodnotě q. Vypočteme, pro jaký počet stromů na jednom hektaru nastane lokální maximum funkce $TP(q)$.

$$\begin{aligned}
TP'(q) &= \left(-\frac{q^2}{10} + 270q\right)'\\
&= -\frac{2q}{10} + 270\\
0 &= -\frac{2q}{10} + 270\\
q &= 1\,350
\end{aligned}$$

V bodě $q = 1350$ nastává lokální (a také globální) maximum funkce $TP(q)$. Pěstitel by měl zasadit o 650 jabloní méně, než je výchozí počet 2 000 stromů, tedy celkem 1 350 jabloní na hektar. Dále platí

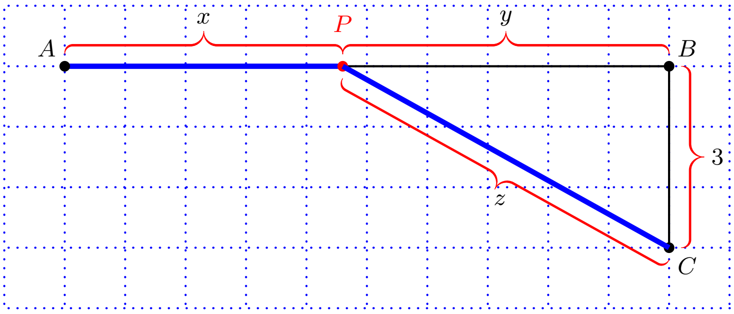
$$\begin{aligned}
AP(q) &= -\frac{1}{10}q + 270\\
AP(1\,350) &= -\frac{1}{10}1\,350 + 270\\
&= 135\\
TP(q) &= -\frac{q^2}{10} + 270q\\
TP(1\,350) &= -\frac{(1\,350)^2}{10} + 270 \cdot 1\,350\\
&= 182\,250.
\end{aligned}$$

Průměrný výnos z jednoho stromu bude 135 kg jablek a celkový výnos z hektaru potom bude 182 250 kg jablek.

Příklad 8.49

8.49. Město **B** je 10 km východně od města **A** a město **C** je 3 km jižně od **B**. Z **A** do **C** se má postavit dálnice. Cena při budování dálnice podél existující silnice z **A** do **B** je 400 milionů Kč na km, zatímco cena kdekoli jinde je 500 miliónů Kč na km. Kam by se měl umístit bod **P**, aby se minimalizovaly celkové náklady na výstavbu dálnice?

Řešení: Z Obrázku 8.23 je patrné, jak si zvolíme proměnné. Vzdálenost z města **A** do



Obrázek 8.23: Zobrazení situace k Příkladu 8.49

místa **P** označíme symbolem x, z bodu **P** do města **B** symbolem y a vzdálenost z místa **P** do města **C** označíme z. Jestliže vzdálenost měst **A** a **B** je 10 km, platí $x + y = 10$, tedy $x = 10-y$, resp. $y = 10-x$. Z Pythagorovy věty plynou pro vzdálenost z rovnosti

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(10-x)^2 + 3^2} \\ z &= \sqrt{y^2 + 3^2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že druhý vztah se zdá být jednodušší, vyjádříme si funkci stanovující celkové náklady TC na výstavbu dálnice pomocí proměnné y. Pro celkové náklady *TC* (v stamiliónech korun) platí vztahy

$$\begin{aligned} TC &= 4x + 5z \\ TC(y) &= 4(10-y) + 5\sqrt{y^2+9}. \end{aligned}$$

Naším úkolem je najít takovou hodnotu y z intervalu $y \in \langle 0, 10\rangle$, aby v něm funkce $TC(y)$ nabývala svou minimální hodnotu. Tento lokální extrém nalezneme pomocí nulových bodů první derivace funkce $TC(y)$.

$$\begin{aligned} TC'(y) &= \left[4(10-y) + 5\sqrt{y^2+9}\right]' \\ &= -4 + 5 \cdot \frac{2y}{2\cdot\sqrt{y^2+9}} && \text{\dots\ \textit{výpočet první derivace funkce}} \\ 0 &= -4 + 5 \cdot \frac{2y}{2\cdot\sqrt{y^2+9}} && \text{\dots\ \textit{hledáme nulové body funkce}} \\ 0 &= -4\sqrt{y^2+9} + 5y && \text{\dots\ \textit{vynásobení obou stran výrazem} } \sqrt{y^2+9} \\ 5y &= 4\sqrt{y^2+9} && \text{\dots\ \textit{algebraická úprava}} \\ 25y^2 &= 16(y^2+9) && \text{\dots\ \textit{umocnění obou stran rovnice}} \\ y^2 &= 16. && \text{\dots\ \textit{algebraická úprava}} \end{aligned}$$

Ze dvou kořenů $y_1 = -4$ a $y_2 = 4$ vyhovuje pouze druhý podmínce $0 \le y \le 10$. Pomocí druhé derivace funkce $TC(y)$ ověříme, zda v bodě $y = 4$ nastává minimum funkce $TC(y)$.

$$\begin{aligned} TC''(y) &= \left[-4 + 5 \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+9}}\right]' \\ &= \frac{5\sqrt{y^2+9} - \frac{5y^2}{\sqrt{y^2+9}}}{y^2+9} \\ &= \frac{45}{\sqrt{y^2+9} \cdot (y^2+9)} \end{aligned}$$

Je zřejmé, že pro každé y je $TC''(y) > 0$, tedy i pro $y = 4$, a v tomto bodě nastává minimum. Dopočítáme zbývající proměnné: $x = 6$ km a $z = 5$ km. Bod **P** proto bude vzdálen 6 km od města **A**.

$$\begin{aligned} TC(y) &= 4(10-y) + 5\sqrt{y^2+9} \\ TC(4) &= 4(10-4) + 5\sqrt{4^2+9} \\ &= 49 \quad (\textit{stamilionů korun}) \end{aligned}$$

Celkové náklady na vybudování dálnice budou za daných podmínek rovny 4,9 miliardám korun.

8.50. Automobilka vyrábí v jedné ze svých dílen potahy do nových aut. Výroba a distribuce potahů je, vzhledem k poptávce v průběhu roku, rovnoměrná. Látka potřebná k šití potahů je od dodavatele odebírána v balení po $200\,\mathrm{m}^2$ látky. Plánovaná spotřeba látky za rok činí $115\,200\,\mathrm{m}^2$. Nákupní cena jednoho balení je 750 Kč. Látka je objednávána pravidelně v určitém množství s tím, že s každou objednávkou souvisejí fixní náklady ve výši 1 200 Kč. Skladovací náklady jednoho balení za jeden rok činí 20 % z jeho nákupní ceny. Zjistěte, při jakém množství balení dovezeném při jedné dodávce budou celkové náklady související s doplňováním zásob nejmenší. **Příklad 8.50**

Řešení: Uvedený typ úlohy souvisí s tzv. problémem řízení zásob (*inventory control problem*). Abychom snížili celkové náklady na dopravu zásob (látky na potahy), bylo by možné dopravit látku na celý rok najednou, tj. v rámci jediné dodávky. Tím by nám ovšem vzrostly skladovací náklady. Bylo by možné postupovat obráceně a provádět objednávku potřebného množství látky každý den. Tím bychom snížili skladovací náklady, ovšem za cenu zvýšení nákladů na dopravu. Je zřejmé, že optimální řešení vedoucí k minimálním nákladům bude ležet někde mezi těmito extrémy.

Označme počet dovezených balení symbolem q. Funkce celkových nákladů se zřejmě bude skládat ze dvou částí. První bude vyjadřovat náklady spojené s dodávkou zboží a druhá část s jeho skladováním. Jako první vyjádříme velikost fixních nákladů souvisejících s dodávkou materiálu. Náklady na jednu zásilku činí 1 200 Kč. Protože během roku bude zapotřebí $\frac{115\,200}{200\,q}$ zásilek, budou náklady související s dodávkou látky vyjádřeny vztahem

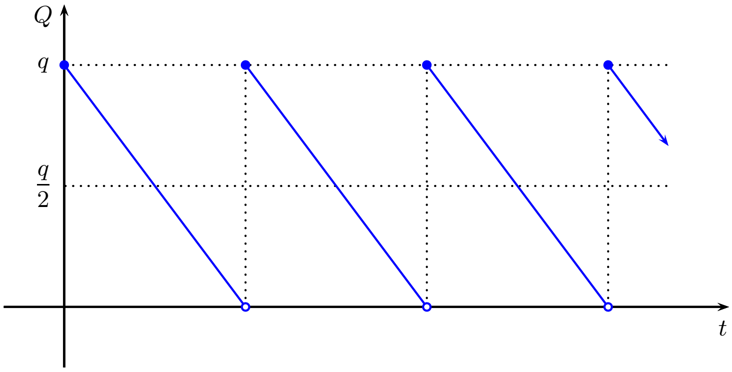
$$TC_1 = \frac{115\,200}{200\,q} \cdot 1\,200.$$

Nyní určíme náklady spojené se skladováním dovezené látky. Při rovnoměrné spotřebě materiálu je jeho průměrné množství ve skladu rovno hodnotě $q/2$, viz Obrázek 8.24. Náklady TC_2 spojené se skladováním budou činit 20 % z ceny průměrného množství zásob na skladě, tedy

$$TC_2 = 0,2 \cdot 750 \cdot \frac{q}{2}.$$

Celkové náklady budou součtem obou výše zmíněných funkcí.

$$\begin{aligned} TC(q) &= TC_1 + TC_2 \\ &= \frac{115\,200}{200\,q} \cdot 1\,200 + 0,2 \cdot 750 \cdot \frac{q}{2} \\ &= \frac{691\,200}{q} + 75\,q \end{aligned}$$



Obrázek 8.24: Vývoj množství zásob Q ve skladu v čase t

Nalezení minima této funkce je jednoduchá záležitost.

$$\begin{aligned} TC'(q) &= \left[\frac{691\,200}{q} + 75\,q\right]' \\ &= -\frac{691\,200}{q^2} + 75 \\ 0 &= -\frac{691\,200}{q^2} + 75 \\ q &= 96 \end{aligned}$$

Pomocí druhé derivace rozhodneme o typu případného extrému v bodě $q = 96$.

$$\begin{aligned} TC''(q) &= \left[-\frac{691\,200}{q^2} + 75\right]' \\ &= \frac{2 \cdot 691\,200}{q^3} \\ TC''(96) &= \frac{2 \cdot 691\,200}{96^3} > 0 \end{aligned}$$

Druhá derivace v bodě $q = 96$ je kladná, a proto v tomto bodě nastává minimum funkce celkových nákladů. Závěrem vypočteme, jak často bude nutno látku objednávat. Roční spotřeba činí $115\,200\,\mathrm{m}^2$, jedno balení obsahuje $200\,\mathrm{m}^2$. Během roku je tedy zapotřebí $115\,200/200 = 576$ balení. Jedna zásilka obsahuje 96 balení. Celkový počet dodávek za rok tak bude roven číslu $576/96 = 6$. Během roku se zásilka doručí šestkrát.

Automobilka bude mít za daných podmínek nejnižší celkové náklady na skladování tehdy, když každé dva měsíce objedná zásilku o velikosti 96 balení.

8.8 Cvičení

L´Hospitalovo pravidlo

V následujících úlohách vypočtěte zadané limity pomocí l´Hospitalova pravidla.

8.8.1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 + 3x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + 1}$

8.8.2. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$

8.8.3. $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{cotg} x}{\ln x}$

8.8.4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$

8.8.5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{1 - \sin x}$

8.8.6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\cos x - \mathrm{e}^x}$

8.8.7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin x}$

8.8.8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin x}$

8.8.9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}-2\sin x}{\cos 2x}$

8.8.10. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\, \mathrm{e}^{1/x^2}$

8.8.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{\sin x}$

8.8.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$

Asymptoty a tečny ke grafu funkce

V následujících úlohách nalezněte rovnice asymptot ke grafům zadaných funkcí.

8.8.13. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

8.8.14. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

8.8.15. $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$

8.8.16. $f(x)=\dfrac{5-3x}{x+2}$

8.8.17. $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{x}$

8.8.18. $f(x)=x\ \operatorname{arctg} x$

8.8.19. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$

8.8.20. $f(x)=3x+2\operatorname{arctg} x$

V následujících úlohách nalezněte rovnice tečen ke grafům zadaných funkcí v uvedených bodech P.

8.8.21. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}, P=[2,f(2)]$

8.8.22. $f(x)=x^2-9, P=[3,f(3)]$

8.8.23. $f(x)=\sqrt{4-x^2}, P=\left[\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

8.8.24. $f(x)=\sin x, P=\left[\frac{\pi}{3},f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

8.8.25. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}, P=[0,f(0)]$

8.8.26. $f(x)=x^3-12x, P=[1,f(1)]$

Intervaly monotonie funkce

V následujících úlohách vypočtěte, na kterých intervalech jsou zadané funkce rostoucí, resp. klesající.

8.8.27. $f(x)=4x-x^2$

8.8.28. $f(x)=2x^2-5x+7$

8.8.29. $f(x)=x^3-6x^2+5$

8.8.30. $f(x)=\dfrac{x^4}{9-x^2}$

8.8.31. $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$

8.8.32. $f(x)=\ln(1-x^2)$

8.8.33. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

8.8.34. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

8.8.35. $f(x)=x^3-12x^2-15$

8.8.36. $f(x)=3x^4-18x^-11$

Intervaly vypuklosti funkce

V následujících úlohách vypočtěte, na kterých intervalech jsou zadané funkce konvexní, resp. konkávní.

8.8.37. $f(x)=x^3-12x^2-15$

8.8.38. $f(x)=3x^4-18x^2-11$

8.8.39. $f(x)=\dfrac{1}{3+x^2}$

8.8.40. $f(x)=x^2+2\ln x$

8.8.41. $f(x)=\dfrac{x}{3+x^2}$

8.8.42. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{x}$

8.8.43. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

8.8.44. $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

8.8.45. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

8.8.46. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

8.8.47. $f(x) = x \ln x - x$

Lokální a globální extrémy funkce

V následujících úlohách nalezněte všechny lokální extrémy zadané funkce.

8.8.48. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

8.8.49. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

8.8.50. $f(x) = 3x - x^3$

8.8.51. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

8.8.52. $f(x) = \ln(1+x^2)$

8.8.53. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

8.8.54. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

8.8.55. $f(x) = 2x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$

V následujících úlohách vypočtěte globální extrémy funkce na zadaném intervalu.

8.8.56. $f(x) = x^2 - 6x, \quad x \in \langle 2, 5\rangle$

8.8.57. $f(x) = x^2 - 6x, \quad x \in (2, 5)$

8.8.58. $f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in \langle -3, 2\rangle$

8.8.59. $f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in \langle -3, 2)$

8.8.60. $f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in \langle -3, 3\rangle$

8.8.61. $f(x) = x^3 - 3x, \quad x \in \langle -3, 1\rangle$

Diferenciál funkce

V následujících úlohách vypočtěte diferenciály zadaných funkcí.

8.8.62. $f(x) = x^n$

8.8.63. $f(x) = x^3 - 6x + 2$

8.8.64. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

8.8.65. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

8.8.66. $f(x) = x - \sin x$

8.8.67. $s(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{g}t^2$

8.8.68. $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$

8.8.69. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

8.8.70. Pomocí diferenciálu odhadněte přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{101}$.

8.8.71. Pomocí diferenciálu odhadněte přibližnou hodnotu výrazu $\sin(29\,^\circ)$.

Celkové a mezní veličiny

8.8.72. Funkce celkových nákladů je dána vztahem $TC(q) = 200q^2 + 50q + 500$. Vypočtěte

a) celkové náklady na výrobu prvních 50 kusů výrobku,

b) průměrné náklady na výrobu jednoho kusu při výrobě 50 výrobků,

c) mezní náklady na výrobu dvacátého a padesátého výrobku.

8.8.73. Celkový příjem firmy je dán vztahem $TR(q) = 3\,600q - 5q^2$. Vypočtěte

a) vztah pro mezní příjem $TR'(q)$,

b) hodnotu $TR'(100)$,

c) přesnou hodnotu o kterou se zvýšil příjem, jestliže se počet vyrobených kusů zvýšil z 99 na 100.

8.8.74. Cena výrobku byla stanovena pomocí funkce poptávky $p = 5\,000 - \dfrac{5q}{20}$. Nalezněte předpis funkce vyjadřující mezní příjem $TR'(q)$ a předpis funkce vyjadřující průměrný příjem $AR(q)$.

8.8.75. Je dána funkce poptávky $q = f(p) = 5\,400 - 2p^2$. Vypočtěte

a) pro jaké hodnoty p je poptávka elastická, resp. neelastická,

b) jaký efekt přinese zvýšení ceny o $10\,\%$ při ceně $p = 15$,

c) jaký efekt přinese zvýšení ceny o $10\,\%$ při ceně $p = 35$.

8.8.76. Je dána funkce poptávky ve tvaru $p = 1\,000 - \dfrac{q}{10}$, kde q je počet prodaných výrobků měsíčně při ceně p. Zjistěte, při jaké prodejní ceně se bude maximalizovat celkový příjem z prodeje výrobku a kolik kusů výrobku se přitom měsíčně prodá.

8.8.77. Firma vyrábí a prodává LED televizory. Marketingové oddělení společnosti popsalo funkci poptávky vztahem $p = 12\,000 - 2q$, kde q je počet prodaných televizorů měsíčně při ceně p. Funkce celkových nákladů je dána vztahem $TC(q) = 7\,200 + 1\,200q$. Vypočtěte cenu, za kterou je nutné prodávat uvedený televizor, aby firma dosáhla

a) nejvyššího možného celkového příjmu,

b) nejvyššího možného zisku.

8.8.78. Celkový příjem firmy je popsán vzorcem $TR(q) = 1\,200q - \dfrac{7q^2}{100}$, celkové náklady firmy jsou dány vztahem $TC(q) = 0,003q^2 + 200q + 40\,000$. Vypočtěte počet q výrobků, při kterém firma dosáhne na nejvyšší možný zisk.

Výsledky cvičení

8.8.1 -11 **8.8.2** $\frac{2}{5}$ **8.8.3** $-\infty$ **8.8.4** -1 **8.8.5** 1 **8.8.6** 0 **8.8.7** 1 **8.8.8** 0 **8.8.9** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **8.8.10** ∞ **8.8.11** $\ln a$ **8.8.12** 2 **8.8.13** svislé asymptoty $x = -1, x = 1$, vodorovná asymptota $y = 0$ **8.8.14** vodorovná asymptota $y = 0$ **8.8.15** svislá asymptota $x = 0$, vodorovná asymptota $y = 0$ **8.8.16** svislá asymptota $x = -2$, vodorovná asymptota $y = -3$ **8.8.17** šikmá asymptota $y = x$ **8.8.18** šikmé asymptoty $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ **8.8.19** svislá asymptota $x = 1$, šikmá asymptota $y = 2x + 1$ **8.8.20** šikmé asymptoty $y = 3x - \pi$, $y = 3x + \pi$ **8.8.21** $y = -\frac{4}{9}x + \frac{11}{9}$ **8.8.22** $y = 6x - 18$ **8.8.23** $-\frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{2}{\sqrt{15}}$ **8.8.24** $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{6}$ **8.8.25** $y = x$ **8.8.26** $y = -8x - 3$ **8.8.27** rostoucí na $(\infty, 2)$, klesající na $(2, \infty)$ **8.8.28** rostoucí na $(\frac{3}{2}, \infty)$, klesající na $(-\infty, \frac{3}{2})$ **8.8.29** rostoucí na $(-\infty, 0)$, $(4, \infty)$, klesající na $(0, 4)$ **8.8.30** rostoucí na $(-\infty, -3\sqrt{2})$, $(0, 3)$, $(3, 3\sqrt{2})$, klesající na $(-3\sqrt{2}, -3)$, $(-3, 0)$, $(3\sqrt{2}, \infty)$ **8.8.31** rostoucí na $(-\infty, 2)$, $(8, \infty)$, klesající na $(2, \infty)$ **8.8.32** rostoucí na $(-1, 0)$, klesající na $(0, 1)$ **8.8.33** rostoucí na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, klesající na $(-2, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2)$ **8.8.34** rostoucí na $(1, \infty)$, klesající na $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ **8.8.35** rostoucí na $(-\infty, 0)$, $(8, \infty)$, klesající na $(0, 8)$ **8.8.36** klesající na $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$, rostoucí na $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$ **8.8.37** konkávní na $(-\infty, 4)$, konvexní na $(4, \infty)$ **8.8.38** konvexní na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, konkávní na $(-1, 1)$ **8.8.39** konvexní na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, konkávní na $(-1, 1)$ **8.8.40** konkávní na $(0, 1)$, konvexní na $(1, \infty)$ **8.8.41** konkávní na $(-\infty, -3)$, $(0, 3)$, konvexní na $(-3, 0)$, $(3, \infty)$ **8.8.42** konkávní na $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, konvexní na $(-1, 0)$, $(1, \infty)$ **8.8.43** konkávní na $(-\infty, 0)$, konvexní na $(0, \infty)$ **8.8.44** konkávní na $(-\infty, 0)$, konvexní na $(0, \infty)$ **8.8.45** konkávní na $(-\infty, -2)$, konvexní na $(-2, 1)$, $(1, \infty)$ **8.8.46** konkávní na $(-\infty, -1)$, konvexní na $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ **8.8.47** konvexní na $(0, \infty)$ **8.8.48** lokální maximum v $x = -1$, lokální minimum v $x = 1$ **8.8.49** lokální minimum v $x = 0$ **8.8.50** lokální minimum v $x = -1$, lokální maximum v $x = 1$ **8.8.51** lokální maximum v $x = 0$ **8.8.52** lokální minimum v $x = 0$ **8.8.53** nemá lokální extrémy **8.8.54** lokální maximum v $x = \mathrm{e}$ **8.8.55** lokální minimum v $x = -1$, lokální maximum v $x = 1$ **8.8.56** globální minimum v $x = 3$, globální maximum v $x = 5$ **8.8.57** globální minimum v $x = 3$, globální maximum nemá **8.8.58** globální minimum v $x = -3$, globální maximum v $x = -1$ a $x = 2$ **8.8.59** globální minimum v $x = -3$, globální maximum v $x = -1$ **8.8.60** globální minimum v $x = -3$, globální maximum v $x = 3$ **8.8.61** globální minimum v $x = -3$, globální maximum v $x = -1$ **8.8.62** $\mathrm{d}y = n\,x^{n-1}\,\mathrm{d}x$ **8.8.63** $\mathrm{d}y = (3x^2 - 6)\,\mathrm{d}x$ **8.8.64** $\mathrm{d}y = -\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$ **8.8.65** $\mathrm{d}y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ **8.8.66** $\mathrm{d}y = (1-\cos x)\,\mathrm{d}x$ **8.8.67** $\mathrm{d}s = gt\mathrm{d}t$ **8.8.68** $\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x(x+1)\,\mathrm{d}x$ **8.8.69** $\mathrm{d}y = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ **8.8.70** $\sqrt{101} \doteq 10,05$ **8.8.71** $\sin(29\,^\circ) \doteq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$ **8.8.72** a) $503\,000\,$Kč b) $10\,060\,$Kč c) $8\,050\,$Kč, $20\,050\,$Kč **8.8.73** a) $R'(q) = 3\,600 - 10q$ b) $2\,600\,$Kč c) $2\,595\,$Kč **8.8.74** $R'(q) = 5\,000 - q/2$, $AR(q) = 5\,000 - 5q/20$ **8.8.75** a) elastická pro $p \in (0,\,30)$, neelastická pro $p \in (30,\,52)$ b) pokles poptávaného množství o cca $1,8\,\%$ c) pokles poptávaného množství o cca $16,6\,\%$ **8.8.76** $p = 500\,$Kč, $q = 5\,000\,$ks **8.8.77** a) $p = 6\,600\,$Kč b) $p = 6\,000\,$Kč **8.8.78** $5\,000\,$kusů

Kapitola 9

Neurčitý integrál

9.1 Úvod

V předchozích kapitolách jsme se věnovali tzv. diferenciálnímu počtu. V následujících kapitolách se seznámíme s druhou významnou částí matematické analýzy - integrálním počtem. V této části knihy uvedeme dva základní druhy integrálů - *neurčitý integrál* a *určitý integrál*. Pomocí *Newton-Leibnizovy formule* ukážeme jejich vzájemnou souvislost. V jednotlivých částech kapitoly si také ukážeme možnosti využití obou pojmů v aplikačních úlohách.

Základy ke zrodu integrálního počtu položili v 17. století anglický matematik a fyzik ISAAC NEWTON (1643 - 1727) a německý učenec GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646 - 1716). Oba ve svých přístupech dokázali nezávisle na sobě sjednotit dosavadní roztříštěné poznatky např. o kvadraturách (vyjadřování velikosti obsahů) různých geometrických obrazců (kružnice, paraboly, elipsy, atd.) a ukázat na souvislost kvadratur s hledáním tečny, se kterým jsme se setkali v předchozích kapitolách o diferenciálním počtu.

9.2 Neurčitý integrál

Úvodním pojmem integrálního počtu je tzv. *primitivní funkce*. Hledání (výpočet) primitivní funkce lze chápat jako inverzní operaci k derivování. S dvojicemi vzájemně inverzních operací jsme se již setkali. Vzpomeňte například na sčítání a odčítání, násobení a dělení, mocnění a odmocňování. Při výpočtu primitivní funkce hledáme takovou funkci, která je po následném zderivování rovna původně zadané funkci.

Mějme například dánu funkci $f(x) = x^3$. Tato funkce je primitivní funkcí k funkci $g(x) = 3x^2$, neboť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $\left(x^3\right)' = 3x^2$, tedy $f'(x) = g(x)$.

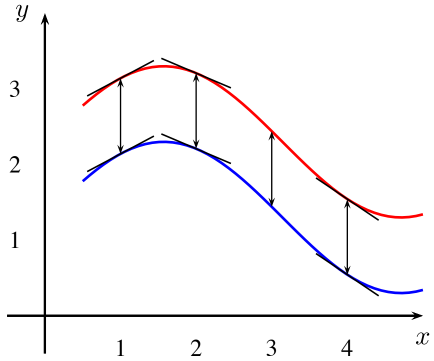
Definice 9.2.1. Nechť f je funkce definovaná pro všechna $x \in (a,\, b)$. Pak funkci F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,\, b)$, nazýváme *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu $(a,\, b)$.

Podle uvedené definice snadno zjistíme, že k funkci $f(x) = 3x^2$ je primitivní funkcí také každá z následujících funkcí

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 + 5, && \textit{neboť } \left(x^3+5\right)' = 3x^2 \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R},\\ F(x) &= x^3 - 11, && \textit{neboť } \left(x^3-11\right)' = 3x^2 \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R},\\ F(x) &= x^3 + \sqrt{5}, && \textit{neboť } \left(x^3+\sqrt{5}\right)' = 3x^2 \textit{ pro všechna } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Z uvedeného výčtu je zřejmé, že každá funkce ve tvaru $F(x) = x^3 + C$, kde $C \in \mathbb{R}$, je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na množině $\mathbb{R}$. Podobné tvrzení platí i pro primitivní funkce k dalším funkcím. Je patrné, že existuje-li k zadané funkci $f(x)$ její primitivní funkce $F(x)$ na intervalu I, pak je takových funkcí nekonečně mnoho a všechny lze uvést ve tvaru $F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Mohou se primitivní funkce k téže funkci lišit ještě jiným způsobem než pouze o konstantu? Odpověď na tuto otázku je záporná. Platí-li $F'(x) = G'(x)$ pro všechna $x \in I$, potom funkce $F(x)$ a $G(x)$ musí mít v daném bodě x stejnou směrnici tečny. Jejich grafy proto mají stejný sklon a musí být „rovnoběžné". Jejich vzdálenost pro



Obrázek 9.1: Konstantní vzdálenost mezi grafy primitivních funkcí

různá x je proto konstantní a musí platit $F(x) = G(x) + C$ pro všechna $x \in I$, viz Obrázek 9.1.

Definice 9.2.2. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem funkce f* a značíme ji symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Výpočet neurčitého integrálu je operace, kterou nazýváme integrace (integrování). Funkci f v Definici 9.2.2 nazýváme integrand. Znak $\mathrm{d}x$ uvedený za integrandem označuje proměnnou, vzhledem ke které integrace probíhá. Výraz $\mathrm{d}x$ v Definici 9.2.2 tedy znamená, že integrujeme vzhledem k proměnné x, výraz $\mathrm{d}t$ znamená, že integrujeme podle proměnné t atd. Integrováním podle proměnné t přitom rozumíme hledání takové primitivní funkce, která je po zderivování podle proměnné t rovna původní integrované funkci.

Příklad 9.1

9.1. Nalezněte (vypočtěte) neurčité integrály $\int 3x^2t\,\mathrm{d}x$ a $\int 3x^2t\,\mathrm{d}t$.

Řešení: V prvním zadaném integrálu je integrační proměnnou x. Proměnnou t potom chápeme jako konstantu a integrujeme ji jako konstantu. Potom je

$$\int 3x^2t\,\mathrm{d}x = x^3t + C, \quad \text{neboť} \quad \frac{\mathrm{d}\left(x^3t + C\right)}{\mathrm{d}x} = 3x^2t.$$

V druhém integrálu považujeme za integrační proměnnou t. Proměnná x je potom konstanta a platí

$$\int 3x^2t\,\mathrm{d}t = 3x^2\frac{t^2}{2} + C, \quad \text{neboť} \quad \frac{\mathrm{d}\left(3x^2\frac{t^2}{2} + C\right)}{\mathrm{d}t} = 3x^2t.$$

Následující věta zobecňuje Příklad 9.1 a také poznámku vyslovenou v odstavci před Definicí 9.2.2.

Věta 9.2.3. *Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu I, potom je*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad x \in I,\ C \in \mathbb{R},$$

kde číslo C nazýváme integrační konstanta.

Vzorce pro derivování elementárních funkcí (resp. jejich modifikace) dávají důležité základní vzorce pro výpočet neurčitých integrálů. Vztahy v následujících vzorcích často nazýváme *tabulkové integrály*. Nejsou-li v následujících vzorcích uvedeny podmínky pro proměnnou x nebo pro příslušné konstanty, pak tyto vzorce platí bez omezení.[1]) Konstanta k ve vzorcích (9.9) a (9.10) představuje libovolné celé číslo, tedy $k \in \mathbb{Z}$.

Vybrané tabulkové integrály

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C \tag{9.1}$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C \tag{9.2}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \ldots\ n \neq -1 \tag{9.3}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \qquad \ldots\ x \neq 0 \tag{9.4}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \tag{9.5}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = a^x \frac{1}{\ln a} + C, \qquad \ldots\ a > 0,\ a \neq 1 \tag{9.6}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{9.7}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \tag{9.8}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \ldots\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \tag{9.9}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \qquad \ldots\ x \neq k\pi \tag{9.10}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2, \qquad \ldots\ |x| < 1. \tag{9.11}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)}} = \ln|x + \sqrt{(x^2-1)}| + C, \qquad \ldots\ |x| > 1. \tag{9.12}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)}} = \ln|x + \sqrt{(x^2+1)}| + C \tag{9.13}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2 \tag{9.14}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \qquad \ldots\ |x| \neq 1 \tag{9.15}$$

Uvedený seznam je možné dodatečně rozšiřovat podle dalších, nám již známých, integrálů. Naše znalosti potřebné k integrování jsou zatím značně omezené. Následující věty nám umožní rozšířit množství integrovatelných funkcí o ty, které jsou lineární kombinací funkcí uvedených v předchozím seznamu.

Věta 9.2.4. *Nechť na otevřeném intervalu I existují neurčité integrály funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Potom na intervalu I existuje i neurčitý integrál funkce $f(x) + g(x)$ a platí*

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1]) Poznamenejme jednu výjimku oproti této domluvě. Vzorec (9.3) platí na každém otevřeném intervalu I, na kterém je funkce x^n definovaná a spojitá.

Věta 9.2.4 nám umožňuje integrovat funkce, které vznikly součtem funkcí uvedených v přehledu tabulkových integrálů.

Příklad 9.2

9.2. Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^3 + x^2 \, \mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand vznikl součtem funkcí $f(x) = x^3$ a $g(x) = x^2$. Podle Věty 9.2.4 platí

$$\begin{aligned} \int x^3 + x^2 \, \mathrm{d}x &= \int x^3 \, \mathrm{d}x + \int x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) + \left(\frac{x^3}{3} + C_2\right) \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

V právě vypočteném příkladu jsme použili vzorec (9.3), podle kterého je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^3$ funkce $F(x) = \frac{x^4}{4}$ a k funkci $g(x) = x^2$ je primitivní funkcí funkce $G(x) = \frac{x^3}{3}$. K vytvoření neurčitých integrálů z obou primitivních funkcí je nutné ke každému z nich přidat integrační konstantu (v příkladu konstanty C_1 a C_2). Jejich součtem je však opět jistá konstanta C. Proto se v takových případech používá pouze jediná konstanta C. V následujících příkladech proto budeme místo „průběžných" konstant psát pouze výslednou konstantu C a to na závěr výpočtu neurčitého integrálu.

Věta 9.2.5. *Nechť na otevřeném intervalu I existuje neurčitý integrál funkce $f(x)$. Potom na intervalu I existuje i neurčitý integrál funkce $c \cdot f(x)$ a platí*

$$\int \big(c \cdot f(x)\big) \, \mathrm{d}x = c \cdot \int f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Uvedená věta popisuje jak integrovat funkce ve tvaru součinu jisté konstanty c a funkce f. Konstantu c lze „vytknout" před neurčitý integrál, vypočítat neurčitý integrál samotné funkce f a ten následně vynásobit konstantou c, viz následující příklad.

Příklad 9.3

9.3. Vypočteme neurčitý integrál $\int 4x^3 \, \mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand je tvořen součinem konstanty $c = 4$ a funkce $f(x) = x^3$. Podle Věty 9.2.5 je

$$\begin{aligned} \int 4x^3 \, \mathrm{d}x &= 4 \cdot \int x^3 \, \mathrm{d}x \\ &= 4 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + C\right) \\ &= x^4 + 4C \\ &= x^4 + K. \end{aligned}$$

V příkladu jsme využili fakt, že součinem dvou konstant je opět konstanta. Proto i v tomto případě budeme psát pouze výslednou konstantu C a to na závěr výpočtu neurčitého integrálu[2]).

Věty 9.2.4 a 9.2.5 lze shrnout do jediné, často používané věty. Následující věta rozšiřuje znění obou vět na integrand ve formě součtu konečného počtu funkcí vynásobených jistými konstantami.

[2]) Pro lepší pochopení práce s integrační konstantou je vhodné si uvědomit, že neurčitý integrál je dle definice množina funkcí, ve kterých konstanta C postupně zastupuje všechna reálná čísla. Součtem, resp. součinem dvou reálných čísel je opět reálné číslo, proto je výsledek zmíněných operací jistě uveden i ve tvaru jediné konstanty.

Věta 9.2.6. *Jsou-li $c_1, \ldots, c_n$ libovolné reálné konstanty a existují-li na otevřeném intervalu I neurčité integrály funkcí $f_1, \ldots, f_n$, potom na intervalu I existuje i neurčitý integrál funkce $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ a platí*

$$\int (c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)\,\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

9.2.1 Přímá integrace

K výpočtu neurčitých integrálů používáme nejrůznější početní metody. Zřejmě nejjednodušším způsobem výpočtu je použití metody přímé integrace. Při přímé integraci hledáme vyjádření neurčitých integrálů pouze pomocí algebraických úprav integrandů, resp. Věty 9.2.6 a vzorců pro tabulkové integrály (9.1) až (9.15).

Příklad 9.4

9.4. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\left(5\sqrt{x^3\sqrt{x}} - 10\cos x + \frac{7}{x}\right)\mathrm{d}x.$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int\left(5\sqrt{x^3\sqrt{x}} - 10\cos x + \frac{7}{x}\right)\mathrm{d}x &= 5\int\sqrt{x^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x - 10\int\sin x\,\mathrm{d}x + \int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= 5\int x^{7/4}\,\mathrm{d}x - 10\int\sin x\,\mathrm{d}x + 7\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= 5\cdot\frac{x^{11/4}}{11/4} - 10\cdot(-\cos x) + 7\cdot\ln x\\
&= \frac{20\cdot\sqrt[4]{x^{11}}}{11} + 10\cos x + 7\ln x + C
\end{aligned}$$

Integrand je funkce, která je definovaná na otevřeném intervalu $D(f) = (0, \infty)$. Proto je možné předpokládat, že ve výsledku uvažujeme pouze $x > 0$ a potom je možné místo výrazu $\ln|x|$, který bychom měli správně použít dle vzorce (9.4), použít tvar bez absolutní hodnoty, tj. „pouze“ člen $\ln x$.

Následujících patnáct cvičení slouží k procvičení techniky výpočtu neurčitých integrálů pomocí metody přímé integrace. Nalezněte neurčité integrály zadaných funkcí a snažte se určit, na jaké množině k zadané funkci daný neurčitý integrál existuje. Výsledky cvičení spolu s postupem řešení jsou uvedeny za těmito příklady.

9.2.1. $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$

9.2.2. $\displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}t$

9.2.3. $\displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}x$

9.2.4. $\displaystyle\int 7x^5\,\mathrm{d}x$

9.2.5. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

9.2.6. $\displaystyle\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

9.2.7. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

9.2.8. $\displaystyle\int\frac{3\,\mathrm{d}x}{\sqrt[7]{x^4}}$

9.2.9. $\displaystyle\int 6x^2 + 5x^4\,\mathrm{d}x$

9.2.10. $\displaystyle\int\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x$

9.2.11. $\displaystyle\int 5\sin x - 2\cdot 5^x + 3x\,\mathrm{d}x$

9.2.12. $\displaystyle\int\frac{2^x + 3\cdot 8^x}{4^x}\,\mathrm{d}x$

9.2.13. $\displaystyle\int\sqrt[4]{x^5\cdot\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

9.2.14. $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

9.2.15. $\displaystyle\int\mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}x$

Následuje řešení zadaných úloh. V některých místech je připojena poznámka, která má pomoci pochopit použitý postup. Pokud v některých příkladech nejsou uvedeny žádné omezující podmínky pro integrační proměnnou, potom předpokládáme, že funkce má neurčitý integrál na množině $\mathbb{R}$.

Řešení úloh

9.2.1 $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$

9.2.2 V tomto případě jsme proměnnou veličinu označili písmenem t. Nic jiného se oproti předchozímu příkladu nezměnilo. Proto je $\displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C.$

9.2.3 V tomto případě integrujeme podle proměnné x. Výraz t^2 představuje konstantu a je $\displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}x = t^2\int \mathrm{d}x = t^2x + C.$

9.2.4 $\displaystyle\int 7x^5\,\mathrm{d}x = 7\int x^5\,\mathrm{d}x = 7\cdot\frac{x^6}{6} = \frac{7x^6}{6} + C.$

9.2.5 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C.$ Uvedený výsledek je neurčitým integrálem na jakémkoliv otevřeném intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$.

9.2.6 $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C.$ Platí pro $x \in (0,\,\infty)$.

9.2.7 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C.$ Platí pro $x \in (0,\,\infty)$.

9.2.8 $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{\sqrt[7]{x^4}} = 3\int x^{-4/7}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{x^{3/7}}{\frac{3}{7}} = 7\sqrt[7]{x^3} + C.$ Uvedený výsledek je neurčitým integrálem na jakémkoliv otevřeném intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$.

9.2.9 Podle Věty 9.2.6 platí

$$\int 6x^2 + 5x^4\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\,\mathrm{d}x + 5\int x^4\,\mathrm{d}x = 6\cdot\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^5}{5} = 2x^3 + x^5 + C.$$

9.2.10 Podle Věty 9.2.6 platí

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x &= 5\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}x\\ &= 5\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + 3\int x^{-2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}x\\ &= 5\ln|x| + 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\\ &= 5\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{x^2}{8} + C.\end{aligned}$$

Uvedený výsledek je neurčitým integrálem na jakémkoliv otevřeném intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$.

V následujících úlohách již nebudeme zdůrazňovat použití Věty 9.2.6, i když tato věta byla třeba při výpočtu použita.

9.2.11

$$\begin{aligned}\int 5\sin x - 2\cdot 5^x + 3x\,\mathrm{d}x = 5\int\sin x\,\mathrm{d}x - 2\int 5^x\,\mathrm{d}x + 3\int x\,\mathrm{d}x =\\ = -5\cos x - 2\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + \frac{3x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

9.2.12 Integrand nejprve upravíme na „integrovatelné“ funkce. Je

$$\frac{2^x + 3 \cdot 8^x}{4^x} = \frac{2^x}{4^x} + 3 \cdot \frac{8^x}{4^x} = \left(\frac{2}{4}\right)^x + 3\left(\frac{8}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3 \cdot 2^x.$$

Potom je

$$\int \frac{2^x + 3 \cdot 8^x}{4^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x + 3 \cdot \int 2^x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2}.$$

Ze vzorců pro práci s logaritmy plyne úprava

$$\ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2.$$

Potom je

$$\int \frac{2^x + 3 \cdot 8^x}{4^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{-\ln 2} + \frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} = \frac{3 \cdot 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2} + C.$$

9.2.13 S využitím rovností $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, resp. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ nejprve upravíme integrand do tvaru $f(x) = x^n$.

$$\sqrt[4]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x}} = \left(x^5 \cdot x^{1/3}\right)^{1/4} = \left(x^{(15/3)+(1/3)}\right)^{1/4} = x^{(16/3)\cdot(1/4)} = x^{4/3}$$

Potom platí

$$\int \sqrt[4]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{4/3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} = \frac{3x^{6/3} \cdot x^{1/3}}{7} = \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} + C.$$

Uvedený výsledek je neurčitým integrálem k zadané funkci pro $x \in (0,\ \infty)$.

9.2.14 Integrand upravíme níže uvedeným způsobem. Použijeme přitom „častý trik“ přičtení nuly, tj. přičtení a odečtení téhož čísla. Taková úprava nezmění zadání příkladu a přitom nám umožní převést integrand do jiného, vhodnějšího tvaru pro integraci.

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x^2+1} &= \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2+1} = \frac{x^4 - 1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

Proto je

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

9.2.15 Při výpočtu použijeme goniometrické vzorce

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

S jejich pomocí dostaneme

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Potom je

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C$$

pro každý interval, který neobsahuje číslo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

9.2.2 Substituční metoda

Množství funkcí, které lze integrovat metodou přímé integrace, je bohužel omezené. V následující kapitole si ukážeme metodu, kterou naše schopnosti integrace rozšíříme. Jedná se o takzvanou substituční metodu.

Tato metoda vychází z věty o derivaci složené funkce, viz Věta 7.2.3 na straně 354. Připomeňme si tuto větu krátkým příkladem.

Příklad 9.5

9.5. Mějme funkci $y = f(g(x)) = \left(x^2 - 4\right)^5$, která je složena z vnější funkce $f(x) = x^5$ a vnitřní funkce $g(x) = x^2 - 4$. Její derivaci lze pojmout tak, že vnitřní funkci $g(x)$ označíme symbolem t. Je tedy $t = x^2 - 4$ a $y = f(t) = t^5$. Podle vzorce 7.12 na straně 355 dostaneme

$$\begin{aligned} y' &= f'(t) \cdot t' \\ &= \left(t^5\right)' \cdot t' \\ &= 5t^4 \cdot \left(x^2 - 4\right)' \\ &= 5\left(x^2 - 4\right)^4 \cdot 2x. \end{aligned}$$

Funkce $f(t)$ je přitom primitivní funkcí k funkci $f'(t)$. Analogicky dostaneme, že pokud je $F(t)$ primitivní funkcí k funkci $f(t)$, potom také platí $\left[F(t)\right]' = f(t) \cdot t'$, tedy $\left[F(g(x))\right]' = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Z tohoto poznatku vychází následující věta, která je základem substituční metody pro výpočet neurčitého integrálu.

Věta 9.2.7. *Nechť funkce $f(t)$ je spojitá v intervalu (a, b). Nechť funkce $\varphi(x)$ má v intervalu (α, β) derivaci $\varphi'(x)$ a pro všechna $x \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi(x) \in (a, b)$. Potom v intervalu (α, β) existuje integrál na pravé straně rovnice (9.16) a rovnost*

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.16}$$

platí, dosadíme-li do integrálu vlevo $\varphi(x)$ místo t.

Formální použití Věty 9.2.7 je snadné. Obtíže většinou působí pouze nalezení správné substituce $t = \varphi(x)$. Výpočet potom probíhá formálně tak, že ve vzorci (9.16) dosadíme za t podle rovnosti

$$t = \varphi(x) \tag{9.17}$$

a za symbol $\mathrm{d}t$ podle rovnosti

$$\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.18}$$

Vzorec (9.16) lze použít dvěma způsoby. Jestliže máme za úkol vypočítat neurčitý integrál ve tvaru $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ a známe primitivní funkci $F(t)$ k funkci $f(t)$, potom s využitím rovnosti (9.17) postupujeme podle schématu

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \varphi(x) = & t \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(\varphi(x)). \tag{9.19}$$

Výraz mezi svislými závorkami představuje mezivýpočet, kterým přejdeme z vyjádření používajícím proměnnou x k zápisu s proměnnou t. Tento popis přechodu mezi proměnnými budeme používat i v následujících řešených úlohách.

Druhý způsob použití vzorce (9.16) spočívá ve výpočtu integrálu ve tvaru $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ pomocí integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, který je za jistých okolností snazší k výpočtu. Je-li mezi proměnnými x a t vztah (9.17) a funkce $\varphi(x)$ je monotónní na intervalu (α, β), existuje k ní na tomto intervalu inverzní funkce, kterou označíme $\psi(t)$, a platí $x = \psi(t)$, resp. $\mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Pokud jsou splněny požadavky Věty 9.2.7, lze v některých případech použít oba druhy substituce. Nejprve položíme $\varphi(x) = t$ a potom $t = \psi(s)$. Tím vlastně dostaneme substituci $\varphi(x) = t = \psi(s)$. Přitom platí „převodní“ vztah

$$\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t = \psi'(s)\mathrm{d}s.$$

V následujících příkladech si ukážeme použití substituční metody při řešení konkrétních úloh.

9.6. Vypočtěte integrál **Příklad 9.6**

$$\int (x^2+5)^3\, 2x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Funkce $f(t) = t^3$ je spojitá na množině $\mathbb{R}$. Pro $x \in \mathbb{R}$ je $(x^2+5)' = 2x$. Funkce $\varphi(x) = x^2+5$ má tedy derivaci $\varphi'(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a zobrazuje tuto množinu do $\mathbb{R}$. Potom podle Věty 9.2.7 dostaneme dosazením do schématu (9.19) rovnosti

$$\int (x^2+5)^3\, 2x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} x^2+5 = & t \\ 2x\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} = \frac{(x^2+5)^4}{4} + C.$$

Rovnost $\int (x^2+5)^3\, 2x \, \mathrm{d}x = \frac{(x^2+5)^4}{4} + C$ platí na množině (otevřeném intervalu) $\mathbb{R}$.

9.7. Vypočtěte integrál **Příklad 9.7**

$$\int \sqrt{x+10}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand je definován v intervalu $(-10, \infty)$ a na této množině je spojitou funkcí. Na množině $(-10, \infty)$ neurčitý integrál existuje a v tomto intervalu jej také vypočteme. Položíme $f(t) = \sqrt{t}$ a $\varphi(x) = x + 10$. Potom je $\varphi'(x) = (x+10)' = 1$ a platí

$$\int \sqrt{x+10}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} x+10 = & t \\ \mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\, \mathrm{d}t = \int t^{1/2}\, \mathrm{d}t = \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{(x+10)^3}}{3} + C.$$

9.8. Vypočtěte integrál **Příklad 9.8**

$$\int \frac{1}{9+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand je definován na množině $\mathbb{R}$ a je na této množině spojitý. Na této množině lze proto vypočítat i příslušný neurčitý integrál. Využijeme přitom druhý způsob použití substituční metody, tj. substituci ve tvaru $x = \psi(t)$. Integrand upravíme do podoby, kdy bude možné využít vzorec (9.14). Substituci volíme $x = 3t$, neboť potom je $x^2 = 9t^2$ a výraz $9 + x^2$ přejde do tvaru $9 + 9t^2 = 9(1+t^2)$.

$$\int \frac{1}{9+x^2}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} x = & 3t \\ \mathrm{d}x = & 3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{9+9t^2} 3\, \mathrm{d}t = \int \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Poznamenejme, že při zpětném dosazení, ve kterém se „vracíme“ k proměnné x, odvodíme z rovnosti $x = 3t$ vztah $t = x/3$.

9.9. Vypočtěte integrál **Příklad 9.9**

$$\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand je definován na intervalu $I = (0, \infty)$ a na této množině neurčitý integrál nalezneme. Integrand je možné vyjádřit ve tvaru

$$\frac{1+\ln^2 x}{x} = (1+\ln^2 x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Víme, že derivací funkce $y = \ln x$ je $y' = \frac{1}{x}$. Proto položíme $t = \ln x$. Potom je

$$\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\, \mathrm{d}x = \int (1+\ln^2 x) \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \ln x = & t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int 1 + t^2\, \mathrm{d}t$$
$$= t + \frac{t^3}{3} = \ln x + \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Integrand ve tvaru $\varphi'(x)/\varphi(x)$. V následujících úlohách se zaměříme na důležitý typ neurčitých integrálů. Jsou to integrály, ve kterých lze integrand buď přímo, nebo po úpravě převést na tvar zlomku, kde čitatel je derivací jmenovatele. V takovém případě lze potom analogicky ke schématu (9.19) psát

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\varphi(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \varphi(x) = & t \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| \\ = \ln|\varphi(x)| + C. \tag{9.20}$$

Při rozeznání takového typu neurčitého integrálu je možné výpočet zkrátit a použít rovnost prvního a posledního výrazu ve vzorci (9.20).

Příklad 9.10

9.10. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand je funkce definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$. Z rovnosti $\left(x^2+1\right)' = 2x$ plyne, že integrand má podobu zlomku, ve kterém je čitatel roven derivaci jmenovatele pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Je tedy

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\varphi(x)| = \ln|x^2+1| = \ln(x^2+1) + C.$$

Poznamenejme, že výraz x^2+1 je kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$, což vysvětluje použití rovnosti $|x^2+1| = x^2+1$, neboť pro každé $A > 0$ je $|A| = A$.

V některých případech se setkáme s integrandy ve tvaru zlomku, kde v čitateli není přímo funkce odpovídající derivaci jmenovatele, ale po jisté úpravě (která nezmění integrand v jinou funkci) lze tohoto stavu dosáhnout, viz následující příklad.

Příklad 9.11

9.11. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3x}{5x^2-20}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Derivací výrazu ve jmenovateli získáme rovnost $(5x^2-20)' = 10x$. Tento výraz není roven funkci $y = 3x$ v čitateli integrandu. Můžeme však použít úpravu

$$3x = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3} \cdot 3x = \frac{3}{10} \cdot 10x,$$

která předpis funkce nezmění (daný člen jsme pouze vynásobili číslem jedna ve tvaru součinu $\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3}$ a následně využili rovnost $\frac{10}{3} \cdot 3x = 10x$). Konstantu $\frac{3}{10}$ můžeme vytknout před integrační znak a poté nám zůstane integrand ve tvaru $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ a k nalezení neurčitého integrálu můžeme použít vzorec (9.20).

$$\int \frac{3x}{5x^2-20}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{10} \cdot 10x}{5x^2-20}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10} \int \frac{10x}{5x^2-20}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10} \ln|5x^2-20| + C$$

Definičním oborem funkce $f(x) = \frac{3x}{5x^2-20}$ je množina $\mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$. Nalezené řešení je proto neurčitým integrálem k zadané funkci na každém intervalu, který neobsahuje čísla $x_1 = -2$ a $x_2 = 2$.

Příklad 9.12

9.12. Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Derivací funkce $y = \cos x$ je $y' = -\sin x$. Proto integrand upravíme tak, aby obsahoval výraz $-\sin x$. Tím dostaneme

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-(-\sin x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$$

Vypočtený neurčitý integrál platí na každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Použití substituce $x = \psi(t)$. S jednoduchým příkladem použití substituce $x = \psi(t)$ jsme se setkali již v Příkladu 9.8. V některých případech není snadné ihned odhadnout vhodnou substituci. Nyní si ukážeme příklad s jednou méně „viditelnou“ substitucí.

9.13. Vypočtěte neurčitý integrál

Příklad 9.13

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand je spojitou funkcí v otevřeném intervalu $I = (-1, 1)$. Na této množině neurčitý integrál vypočteme. Z goniometrie známe vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, který platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z této rovnosti odvodíme vztah $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. V zadaném integrálu použijeme substituci $x = \sin t$. Funkce $\sin t$ je monotónní (rostoucí) na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazuje tento interval na množinu $(-1, 1)$. Tím jsou splněny podmínky Věty 9.2.7 a platí

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{aligned} x &= \sin t \\ \mathrm{d}x &= \cos t\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int |\cos t| \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Výraz $\cos t$ je pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ kladný, proto je $|\cos t| = \cos t$. Tím je zdůvodněna předposlední rovnost v předchozím výpočtu. Nyní se zaměříme na výpočet integrálu $\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$ (a současně naznačíme postup výpočtu integrálu $\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t$). Využijeme přitom známou goniometrickou rovnost $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$.

$$\begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) \\ &= 2\cos^2 t - 1 \\ 2\cos^2 t &= 1 + \cos 2t \\ \cos^2 t &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= (1 - \sin^2 t) - \sin^2 t \\ &= 1 - 2\sin^2 t \\ 2\sin^2 t &= 1 - \cos 2t \\ \sin^2 t &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2t) \end{aligned}$$

Použitím rovnosti v posledním řádku dostaneme

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t.$$

Integrál $\int \cos 2t\,\mathrm{d}t$ vypočteme snadno pomocí substituční metody s využitím substituce $s = 2t$.

$$\int \cos 2t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{aligned} 2t &= s \\ 2\,\mathrm{d}t &= \mathrm{d}s \end{aligned} \right| = \frac{1}{2}\int \cos 2t \cdot 2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\sin s = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Dosazením do předchozí rovnosti dostaneme

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t. \tag{9.21}$$

Nyní zpětně vyjádříme proměnnou t pomocí x. Z rovnosti $x = \sin t$ odvodíme pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ následující vztahy

$$\begin{aligned} t &= \arcsin x, \\ \sin 2t &= 2\sin t\cos t = 2\sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} = 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

Ve všech předchozích příkladech jsme k výpočtu volili úlohy, ve kterých byl integrand vyjádřen ve tvaru $f(g(x)) \cdot g'(x)$. V takovém případě je možné využít všechny členy, které integrand obsahuje. V některých případech však některé členy přebývají, resp. se jich nedostává. Ukážeme si, jak je možné takové úlohy řešit.

Příklad 9.14

9.14. Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{2x}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Snadno nahlédneme, že integrand je funkce spojitá na každém intervalu, který neobsahuje $x = -6$. Zadaný integrál přepíšeme do tvaru

$$\int \frac{1}{(x+6)^3} \cdot 2x\,\mathrm{d}x.$$

Nabízí se použít substituci $t = x + 6$. Tím dostaneme

$$\int \frac{1}{(x+6)^3} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} x+6 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3} \cdot 2x\,\mathrm{d}t = \int t^{-3} \cdot 2x\,\mathrm{d}t. \tag{9.22}$$

Výraz $2x$ ovšem v integrandu přebývá, „nezmizel“ při přechodu z $\mathrm{d}x$ na $\mathrm{d}t$. V takovém případě, kdy se v integrandu vyskytuje kromě nové proměnné i původní proměnná, nelze integraci provést ihned a máme vlastně jenom dvě možnosti. První z nich spočívá v připuštění, že jsme zvolili špatnou substituci a poté se pokusíme nalézt jinou, vhodnější substituci, nebo třeba i zvolíme jinou metodu. Nebo, a touto cestou se nyní vydáme, se pokusíme vyjádřit původní (přebývající) proměnnou pomocí nové proměnné a tímto výrazem potom původní proměnnou v integrandu nahradit.

Z rovnosti $t = x + 6$ snadno odvodíme vztah $x = t - 6$ a v posledním výrazu rovnosti (9.22) nahradíme člen $2x$ členem $2(t - 6)$. Tím je v integrandu použita pouze nová proměnná t a výpočet může pokračovat.

$$\begin{aligned} \int t^{-3} \cdot 2x\,\mathrm{d}t &= \int t^{-3} \cdot 2(t-6)\,\mathrm{d}t = 2\int t^{-3}(t-6)\,\mathrm{d}t = 2\int t^{-2} - 6t^{-3}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{6t^{-2}}{-2}\right) = -\frac{2}{t} + \frac{6}{t^2} = \frac{6}{(x+6)^2} - \frac{2}{x+6} + C \end{aligned}$$

Je tedy $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{(x+6)^2} - \frac{2}{x+6} + C$ na každém intervalu, který neobsahuje $x = -6$.

9.2.3 Metoda integrace per partes

Většina metod výpočtu neurčitého integrálu je založena na myšlence převést neurčitý integrál, který není zadán ve tvaru tabulkového integrálu, na některý z tvarů uvedených ve vzorcích (9.1) až (9.15) v přehledu na straně 423. Stejný přístup využíváme i při metodě integrování *per partes*.

Uvedená metoda vychází ze vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí. Předpokládejme, že funkce u a v mají spojité derivace na otevřeném intervalu $I = (a, b)$. Již známe vzorec $(u \cdot v)' = (u)'v + u(v)'$. Funkce $u \cdot v$ je proto primitivní funkcí k funkci $u'v + u\,v'$. Z Věty 9.2.6 pak plyne rovnost $\int(u'v + uv') = \int u'v + \int uv'$. Je tedy $\int u'v + \int uv' = uv + C$ na intervalu $I = (a, b)$, což zobecníme v následující větě.

Věta 9.2.8. *Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ spojité derivace na intervalu $I = (a, b)$, potom na intervalu I platí vzorec*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{9.23}$$

resp. stručněji

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x. \tag{9.24}$$

Princip výše uvedené metody spočívá v převedení integrálu ve tvaru $\int uv' \, \mathrm{d}x$ na integrál ve tvaru $\int u'v \, \mathrm{d}x$, jehož výpočet může být jednodušší. Možnosti použití si ukážeme v následujících úlohách. Obecně lze říci, že popsaná metoda je často (ne však vždy) vhodná k řešení neurčitých integrálů, ve kterých je integrand součinem dvou funkcí.

9.15. Vypočtěte integrál **Příklad 9.15**

$$\int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Nejprve si uvědomme, proč vlastně k řešení této úlohy použijeme právě metodu integrace per partes a nikoliv některou z ostatních metod. Přímá integrace nám nepomůže, neboť zadaný příklad není ve tvaru tabulkového integrálu a s uvedeným součinem funkcí nelze provádět tolik algebraických úprav jako např. s goniometrickými funkcemi. Substituční metoda nám také nepomůže k nějakému snadnému řešení, neboť výrazy x a e^x jsou odlišné, není mezi nimi vztah ani pomocí derivace. Navíc, určitě se nesnažte vyřešit daný integrál tím, že byste zintegrovali člen x a vynásobili jej integrálem výrazu e^x. Jistě se přesvědčíte, že funkce $y = \frac{x^2}{2} \cdot e^x$ není primitivní funkcí k funkci $y = x \cdot e^x$. Obecně lze říci, že cit pro rozpoznání vhodnosti dané metody integrace se získá praxí. Budeme tedy pokračovat použitím metody integrace per partes.

Zadaný integrand nyní považujeme za součin funkcí u a v'. Musíme se rozhodnout, kterou z funkcí $y = x$, resp. $y = \mathrm{e}^x$ budeme považovat za funkci u, resp. v'. Při rozhodování nám může pomoci, když si uvědomíme, že po úpravě budeme počítat integrál ze součinu funkcí $u'v$. Zvolíme-li $u = x$, potom je $u' = 1$ a $v' = \mathrm{e}^x = v$ a platí $u'v = 1 \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, což je „příjemná“ funkce k integraci.

V zadané úloze tedy položíme $u = x$ a $v' = \mathrm{e}^x$. Potom je $u' = 1$ a $v = \mathrm{e}^x$. Všechny funkce u, u', v, v' jsou spojité na množině $\mathbb{R}$ a jsou tedy splněny všechny předpoklady Věty 9.2.8. Použitím vzorce (9.24) dostaneme

$$\begin{aligned} \int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 1, & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} \, \mathrm{d}x \\ &= x \, \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x \, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C. \end{aligned}$$

Použití metody integrace per partes v tomto případě bylo výhodné, neboť jsme pomocí vzorce (9.24) převedli výpočet integrálu $\displaystyle\int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ na výpočet integrálu $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$, který je k výpočtu snazší.

Nyní se ještě zamysleme nad tím, jaký integrál bychom dostali, kdybychom použili rovnosti $u = \mathrm{e}^x$ a $v' = x$. Potom je $u' = \mathrm{e}^x$ a $v = x^2/2$ a ze vzorce (9.24) bychom dostali rovnost

$$\int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x,$$

která je k integraci ještě složitější, než byl původní neurčitý integrál.

V některých případech nevystačíme s jedním použitím metody per partes a je nutné tuto metodu několikrát zopakovat. Názornou ukázku přináší následující příklad.

9.16. Vypočtěte integrál **Příklad 9.16**

$$\int x^2 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Položíme $u = x^2$ a $v' = \mathrm{e}^x$. Potom je

$$\begin{aligned} \int x^2 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 2x, & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x^2 \mathrm{e}^x - \int 2x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^2 \, \mathrm{e}^x - 2 \int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= x^2 \, \mathrm{e}^x - 2 \left(x \, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \right) = x^2 \, \mathrm{e}^x - 2x \, \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili výsledek Příkladu 9.15. Pokud bychom neměli tento výsledek k dispozici, museli bychom dvakrát použít metodu per partes.

V předchozích dvou úlohách jsme pokaždé položili n-tou mocninu x rovnu funkci u. V některých případech se však vyplatí mocninu x položit rovnu funkci v', viz následující úloha.

Příklad 9.17

9.17. Vypočtěte integrál

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: V zadané úloze položíme $u = \ln x$ a $v' = x$. Potom je

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x, & v' = x \\ u' = \frac{1}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Vzhledem k definičnímu oboru platí uvedený výsledek na množině $(0, \infty)$.

V některých úlohách lze dokonce použít metodu per partes i tehdy, nemá-li integrand podobu součinu dvou funkcí. V takovém případě se pak použije uměle součin ve tvaru $f(x) = 1 \cdot f(x)$, viz následující příklad.

Příklad 9.18

9.18. Vypočtěte integrál

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Přestože integrand není ve tvaru součinu, lze jej převést na součin dvou výrazů pomocí úpravy $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Poté položíme $u = \ln x$ a $v' = 1$. Tím dostaneme rovnosti

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x, & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x}, & v = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int \frac{1}{x} \, x \, \mathrm{d}x$$
$$= x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

Integrand je spojitá funkce pro všechna $x \in (0, \infty)$. Na této množině zjištěné výsledky platí.

Následující příklad nám přiblíží další možnou strategii výpočtu neurčitých integrálů metodou integrace per partes. Při tomto postupu použijeme nově vzniklý neurčitý integrál na pravé straně rovnosti (9.24) k vyjádření hledaného neurčitého integrálu bez jeho vlastní integrace.

Příklad 9.19

9.19. Vypočtěte integrál

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: V tomto případě je volba u a v' snadná. Je totiž $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ a platí $u = \sin x$ a $v' = \sin x$. Dále je

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \sin x, & v' = \sin x \\ u' = \cos x, & v = -\cos x \end{vmatrix} = \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \, \mathrm{d}x$$
$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x. \tag{9.25}$$

Nyní určíme hodnotu integrálu $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \cos x, & v' = \cos x \\ u' = -\sin x, & v = \sin x \end{vmatrix} = \cos x \sin x - \int \sin x(-\sin x) \, \mathrm{d}x$$
$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Dosazením do (9.25) dostaneme

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x,$$

tedy

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

To je sice pravdivé tvrzení, nicméně nepomůže nám při hledání zadaného neurčitého integrálu. Tento postup nás k cíli nepřivedl, proto zkusíme integrál $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ vyřešit jiným způsobem. Využijeme goniometrickou identitu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Potom platí

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int 1 - \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Dosazením do (9.25) dostaneme

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Na obou stranách rovnosti jsme dostali stejný integrál $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$. Celý tento výraz nyní přičteme k oběma stranám předchozí rovnice. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= x - \sin x \cos x \\ 2 \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= x - \sin x \cos x \\ \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C. \end{aligned}$$

Tímto krokem se nám podařilo vypočítat neurčitý integrál $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$, aniž bychom provedli samotnou integraci integrálu na pravé straně vzorce (9.24). Poznamenejme, že integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, proto vypočtený výsledek platí na celé množině $\mathbb{R}$.

V některých příkladech je nutné použít jak substituční metodu, tak i metodu per partes. Ukázku přináší následující příklad.

Příklad 9.20

9.20. Vypočtěte integrál

$$\int x^3 \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, neurčitý integrál tedy najdeme na této množině.

$$\begin{aligned} \int x^3 \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{x^2 \, 2x \, e^{x^2}}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int x^2 \mathrm{e}^{x^2} 2x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} x^2 = & t \\ 2x \, \mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = \mathrm{e}^t \\ u' = 1, & v = \mathrm{e}^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left(t \, \mathrm{e}^t - \int e^t \, \mathrm{d}t \right) = \frac{1}{2} \left(t \, \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{x^2} \right) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2} \left(x^2 - 1 \right) + C \end{aligned}$$

V Příkladu 9.16 jsme viděli, že v některých případech integraci metodou per partes provádíme několikrát. Pomocí rekurentních vzorců je možné se tomuto opakování vyhnout. Konkrétní případy použití ukáží dvě následující úlohy.

Příklad 9.21

9.21. Nalezněte rekurentní vzorec pro výpočet neurčitého integrálu ve tvaru

$$I_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Příklad budeme řešit pro $n \in \mathbb{N}$. V takovém případě je integrand spojitou funkcí na $\mathbb{R}$ a vypočtené vzorce platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Index n v symbolu I_n představuje mocninu, na kterou je umocněna proměnná x v integrandu. Je tedy např.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int x^2 e^x \,\mathrm{d}x, \\
I_1 &= \int x^1 \, e^x \,\mathrm{d}x = \int x \, e^x \,\mathrm{d}x, \\
I_0 &= \int x^0 e^x \,\mathrm{d}x = \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C.
\end{aligned}$$

Položíme $u = x^n$ a $v' = e^x$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned}
I_n = \int x^n e^x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = x^n, & v' = e^x \\ u' = nx^{n-1}, & v = e^x \end{vmatrix} = x^n e^x - \int nx^{n-1} e^x \,\mathrm{d}x = \\
&= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \,\mathrm{d}x = x^n e^x - nI_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hledaným rekurentním vzorcem pro neurčitý integrál ve tvaru $I_n = \int x^n e^x \,\mathrm{d}x$ tedy je

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}. \tag{9.26}$$

Nyní podle nalezeného vzorce vypočítáme $\int x^3 e^x \,\mathrm{d}x$.

$$I_3 = x^3 e^x - 3I_2 \tag{9.27}$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2I_1 \tag{9.28}$$

$$I_1 = x^1 e^x - 1I_0 \tag{9.29}$$

$$I_0 = e^x \tag{9.30}$$

Dosazením vztahů (9.27) až (9.30) do vzorce (9.26) dostaneme

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^x \,\mathrm{d}x &= I_3 \\
&= x^3 e^x - 3I_2 \\
&= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_1) \\
&= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x^1 e^x - 1I_0)) \\
&= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x^1 e^x - 1 \cdot e^x)) \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C.
\end{aligned}$$

Příklad 9.22

9.22. Nalezněte rekurentní vzorec pro výpočet neurčitého integrálu ve tvaru

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + x^2\right)^n}.$$

Řešení: Příklad budeme řešit pro $n \in \mathbb{N}$. V takovém případě je integrand spojitou funkcí na $\mathbb{R}$ a vypočtené vzorce platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Položíme $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + x^2\right)^n}$, index n proto značí mocninu funkce $y = 1/(1 + x^2)$. Je tedy např.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + x^2\right)^2}, \\
I_1 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + x^2\right)^1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

Použitím metody per partes dostaneme

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^n} = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}, & v' = 1 \\ u' = \dfrac{(-n)\cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}}, & v = x \end{array} \right|$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right).$$

Je tedy

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,I_n - 2n\,I_{n+1},$$
$$2n\,I_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,I_n - I_n,$$

neboli

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot I_n, \tag{9.31}$$

což je hledaný rekurentní vzorec. Pro ilustraci ukážeme použití vzorce (9.31) při výpočtu neurčitého integrálu $I_3 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$. Je $I_{n+1} = I_3$, proto $n = 2$. Použitím vzorce (9.31) dostaneme

$$I_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\cdot I_2, \qquad \text{a} \qquad I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^1} + \frac{1}{2}\cdot I_1.$$

Spojením obou mezivýsledků dostaneme

$$I_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x\right).$$

Proto platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4\,(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8\,(1+x^2)} + \frac{3\operatorname{arctg} x}{8} + C.$$

9.3 Cvičení:

V následujících příkladech se rozhodněte pro jednu z metod integrace (přímá metoda, substituční metoda, nebo metoda per partes) a vypočtěte následující příklady.

9.3.1. $\displaystyle\int \frac{10x^3-2x}{5x^2}\,\mathrm{d}x$

9.3.2. $\displaystyle\int \frac{t^2-t}{t-1}\,\mathrm{d}t$

9.3.3. $\displaystyle\int \frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{d}\alpha$

9.3.4. $\displaystyle\int \sqrt{x\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

9.3.5. $\displaystyle\int \frac{2^{x+3}-3^{x+2}}{5^{x-1}}\,\mathrm{d}x$

9.3.6. $\displaystyle\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$

9.3.7. $\displaystyle\int \frac{5x}{\sqrt{3x^2+10}}\,\mathrm{d}x$

9.3.8. $\displaystyle\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

9.3.9. $\displaystyle\int \frac{6x}{2x^2-11}\,\mathrm{d}x$

9.3.10. $\displaystyle\int 5x\cos x^2\,\mathrm{d}x$

9.3.11. $\displaystyle\int 5x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

9.3.12. $\displaystyle\int \frac{5\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

9.3.13. $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

9.3.14. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

9.3.15. $\displaystyle\int \frac{4x}{(5x^2+10)^3}\,\mathrm{d}x$

9.3.16. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^4}{x}\,\mathrm{d}x$

9.3.17. $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x$

9.3.18. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+10}\,\mathrm{d}x$

9.3.19. $\displaystyle\int x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$

9.3.20. $\displaystyle\int \sqrt{x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

Výsledky:

9.3.1 $x^2-\frac{2}{5}\ln|x|+C,\,x\neq 0$ **9.3.2** $\frac{t^2}{2}+C,\,t\neq 1$ **9.3.3** $\frac{2}{3}\sqrt{\alpha^3}+2\sqrt{\alpha}+C,\,\alpha>0$ **9.3.4** $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+C,\,x>0$ **9.3.5** $40\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x/\ln(2/5)-45\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x/\ln(3/5)+C$ **9.3.6** $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C,\,x>1$ **9.3.7** $\frac{5}{3}\sqrt{3x^2+10}+C$ **9.3.8** $x\sin x+\cos x+C$ **9.3.9** $\frac{3}{2}\ln|2x^2-11|+C,\,|x|>\sqrt{11/2}$ **9.3.10** $\frac{5}{2}\sin x^2+C$ **9.3.11** $-\frac{5}{2}e^{-x^2}+C$ **9.3.12** $-5\ln|\cos x|+C,\,x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\,k\in\mathbb{Z}$ **9.3.13** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C,\,|x|<1$ **9.3.14** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ **9.3.15** $-\frac{1}{5(5x^2+10)^2}+C$ **9.3.16** $\frac{\ln^5 x}{5}+C,\,x>0$ **9.3.17** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C,\,x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\,k\in\mathbb{Z}$ **9.3.18** $\ln(e^x+10)+C$ **9.3.19** $e^{-x}(-x-1)+C$ **9.3.20** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\ln x-\frac{2}{3})+C,\,x>0$

Kapitola 10

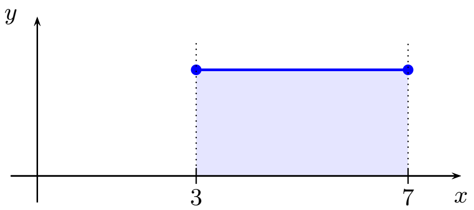
Určitý integrál

V této kapitole se seznámíme s novým typem integrálu - tzv. určitým integrálem. Zvládnutí aparátu určitého integrálu nám umožní řešit úlohy různého charakteru - nejčastěji to budou úlohy spojené s výpočtem obsahu plochy a následně práce s veličinami, jejichž hodnoty mají význam obsahu plochy. S takovými veličinami se setkáváme v ekonomických teoriích běžně.

V předchozí kapitole jsme se seznámili s pojmem neurčitý integrál. Rozdíl mezi určitým a neurčitým integrálem spočívá ve skutečnosti, že výpočtem neurčitého integrálu získáme funkci, resp. množinu funkcí. Naproti tomu výpočtem určitého integrálu získáme konkrétní reálné číslo. Další rozdíl mezi oběma druhy integrálu spočívá v tom, že neurčitý integrál je definován jedním způsobem. Určitých integrálů však existuje celá řada - lze se setkat s Riemannovým určitým integrálem, Newtonovým určitým integrálem, Lebesqueovým určitým integrálem atd. Každý z těchto určitých integrálů používá k definici jiný přístup. Této různosti se nemusíme bát, ve stejných případech tyto různé přístupy k zavedení určitého integrálu poskytují stejné výsledky. Větší množství definic určitých integrálů je způsobeno existencí případů, ve kterých k nějaké funkci nelze nalézt příslušný integrál například podle definice Newtonova určitého integrálu, je to ale možné podle definice Riemannova určitého integrálu atd.

Nejprve uvedeme několik poznámek k Riemannovu určitému integrálu. Půjde však pouze o hrubé nastínění definice bez potřebné přesnosti výkladu[1]). Čtenář by měl po jejím přečtení získat představu o problematice určitého integrálu a poté by měl bez potíží sledovat zavedení Newtonova určitého integrálu a jeho aplikace. Před tím, než naznačíme definici Riemannova určitého integrálu, uvedeme několik příkladů.

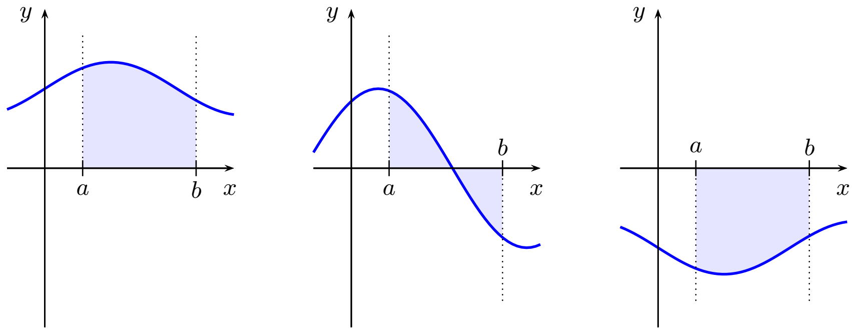
10.1. Mějme funkci $f(x) = 2$, která je definována pro všechna $x \in \langle 3, 7 \rangle$. Plocha ohraničená grafem této funkce, osou x a svislými přímkami procházejícími body $x = 3$ a $x = 7$ vytváří obdélník s šířkou $a = 4$ a výškou $b = 2$. Obsah tohoto obdélníku je roven $S = a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8$ (jednotek čtverečných - budeme je značit symbolem j^2). Potom říkáme, že obsah plochy pod grafem funkce $f(x) = 2$ je roven $S = 8$ j^2. **Příklad 10.1**



Obrázek 10.1: Plocha ohraničená grafem funkce f

[1]) Korektní definici Riemannova určitého integrálu lze nalézt v celé řadě knih, jmenujme například knihu Jarník, V.: *Integrální počet I*, Academia, Praha 1984. Knihu lze v digitalizované podobě nalézt na stránkách Czech Digital Mathematics Library na adrese *http://www.dml.cz* v sekci Single Books.

Poznámka 10.0.1. Na tomto místě se domluvme na následujícím značení. Řekneme-li plocha *pod* grafem funkce f, ve skutečnosti máme na mysli plochu, která se nachází mezi grafem funkce f a osou x (obecně vodorovnou osou). Domluvené označení budeme používat i v případě, kdy funkce nabývá záporné funkční hodnoty a graf funkce tak leží pod vodorovnou souřadnou osou, viz Obrázek 10.2.

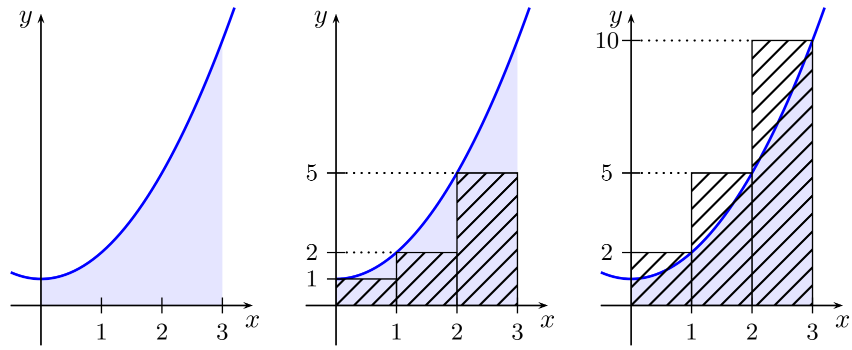


Obrázek 10.2: Plocha pod grafem funkce f

Příklad 10.2

10.2. Mějme funkci $f(x) = x^2+1$ a plochu pod grafem této funkce, která je zleva, resp. zprava ohraničena svislými přímkami procházejícími body $x = 0$ a $x = 3$. Pokusíme se odhadnout obsah této plochy.

Interval $\langle 0,\, 3\rangle$ rozdělíme na tři podintervaly, každý o délce $\Delta x = 1$. Z každého podintervalu vybereme x s nejnižší, resp. nejvyšší hodnotou a nad tímto podintervalem pak sestrojíme obdélník s výškou odpovídající funkční hodnotě funkce f v bodě x, viz Obrázek 10.3. Součet obsahů obdélníků na Obrázcích 10.3(b) a 10.3(c) nám potom



(a) Plocha pod grafem funkce $f(x) = x^2 + 1$ v mezích $x \in \langle 0,\, 3\rangle$

(b) Aproximace obsahu plochy pomocí obdélníků

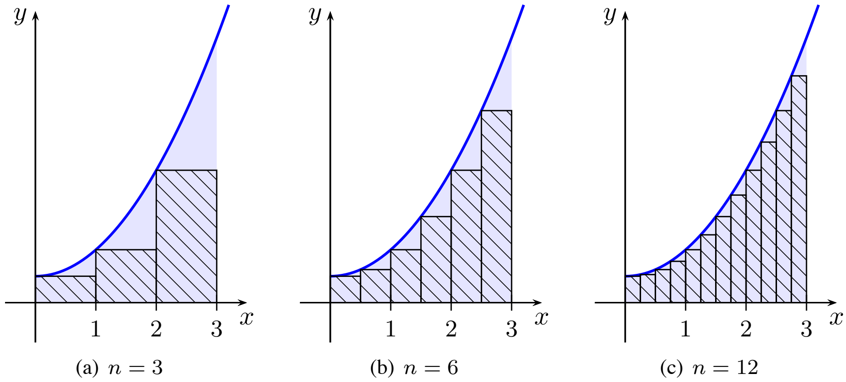
(c) Aproximace obsahu plochy pomocí obdélníků

Obrázek 10.3: Plocha pod grafem funkce $f(x) = x^2 + 1$

umožňuje odhadnout dolní a horní mez pro obsah vyšetřované plochy. Provedeme tento výpočet. Obsah vyšrafované plochy na Obrázku 10.3(b) (označme ho symbolem s_3), resp. na Obrázku 10.3(c) (označme ho symbolem S_3) je roven

$$\begin{aligned} s_3 &= f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 & S_3 &= f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 \\ &= 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 & &= 2\cdot 1 + 5\cdot 1 + 10\cdot 1 \\ &= 8 & &= 17. \end{aligned}$$

Obsah S vyšetřované plochy lze tedy omezit nerovnostmi $8 \le S \le 17$. Tento náš odhad je však příliš hrubý pro určení přesnějšího výsledku. Toto široké rozmezí je dáno malým počtem bodů, kterými jsme rozdělili interval $\langle 0,\, 3\rangle$. Pokusíme se náš odhad zlepšit zvětšením počtu dělicích bodů intervalu n. V případě, kdy počet dělicích bodů



Obrázek 10.4: Zjemňování dělení intervalu $\langle 0,\ 3\rangle$

zvýšíme například na $n = 12$, změní se délka každého podintervalu na

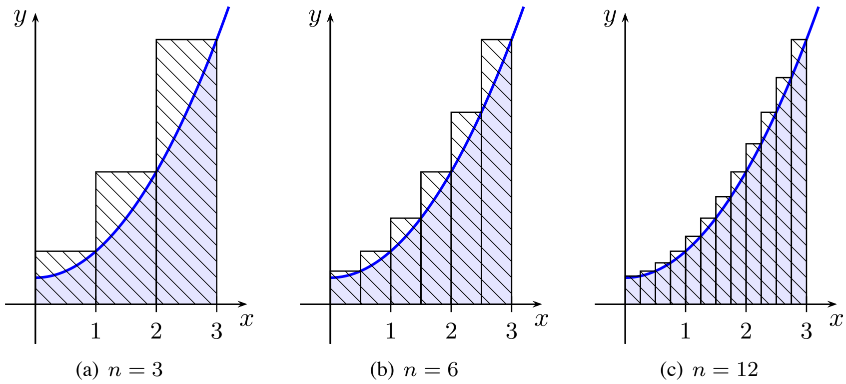
$$\Delta x = \frac{3-0}{12} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Potom obsah s_{12} vyšrafované plochy na Obrázku 10.4(c) vypočteme opět jako součet obsahů jednotlivých obdélníků.

$$\begin{aligned} s_{12} &= f(0)\cdot\Delta x + f(0,25)\cdot\Delta x + \ldots + f(2,5)\cdot\Delta x + f(2,75)\cdot\Delta x \\ &= 1\cdot 0,25 + 1,062\,5\cdot 0,25 + \ldots + 7,25\cdot 0,25 + 8,562\,5\cdot 0,25 \\ &= 10,906\,25 \end{aligned}$$

Všimněte si, že s rostoucím počtem dělicích bodů se dolní odhad zvyšuje a přibližuje se skutečnému obsahu zadané plochy.

Nyní se pokusíme zlepšit i horní odhad obsahu zadané plochy. Interval $\langle 0,\ 3\rangle$ rozdělíme stejně jako v předchozím výpočtu na dvanáct podintervalů a obsah S_{12} vyšra-



Obrázek 10.5: Zjemňování dělení intervalu $\langle 0,\ 3\rangle$

fované plochy na Obrázku 10.5(c) vypočteme opět jako součet obsahů jednotlivých obdélníků.

$$\begin{aligned} S_{12} &= f(0,25)\cdot\Delta x + f(0,5)\cdot\Delta x + \ldots + f(2,75)\cdot\Delta x + f(3)\cdot\Delta x \\ &= 1,062\,5\cdot 0,25 + 1,25\cdot 0,25 + \ldots + 8,562\,5\cdot 0,25 + 10\cdot 0,25 \\ &= 13,156\,25 \end{aligned}$$

Povšimněte si, že s rostoucím počtem dělicích bodů se snižuje velikost horního odhadu a tento se přibližuje obsahu zadané plochy. Náš odhad obsahu zadané plochy tak můžeme omezit pomocí nerovnic $10,906\,25 \le S \le 13,156\,25$. Z postupu řešení příkladu je zřejmé, že je možné pokračovat ve zvyšování počtu dělicích bodů a tím získávat odhad obsahu plochy s libovolnou přesností.

10.1 Riemannův určitý integrál

Podobný způsob vyšetřování obsahu plochy jako v Příkladu 10.2 zobecníme tak, aby nás dovedl k pojmu určitý integrál (v Riemannově smyslu). Na chvíli se přitom oprostíme od geometrického pohledu souvisejícího s obsahem plochy a budeme se zabývat pouze „početní“ stránkou problému.

Předpokládejme, že je dána funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ ve smyslu Definice 6.1.6 na straně 322. Interval $\langle a,\, b\rangle$ rozdělíme body $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ na n (v obecném případě různě dlouhých) úseků tak, aby platilo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b;$$

toto dělení označíme symbolem D_n. Symbolem m_i označíme globální minimum a symbolem M_i globální maximum funkce f v i-tém intervalu $\langle x_{i-1},\, x_i\rangle$, kde $1 \le i \le n$. Poznamenejme, že existence čísel m_i a M_i v každém intervalu $\langle x_{i-1},\, x_i\rangle$ je zaručena Weierstrassovou větou 6.1.12.

Nyní vytvoříme tzv. dolní součet (příslušný dělení D_n)

$$s(D_n) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

a tzv. horní součet (příslušný dělení D_n)

$$S(D_n) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i.$$

Hodnota dolního, resp. horního součtu ovšem závisí na způsobu, kterým jsme rozdělili interval $\langle a,\, b\rangle$. Volbou jiného $n \in \mathbb{N}$ a jiných dělicích bodů $x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_{n-1}$ dostaneme odlišné hodnoty dolního, resp. horního součtu. Označme symbolem

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.1}$$

supremum ze všech možných dolních součtů (vzniklých jakýmkoliv možným rozdělením intervalu $\langle a,\, b\rangle$) a symbolem

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.2}$$

pak označme infimum ze všech možných horních součtů. Výraz (10.1), resp. (10.2) nazýváme dolní (Riemannův) integrál, resp. horní (Riemannův) integrál. Platí-li rovnost

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{10.3}$$

potom říkáme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná v intervalu $\langle a,\, b\rangle$. Společnou hodnotu v rovnosti (10.3) značíme symbolem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a nazýváme ji *Riemannův určitý integrál* funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\, b\rangle$, resp. Riemannův určitý integrál funkce $f(x)$ v mezích od a do b. Číslo a nazýváme *dolní mez* určitého integrálu, b nazýváme *horní mez* určitého integrálu.

10.2 Newtonův určitý integrál

V předchozí části jsme si vysvětlili, jak chápat pojem určitého integrálu. V této kapitole uvedeme definici určitého integrálu, která nám v mnoha případech umožní určit hodnotu určitého integrálu.

V Definici 9.2.1 na straně 421 jsme zavedli pojem primitivní funkce na otevřeném intervalu I. Pojem primitivní funkce využijeme při definici Newtonova určitého integrálu.

Definice 10.2.1. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a,\, b\rangle \subset I$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Potom symbol $(\mathcal{N})\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme (*Newtonův*) *určitý integrál* a definujeme jej vztahem

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{10.4}$$

Existuje-li k funkci f na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ Newtonův určitý integrál, říkáme, že je (newtonovsky) integrovatelná na intervalu $\langle a,\, b\rangle$.

Symbol $(\mathcal{N})$ v Definici 10.2.1 značí adjektivum Newtonův. Protože nadále budeme uvažovat pouze Newtonův určitý integrál, učiníme na tomto místě dohodu, že označení $(\mathcal{N})$ spolu s přídavným jménem Newtonův v dalším textu vynecháme. V případě, že budeme pracovat s Riemannovým integrálem, na tuto skutečnost výslovně upozorníme.

Výpočet hodnoty určitého integrálu probíhá tak, že nejprve k dané funkci f určíme její primitivní funkci F. Poté vypočteme funkční hodnoty funkce F v bodech b, resp. a a odečteme je od sebe. K vyjádření zápisu $F(b) - F(a)$ často používáme symbol $\big[F(x)\big]_a^b$. V hranaté závorce uvedeme předpis primitivní funkce a poté jej rozepíšeme ve formě rozdílu výrazů $F(b)$ a $F(a)$. Je tedy například

$$\begin{aligned}\int\limits_2^4 3x^2 + 3\,\mathrm{d}x &= \big[x^3 + 3x + C\big]_2^4 = (4^3 + 3\cdot 4 + C) - (2^3 + 3\cdot 2 + C)\\ &= 4^3 + 3\cdot 4 + C - 2^3 - 3\cdot 2 - C = 64 + 12 - 8 - 6 = 62.\end{aligned}$$

Při výpočtu se ukázalo, že hodnota integrační konstanty neovlivní hodnotu určitého integrálu. Ukážeme, že se tak stane i v obecném případě.

Předpokládejme, že funkce F a G jsou primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a,\, b\rangle$. Potom se obě funkce liší pouze o integrační konstantu, tj. pro všechna $x \in \langle a,\, b\rangle$ je $G(x) = F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ a platí následující rovnosti

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Uvedený příklad ukazuje, že hodnota určitého integrálu nezávisí na volbě konkrétní primitivní funkce, neboť jsme ukázali, že rozdíly $G(b) - G(a)$ a $F(b) - F(a)$ se sobě rovnají pro libovolnou hodnotu C. Při výpočtu určitého integrálu tedy nebudeme k primitivní funkci integrační konstantu C vůbec připisovat.

V tuto chvíli známe definice dvou různých typů určitých integrálů - Riemannova a Newtonova. Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly, jsou funkce, pro které existuje Riemannův integrál, ale neexistuje Newtonův integrál. Stejně tak nalezneme funkce, které jsou integrovatelné v Newtonově smyslu, ale neexistuje k nim Riemannův určitý integrál. Existují také funkce, které jsou integrovatelné v Riemannově i Newtonově smyslu. Sem patří například všechny funkce, které jsou v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ spojité.

Věta 10.2.2. *Mějme funkci f, pro kterou na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ existuje Riemannův určitý integrál $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a také Newtonův určitý integrál $(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom platí* *rovnost*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V následujících úlohách si ukážeme výpočet určitého integrálu v několika konkrétních případech.

Příklad 10.3

10.3. Vypočteme hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zadaný integrál existuje, neboť funkce $f(x) = x^2$ je spojitá v intervalu $\langle 1,\, 3\rangle$. Tato funkce má v intervalu $(1,\, 3)$ primitivní funkci $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Potom je

$$\int\limits_1^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Příklad 10.4

10.4. Vypočteme hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zadaný integrál existuje, neboť funkce $f(x) = \cos x$ je spojitá v intervalu $\left\langle 0,\, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Primitivní funkcí na intervalu $\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ je funkce $F(x) = \sin x$. Potom je

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Příklad 10.5

10.5. Vypočteme hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zadaný integrál existuje, neboť funkce $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ je spojitá v intervalu $\left\langle 0,\, \frac{\pi}{4}\right\rangle$. Primitivní funkcí na intervalu $\left(0,\, \frac{\pi}{4}\right)$ je funkce $F(x) = \operatorname{tg} x$. Potom je

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{tg} x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$$

Při výpočtu určitých integrálů a také při jejich pozdějším použití v aplikačních úlohách můžeme používat některé z níže uvedených definicí a vět. Následující dvě definice se věnují případům, ve kterých má dolní mez určitého integrálu větší, resp. stejnou hodnotu v porovnání s horní mezí určitého integrálu. S touto situací jsme v Definici 10.2.1 nepočítali, proto si takové určité integrály zavedeme následujícím způsobem.

Definice 10.2.3. Je-li $a < b$ a existuje-li určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, potom definujeme určitý integrál $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ pomocí vzorce

$$\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.5}$$

Definice 10.2.4. Je-li funkce f definována v bodě a, potom klademe

$$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{10.6}$$

Význam této definice vynikne, uvědomíme-li si její souvislost s definicí Riemannova určitého integrálu.

Následující dvě věty nám umožní zjednodušit výpočet určitého integrálu tím, že nám umožní vytknout z integrované funkce libovolnou multiplikativní[2]) konstantu před integrační znak, resp. převést určitý integrál ze součtu dvou funkcí na součet určitých integrálů z jednotlivých sčítanců (za předpokladu, že určité integrály z těchto sčítanců existují) a naopak.

Věta 10.2.5. *Předpokládejme, že na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ existují určité integrály z funkcí f a g a také z funkce $f+g$. Potom platí rovnost*

$$\int\limits_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.7}$$

Věta 10.2.6. *Předpokládejme, že na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ existuje určitý integrál z funkce f a $c\in\mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Potom platí rovnost*

$$\int\limits_a^b c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=c\cdot\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.8}$$

Důkazy uvedených vět lze snadno získat rozepsáním podle definice určitého integrálu. Následující věta hovoří o tzv. aditivitě určitého integrálu.

Věta 10.2.7. *Předpokládejme, že funkce f je spojitá na intervalu I. Jsou-li a, b, c libovolná čísla z intervalu I, potom existují určité integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí rovnost*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.9}$$

Důkaz věty je opět možné získat rozepsáním dle definice určitého integrálu.

Příklad 10.6

10.6. Vypočteme hodnotu určitého integrálu

$$\int_2^5 x^2+2x-3\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Ukážeme si dva možné přístupy k výpočtu. V prvním z nich určíme primitivní funkci k funkci $f(x)=x^2+2x-3$. Je $F(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x$ a dosazením do vzorce (10.4) dostaneme

$$\begin{aligned}\int_2^5 x^2+2x-3\,\mathrm{d}x&=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_2^5=\left(\frac{5^3}{3}+5^2-3\cdot 5\right)-\left(\frac{2^3}{3}+2^2-3\cdot 2\right)\\&=\left(\frac{125}{3}+25-15\right)-\left(\frac{8}{3}+4-6\right)=51.\end{aligned}$$

Druhá možnost výpočtu spočívá v použití vzorců (10.7) a (10.8). Tím dostaneme

$$\begin{aligned}\int\limits_2^5 x^2+2x-3\,\mathrm{d}x&=\int\limits_2^5 x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 2x\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^5(-3)\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_2^5 x^2\,\mathrm{d}x+2\int\limits_2^5 x\,\mathrm{d}x-3\int\limits_2^5 1\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5+2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5-3\,[x]_2^5\\&=\left(\frac{125}{3}-\frac{8}{3}\right)+2\left(\frac{25}{2}-\frac{4}{2}\right)-3\,(5-2)\\&=\frac{117}{3}+2\cdot\frac{21}{2}-3\cdot 3=39+21-9=51.\end{aligned}$$

[2]) Multiplikativní je taková konstanta, kterou je násobena jistá (např. integrovaná) funkce.

V obou případech jsme se různými způsoby výpočtu dostali ke stejnému výsledku.

Příklad 10.7

10.7. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_{-2}^{1} |x| \, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Vyjdeme z definice absolutní hodnoty reálného čísla $|x|$ pomocí vzorce (5.1) na straně 217. Pro $x \in (-2, 0)$ je podle uvedené definice $|x| = -x$, pro $x \in (0, 1)$ je $|x| = x$. Proto upravíme integrál podle vzorce (10.9) do tvaru

$$\int_{-2}^{1} |x| \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} |x| \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |x| \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (-x) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \, \mathrm{d}x.$$

Potom je

$$\int_{-2}^{1} |x| \, \mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \, \mathrm{d}x = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} =$$
$$= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = -(0-2) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}.$$

10.2.1 Metoda per partes v určitém integrálu

V kapitole 9.2.3 jsme se seznámili s metodou per partes pro výpočet neurčitého integrálu. Tuto metodu lze ve vhodných případech použít i při výpočtu určitého integrálu. Lze přitom postupovat dvěma způsoby.

Při prvním z nich nejprve k příslušnému integrandu určíme primitivní funkci pomocí metody per partes a poté dosazením do vzorce (10.4) vypočteme hodnotu určitého integrálu. Tento postup si přiblížíme následujícím příkladem.

Příklad 10.8

10.8. Vypočteme hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_{0}^{1} x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

Řešení: Zadaný určitý integrál existuje, neboť integrandem je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy i na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$. Položíme $u = x$ a $v' = \mathrm{e}^x$. Podle vzorce (9.23) dostaneme

$$\int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 1, & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x\mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x \, \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$
$$= x \, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

Primitivní funkcí k integrandu je $F(x) = x \, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$ a tuto funkci dosadíme do vzorce (10.4). Tím dostaneme:

$$\int_{0}^{1} x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = [x \, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_0^1 = \left(1 \cdot \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1\right) - \left(0 \cdot \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0\right) = (\mathrm{e} - \mathrm{e}) - (0 - 1) = 1.$$

Druhý způsob výpočtu spočívá ve využití metody per partes přímo na určitý integrál podle následující věty.

Věta 10.2.8. *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí*

$$\int_{a}^{b} u(x) \, v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_{a}^{b} u'(x) \, v(x) \, \mathrm{d}x. \tag{10.10}$$

Připomeňme, že symbol $\Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b$ znamená rozdíl $u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a)$.

Příklad 10.9

10.9. Určitý integrál z Příkladu 10.8 vypočteme znovu s využitím Věty 10.2.8. Opět položíme $u=x$ a $v'=\mathrm{e}^x$. Podle vzorce (10.10) dostaneme

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=x, & v'=\mathrm{e}^x\\ u'=1, & v=\mathrm{e}^x\end{array}\right|=\big[\,x\cdot\mathrm{e}^x\,\big]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$=\big(1\cdot\mathrm{e}^1-0\cdot\mathrm{e}^0\big)-\big[\,\mathrm{e}^x\,\big]_0^1=(\mathrm{e}-0)-(\mathrm{e}-1)=1.$$

Příklad 10.10

10.10. Vypočteme určitý integrál $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: K výpočtu použijeme vzorec (10.10). Funkce $f(x)=\operatorname{arctg} x$ je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$, a tedy i v intervalu $\langle 0,\,1\rangle$. Zadaný integrál proto existuje. Položíme $u(x)=\operatorname{arctg} x$ a $v(x)=1$. Potom je

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg} x, & v'=1\\ u'=\dfrac{1}{1+x^2}, & v=x\end{array}\right|=\big[x\cdot\operatorname{arctg} x\big]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=(1\cdot\operatorname{arctg}1-0\cdot\operatorname{arctg}0)-\frac12\cdot\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\Big(\frac{\pi}{4}-0\Big)-\frac12\Big[\,\ln|1+x^2|\,\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac12\cdot(\ln2-\ln1)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac12\ln2.$$

Při výpočtu jsme využili skutečnost, že integrand $\dfrac{2x}{1+x^2}$ je ve tvaru f'/f a jeho primitivní funkci lze určit pomocí vztahu (9.20) na straně 430.

10.2.2 Substituční metoda v určitém integrálu

Stejně jako u metody per partes lze i substituční metodu v určitém integrálu použít dvěma různými způsoby. V prvním z nich vypočteme pomocí substituční metody pro neurčitý integrál příslušnou primitivní funkci a pak pomocí vzorce (10.4) vypočteme hodnotu daného určitého integrálu. Tento postup přiblížíme následujícím příkladem.

Příklad 10.11

10.11. Vypočteme hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand je funkce spojitá na intervalu $(0,\,\infty)$, tedy i na intervalu $\langle 1,\,\mathrm{e}\rangle$, zadaný určitý integrál proto existuje. Nejprve vypočteme neurčitý integrál.

$$\int\frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\ln^2 x\cdot\frac1x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rl}\ln x= & t\\ \frac1x\,\mathrm{d}x= & \mathrm{d}t\end{array}\right|=\int t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}=\frac{\ln^3 x}{3}+C$$

Z výpočtu vyplývá předpis primitivní funkce $F(x)=\dfrac{\ln^3 x}{3}$. Tento vztah dosadíme do vzorce (10.4). Tím dostaneme

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\ln^3 x}{3}\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{\ln^3\mathrm{e}}{3}-\frac{\ln^3 1}{3}=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac13.$$

Druhý způsob výpočtu spočívá v přímém použití substituční metody pro určitý integrál tak, jak jej popisuje následující věta.

Věta 10.2.9. *Předpokládejme, že funkce $t = g(x)$ má spojitou derivaci $g'(x)$ pro všechna $x \in \langle a,\, b\rangle$. Nechť pro každé $x \in \langle a,\, b\rangle$ jsou splněny nerovnosti $A \le g(x) \le B$ a funkce $f(t)$ je spojitá pro všechna $t \in \langle A,\, B\rangle$. Položme $\alpha = g(a)$ a $\beta = g(b)$. Potom je*

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.11}$$

Příklad 10.12

10.12. Vypočteme opět hodnotu určitého integrálu z Příkladu 10.12.

Řešení: Integrand si můžeme představit ve tvaru $f(g(x)) \cdot g'(x) = (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}$, je tedy $f(t) = t^2$, $t = g(x) = \ln x$ a $g'(x) = \frac{1}{x}$. Funkce $g'(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(0, \infty)$, tedy i na intervalu $\langle 1,\, \mathrm{e}\rangle$. Pro všechna $x \in \langle 1,\, \mathrm{e}\rangle$ jsou splněny nerovnosti $0 \le \ln x \le 1$ a funkce $f(t) = t^2$ je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy i pro všechna $t \in \langle 0,\, 1\rangle$. Je $\alpha = g(a) = \ln 1 = 0$ a $\beta = g(b) = \ln \mathrm{e} = 1$. Potom podle Věty 10.2.9 platí

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Poznamenejme, že po použití substituce došlo ke změně integračních mezí ve smyslu vzorců $\alpha = g(a)$ a $\beta = g(b)$.

V následujícím příkladu si ukážeme význam té podmínky z Věty 10.2.9, která vyžadovala spojitost funkce $f(t)$ pro všechna $t \in \langle A,\, B\rangle$.

Příklad 10.13

10.13. Vypočteme hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int\limits_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x.$

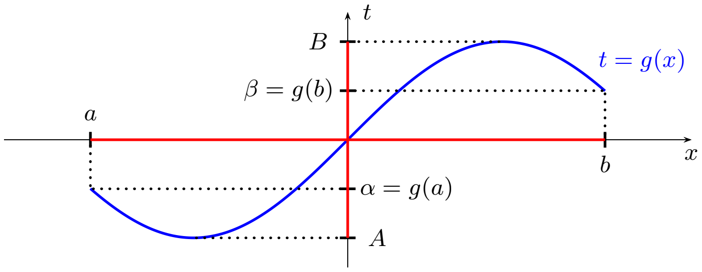
Řešení: Analogicky vůči předchozímu příkladu si lze integrand představit ve tvaru $f(g(x)) \cdot g'(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos x$, je tedy $f(t) = t^2$, $t = g(x) = \sin x$ a $g'(x) = \cos x$. Funkce $g'(x) = \cos x$ je spojitá na intervalu $\mathbb{R}$, tedy i na intervalu $\left\langle -\frac{5\pi}{6},\, \frac{5\pi}{6}\right\rangle$. Pro všechna $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{6},\, \frac{5\pi}{6}\right\rangle$ jsou splněny nerovnosti $-1 \le \sin x \le 1$ a funkce $f(t) = t^2$ je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy i pro všechna $t \in \langle -1,\, 1\rangle$. Je $\alpha = g(a) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ a $\beta = g(b) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Potom podle Věty 10.2.9 platí

$$\int\limits_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\right] = \frac{1}{12}.$$

Můžeme se ptát, proč jsme požadovali spojitost funkce t^2 v intervalu $\langle -1,\, 1\rangle$, když integrace přes proměnnou t probíhala pouze v intervalu $\left\langle -\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right\rangle$. Není tato podmínka zbytečně silná? Odpověď je záporná. Při integraci potřebujeme zaručit spojitost funkce $f(t)$ v celém intervalu, který probíhá její argument $t = g(x)$ pro všechna $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{6},\, \frac{5\pi}{6}\right\rangle$. Funkční hodnoty funkce $g(x) = \sin x$ v tomto případě probíhají interval $\langle -1,\, 1\rangle$, viz Obrázek 10.6.

Obecně můžeme říci, že interval $\langle A,\, B\rangle$ je množina všech hodnot funkce $g(x)$ pro $x \in \langle a,\, b\rangle$. Je-li funkce $g(x)$ monotónní na intervalu $\langle a,\, b\rangle$, potom samozřejmě množina $\langle A,\, B\rangle$ splývá s intervalem $\langle g(a),\, g(b)\rangle$. Zmíněná situace nastala třeba v Příkladu 10.12, ve kterém jsme položili $g(x) = \ln x$. Tato funkce je rostoucí, pro všechna $x \in \langle 1,\, \mathrm{e}\rangle$ je $0 \le \ln x \le 1$, proto stačilo ověřit spojitost funkce t^2 pouze na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ odpovídajícím množině $\langle \ln 1,\, \ln \mathrm{e}\rangle$. V případě Příkladu 10.13 není funkce $g(x) = \sin x$ monotónní v intervalu $\left\langle -\frac{5\pi}{6},\, \frac{5\pi}{6}\right\rangle$, pro všechna x z této množiny je $-1 \le \sin x \le 1$, proto jsme museli ověřit spojitost funkce t^2 v intervalu $\langle -1,\, 1\rangle$, nikoliv v intervalu $\langle -\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\rangle = \langle g(a),\, g(b)\rangle$.



Obrázek 10.6: Pro $x \in \langle a,\, b\rangle$ se funkční hodnoty funkce $t = g(x)$ nacházejí nikoliv v intervalu $\langle \alpha,\, \beta\rangle$, ale v intervalu $\langle A,\, B\rangle$.

10.14. Vypočteme hodnotu určitého integrálu **Příklad 10.14**

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Postupně použijeme oba možné způsoby výpočtu. Nejprve integrál vypočteme pomocí Definice 10.2.1, tj. pomocí primitivní funkce.

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} 1+x^2 &=& t \\ 2x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{1+x^2} + C$$

Potom je

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{1+1^2}\right) - \left(-\frac{1}{1+0^2}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Během druhého způsobu výpočtu využijeme Větu 10.2.9. Integrand si můžeme představit ve tvaru $\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$. Zavedeme proto substituci $g(x) = t = 1 + x^2$. Meze určitého integrálu po substituci budou

$$\alpha = g(0) = 1 + 0^2 = 1,$$
$$\beta = g(1) = 1 + 1^2 = 2.$$

Snadno ověříme, že pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$ jsou splněny předpoklady Věty 10.2.9. Funkce $f(t) = 1/t^2$ je spojitá v intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Funkce $g(x) = 1 + x^2$ a $g'(x) = 2x$ jsou spojité na $\langle 0, 1\rangle$ a pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$ je $1 \le g(x) = 1 + x^2 \le 2$. Potom je

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} 1+x^2 &=& t \\ 2x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

10.15. Vypočteme hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$ **Příklad 10.15**

Řešení: Primitivní funkci k integrandu jsme již vypočetli v Příkladu 9.13 na straně 431. V zmíněném příkladu jsou také uvedeny postřehy, které budeme využívat i při řešení tohoto integrálu. K výpočtu použijeme Větu 10.2.9. Funkce $x = \sin t$ má pro $t \in \left\langle 0,\, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ spojitou derivaci $\cos t$ a její funkční hodnoty probíhají interval $\langle 0,\, 1\rangle$. Platí tedy nerovnosti $0 \le x \le 1$. Funkce $\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$. Funkce $\sin t$

je rostoucí pro $t \in \langle 0,\ \frac{\pi}{2} \rangle$, je tedy $\alpha = \sin 0 = 0$ a $\beta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Potom je

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{\sin 0}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Pro $t \in \langle 0,\ \frac{\pi}{2} \rangle$ je $\cos t \geq 0$. Z toho důvodu jsme byli oprávněni během výpočtu použít rovnost $|\cos t| = \cos t$. Při výpočtu posledního integrálu jsme použili vztah (9.21) na straně 431 .

10.3 Použití určitého integrálu

V této kapitole se seznámíme s některými aplikacemi určitého integrálu. Nejprve zmíníme možnost výpočtu obsahu plochy.

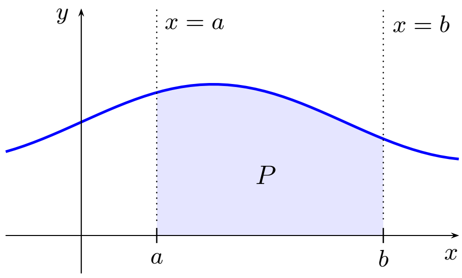
10.3.1 Obsah rovinné plochy

Při zavedení Riemannova určitého integrálu jsme naznačili souvislost hodnoty určitého integrálu s obsahem plochy ohraničené grafem funkce. V následující větě vymezíme, za kterých předpokladů odpovídá hodnota určitého integrálu obsahu plochy pod integrandem.

Věta 10.3.1. *Mějme funkci $f(x)$ spojitou a nezápornou na intervalu $\langle a,\ b\rangle$. Dále uvažujme plochu P, která je ohraničená grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, viz Obrázek 10.7. Potom obsah $S(P)$ plochy P je roven hodnotě určitého integrálu*

$$S(P) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.12}$$

Obsah plochy, jakožto geometrická veličina, by měl být vyjádřen v měrných jednotkách. Pokud zadání úlohy neumožňuje určit přirozené jednotky, uvádíme velikost obsahu plochy znakem „jednotka čtvereční“ a značíme symbolem j^2.



Obrázek 10.7: Plocha pod grafem funkce $f(x)$ ohraničená přímkami $x = a$ a $x = b$

Ověřme tvrzení Věty 10.3.1 několika jednoduchými příklady. V nich budeme uvažovat plochy, jejichž obsahy jsme schopni vypočítat i jiným způsobem než pomocí určitého integrálu. Budou to plochy známé z planimetrie, jako jsou například obdélník, trojúhelník a kružnice.

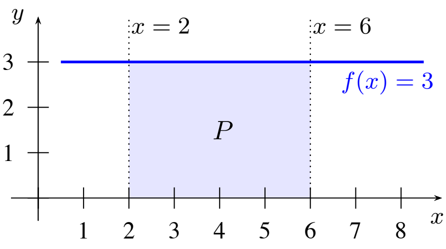
Příklad 10.16

10.16. Vypočteme obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = 3$, osou x a přímkami $x = 2$ a $x = 6$.

Řešení: Zadaná plocha je zobrazena na Obrázku 10.8. Je zřejmé, že se jedná o obdélník s délkou strany $d = 4$ a výškou $h = 3$. Jeho obsah je roven $S = d \cdot h = 4 \cdot 3 = 12$. Ověřme, že výpočet pomocí určitého integrálu poskytne stejný výsledek. Podle předpokladů Věty 10.3.1 je $f(x) = 3$, $a = 2$ a $b = 6$. Potom je

$$S(P) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^6 3\,\mathrm{d}x = \big[3x\big]_2^6 = 3 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 18 - 6 = 12\,\mathrm{j}^2.$$

Oběma přístupy jsme dostali stejný výsledek. Obsah plochy má velikost $S(P) = 12\,\mathrm{j}^2$.



Obrázek 10.8: Plocha pod grafem funkce $f(x) = 3$ ohraničená přímkami $x = 2$ a $x = 6$

Příklad 10.17

10.17. Vypočteme obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = \frac{1}{2}x$, osou x a přímkami $x = 0$ a $x = 4$.

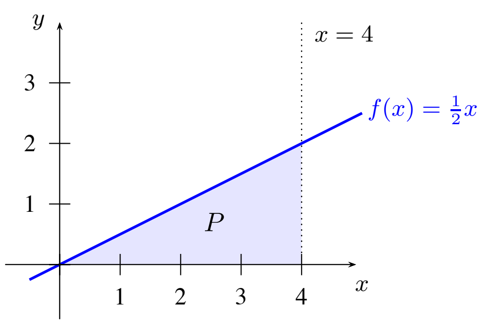
Řešení: Graf funkce je spolu se zadanou plochou zobrazen na Obrázku 10.9. Přímka s rovnicí $x = 0$ je shodná s osou y. V tomto případě je danou plochou pravoúhlý trojúhelník s délkou základny $d = 4$ a výškou $v = 2$. Potom pro obsah tohoto trojúhelníku platí

$$S(P) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4\,\mathrm{j}^2.$$

Tento výsledek porovnáme s hodnotou příslušného určitého integrálu. Podle předpokladů Věty 10.3.1 je $f(x) = \frac{1}{2}x$, $a = 0$ a $b = 4$. Potom je

$$S(P) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^4 = \frac{4^2}{4} - \frac{0^0}{4} = 4\,\mathrm{j}^2.$$

Oběma přístupy jsme opět dostali stejný výsledek. Obsah zadané plochy má velikost $S(P) = 4\,\mathrm{j}^2$.



Obrázek 10.9: Plocha pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{2}x$ ohraničená osou y a přímkou $x = 4$

Příklad 10.18

10.18. Pomocí vzorce pro obsah kruhu i pomocí určitého integrálu vypočteme obsah čtvrtiny jednotkového kruhu.

Řešení: Jednotkovým kruhem rozumíme kruh o poloměru $r = 1$. Vzorec pro výpočet obsahu kruhu zní $S = \pi r^2$. Dosazením do tohoto vzorce dostaneme

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \, \mathrm{j}^2.$$

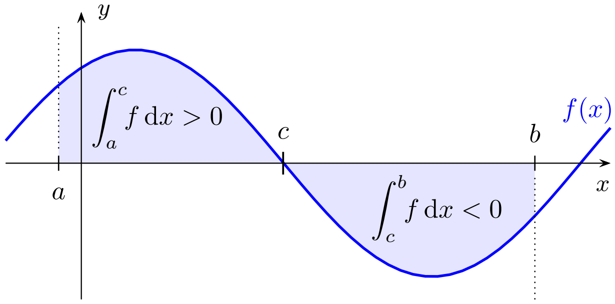
Čtvrtina jednotkového kruhu tedy má obsah rovný $S = \frac{\pi}{4} \, \mathrm{j}^2$. V Příkladu 5.6 na straně 215 jsme si ukázali, že grafem funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ je půlkružnice o poloměru $r = 1$. V analogii k zadané úloze tedy máme vypočítat obsah plochy pod grafem funkce $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ohraničené přímkami s rovnicemi $x = 0$ a $x = 1$. Tento obsah odpovídá hodnotě určitého integrálu $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x$, kterou jsme vypočítali v Příkladu 10.15. Podle tohoto příkladu je

$$S(P) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \, \mathrm{j}^2.$$

Obsah čtvrtiny jednotkového kruhu má hodnotu $S(P) = \frac{\pi}{4} \, \mathrm{j}^2$.

Ve všech dosud uvedených úlohách byla splněna podmínka, že v intervalu $\langle a, \, b \rangle$ je plocha ohraničena nezápornou funkcí. V následujících příkladech se zaměříme i na ty případy, kdy funkce v požadovaném intervalu nabývá zápornou hodnotu, tj. na ty případy, ve kterých se graf funkce nachází pod osou x. S odkazem na definici Riemannova určitého integrálu vidíme, že pokud je v intervalu $\langle a, \, b \rangle$ funkce f záporná, potom jsou při libovolném dělení intervalu $\langle a, \, b \rangle$ záporné i všechny výrazy $M_i \Delta x_i$, resp. $m_i \Delta x_i$. Tím pádem vyjdou záporné i hodnoty dolního a horního Riemannova integrálu, a pokud se tyto rovnají, je hodnota určitého integrálu v mezích od a do b záporná.

Z této úvahy vyplývá, že jsou-li všechny hodnoty funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, \, b \rangle$ záporné, potom hodnota určitého integrálu $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ odpovídá obsahu plochy P, ale s opačným znaménkem. Při výpočtu obsahu plochy proto musíme získanou hodnotu vynásobit číslem -1. Při výpočtu obsahu plochy pod grafem funkce f postupujeme



Obrázek 10.10: Rozložení intervalu $\langle a, b \rangle$ na úseky $\langle a, c \rangle$, resp. $\langle c, b \rangle$, ve kterých je funkční hodnota kladná, resp. záporná a jejich vliv na hodnotu určitého integrálu

tak, že interval $\langle a, \, b \rangle$ rozdělíme na podintervaly, na kterých je funkce f kladná, resp. záporná. V intervalech, ve kterých je funkce kladná, se řídíme Větou 10.3.1. V intervalech, ve kterých je funkce f záporná, položíme obsah plochy roven hodnotě příslušného určitého integrálu s opačným znaménkem. Například obsah vyznačené plochy na Obrázku 10.10 vypočteme pomocí vztahu

$$S(P) = \int\limits_a^c f(x) \, \mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

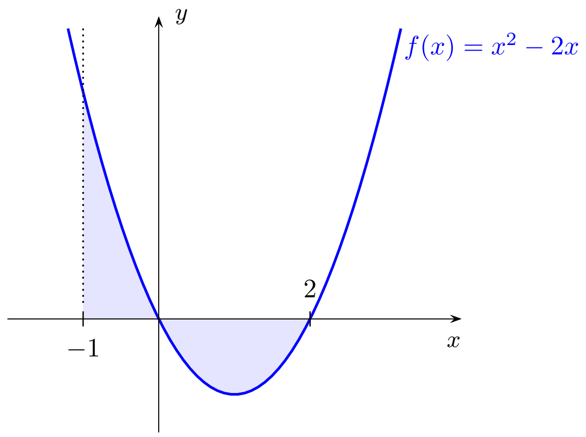
Příklad 10.19

10.19. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = x^2 - 2x$, osou x a přímkami $x = -1$ a $x = 2$, viz Obrázek 10.11.

Řešení: Nejprve zkusíme vypočítat hodnotu určitého integrálu $\int_{-1}^{2} x^2 - 2x \,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-1}^{2} x^2 - 2x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right)$$
$$= \frac{8}{3} - 4 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 1 = 0$$

Obsah zadané plochy však těžko může být roven nule, proto obsah plochy neodpovídá hodnotě vypočteného určitého integrálu. Je to z toho důvodu, že funkce $f(x)$ není na intervalu $\langle -1,\, 2\rangle$ pouze nezáporná. Ve skutečnosti je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle -1,\, 0\rangle$



Obrázek 10.11: Plocha ohraničená grafem funkce $f(x) = x^2 - 2x$, osou x a přímkami $x = -1$ a $x = 2$

nezáporná a na intervalu $\langle 0,\, 2\rangle$ nekladná. Pro obsah $S(P)$ plochy P proto platí

$$S(P) = \left(\int_{-1}^{0} x^2 - 2x \,\mathrm{d}x\right) - \left(\int_{0}^{2} x^2 - 2x \,\mathrm{d}x\right) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left[\left(\frac{0^3}{3} - 0^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right)\right] - \left[\left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0^2\right)\right]$$
$$= -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\,\mathrm{j}^2.$$

Obsah vyšetřované plochy je roven $\frac{8}{3}\,\mathrm{j}^2$.

Příklad 10.20

10.20. Nalezneme vzorec pro obsah elipsy s rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, resp. $b \in \mathbb{R}^+$ představuje délku hlavní, resp. vedlejší poloosy.

Řešení: Celá elipsa není grafem žádné funkce. Nicméně, omezíme-li se pouze na jednu její (pravou, horní) čtvrtinu, potom se jedná o plochu ohraničenou osou x, osou y a grafem funkce $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Pro obsah $S(P)$ čtvrtiny elipsy tak platí

$$\begin{aligned} S(P) &= \frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/2} |a|\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot a\,\cos t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = ab\left[\left(\frac{\pi}{4}+\frac{0}{4}\right) - \left(\frac{0}{2}+\frac{0}{4}\right)\right] = \frac{ab\pi}{4}\,\mathrm{j}^2. \end{aligned}$$

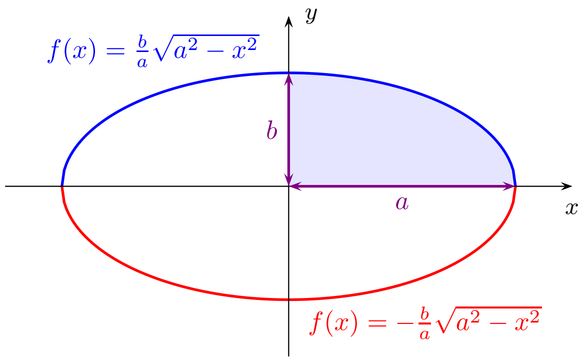
Při výpočtu jsme využili předpoklad $a \in \mathbb{R}^+$, který nás opravňoval k použití rovnosti $|a| = a$. Po substituci jsme přešli k novým mezím α a β, které jsme vypočítali ze substituce $x = \sin\alpha$.

$$\begin{array}{lcl} 0 = \sin\alpha & \Rightarrow & \alpha = 0 \\ 1 = \sin\beta & \Rightarrow & \beta = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je funkce $\cos t$ nezáporná, proto je $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$. Obsah jedné čtvrtiny elipsy vypočteme podle vztahu $S(P) = \frac{ab\pi}{4}$, pro obsah $S(E)$ celé elipsy platí

$$S(E) = 4\cdot S(P) = \pi\, a\, b. \tag{10.13}$$

Je známo, že kružnice s poloměrem r je speciální případ elipsy se shodnou délkou hlavní i vedlejší poloosy, je tedy $a = b = r$ a po dosazení do (10.13) dostaneme známý vzorec pro výpočet obsahu kruhu $S = \pi r^2$, což potvrzuje správnost výpočtu.



Obrázek 10.12: K výpočtu obsahu elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Příklad 10.21

10.21. Vypočteme, pro jakou hodnotu $t \in (0, \infty)$ je obsah $S(P)$ plochy P, ohraničené grafem funkce $f(x) = x^2$, osou x a přímkou $x = t$, rovno $S(P) = 9\,\mathrm{j}^2$.

Řešení: Funkce $f(x)$ je nezáporná na $\mathbb{R}$, proto bude obsah plochy P roven hodnotě určitého integrálu $\displaystyle\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x$. Naším úkolem tak je vyřešit rovnici $\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x = 9$ s neznámou t. Vyjádřením určitého integrálu dostaneme

$$9 = \int_0^t x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{t^3}{3}.$$

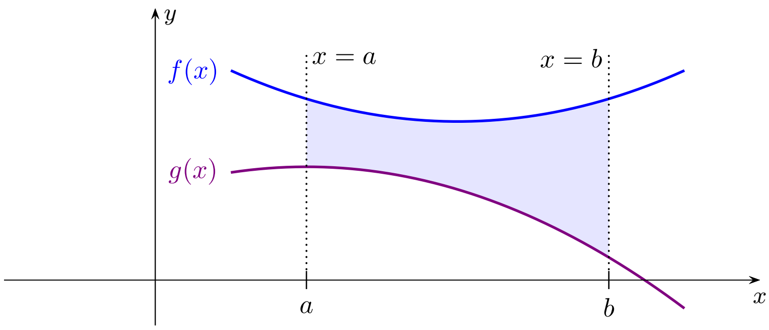
Tím jsme získali rovnici $\frac{t^3}{3} = 9$, jejímž řešením je $t = 3$. Obsah plochy P bude roven $9\,\mathrm{j}^2$ právě tehdy, bude-li $t = 3$. Pokud bychom hodnotu t neomezili na kladné hodnoty, potom by správným řešením byla i hodnota $t = -3$.

Jak jsme viděli v předchozí úloze, určitý integrál s jednou mezí ve formě proměnné t je vlastně funkce této proměnné, neboť hodnota určitého integrálu závisí právě na hodnotě t. V takovém případě pak mluvíme o integrálu jako funkci dolní, resp. horní meze.

Častou úlohou je výpočet obsahu plochy ohraničené grafy dvou funkcí. V takovém případě lze použít následující větu.

Věta 10.3.2. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a nechť pro všechna x z tohoto intervalu platí $f(x) \geq g(x)$, viz Obrázek* 10.13. *Potom pro obsah $S(P)$ plochy P, ohraničené grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$, platí*

$$S(P) = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x. \tag{10.14}$$



Obrázek 10.13: Plocha ohraničená grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$

10.22. Vypočteme obsah plochy, která je ohraničena grafy funkcí $f(x) = x+5$, $g(x) = 4 - x^2$ a přímkami $x = -1$ a $x = 1$. **Příklad 10.22**

Řešení: Nejprve musíme ověřit, že na celém intervalu $\langle -1,\, 1\rangle$ je splněna podmínka $f(x) \geq g(x)$. Řešením nerovnice $x + 5 \geq 4 - x^2$ jsou všechna $x \in \mathbb{R}$, proto i pro všechna $x \in \langle -1,\, 1\rangle$ je splněna nerovnost $f(x) \geq g(x)$. Obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité, proto jsou splněny obě podmínky Věty 10.3.2 a k výpočtu obsahu zadané plochy můžeme použít vzorec (10.14). Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} S(P) &= \int\limits_{-1}^{1} \big[(x+5) - (4 - x^2)\big]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}\,\mathrm{j}^2. \end{aligned}$$

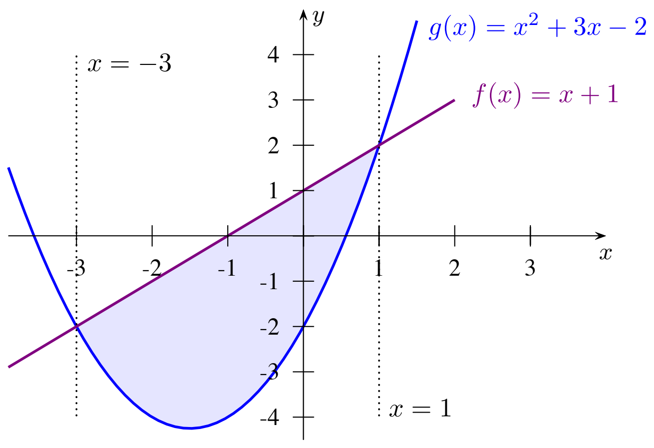
Obsah zadané plochy je roven $\frac{8}{3}\,\mathrm{j}^2$.

10.23. Vypočteme obsah plochy ohraničené grafy funkcí $g(x) = x^2 + 3x - 2$ a $f(x) = x + 1$. **Příklad 10.23**

Řešení: V zadání nejsou uvedeny svislé meze ve smyslu přímek $x = a$ a $x = b$. Můžeme proto předpokládat, že grafy funkcí mají společné průsečíky a tyto určují hranice plochy. Vypočteme polohu průsečíků obou grafů, tj. nalezneme hodnoty x, pro které je splněna rovnost $f(x) = g(x)$. Tyto vypočteme z rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 2 &= x + 1 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Řešením kvadratické rovnice (10.15) jsou hodnoty $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$, viz Obrázek 10.14. Nyní zjistíme vzájemnou polohu obou grafů. Je $f(0) = 1$ a $g(0) = -2$,



Obrázek 10.14: Plocha ohraničená grafy funkcí $f(x) = x^2 + 3x - 2$ a $g(x) = x + 1$

pro všechna $x \in \langle -3,\, 1\rangle$ tak platí nerovnost $f(x) \geq g(x)$ a výpočet obsahu plochy provedeme dosazením do vzorce (10.14).

$$
\begin{aligned}
S(P) &= \int\limits_{-3}^{1} \left[(x+1) - (x^2 + 3x - 2)\right] \mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} -x^2 - 2x + 3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1} = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - (9 - 9 - 9) = \frac{32}{3}\,\mathrm{j}^2
\end{aligned}
$$

Obsah plochy je roven $\frac{32}{3}\,\mathrm{j}^2$.

10.4 Numerický výpočet určitých integrálů

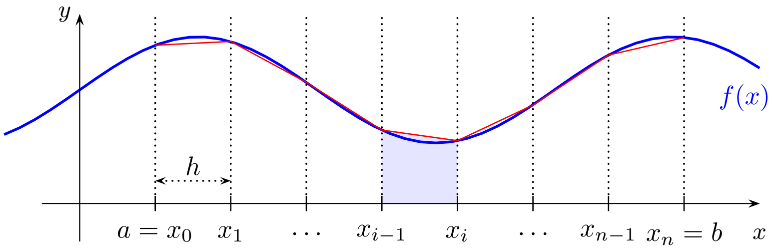
Na straně 443 byla zmíněna existence funkcí, ke kterým nelze vyjádřit příslušnou primitivní funkci. Potom není možné určit hodnotu (Newtonova) určitého integrálu. V takovém případě lze přesný výpočet nahradit metodou, která nám umožňuje vypočítat přibližnou hodnotu určitého integrálu. S takovým přístupem jsme se již setkali v Příkladu 10.2 na straně 440. Při řešení jsme naznačili způsob, kterým lze vypočítat hodnotu integrálu s požadovanou mírou přesnosti.

K výpočtu přibližné hodnoty určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se používají různé metody. Některé z nich spočívají v rozdělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$ na n podintervalů o délce $h = (b-a)/n$ a nahrazení částí grafu funkce na těchto podintervalech jinou funkcí - např. konstantní funkcí, lineární funkcí resp. kvadratickou funkcí. Pro dosažení odpovídající přesnosti je často zapotřebí provést velké množství aritmetických operací. Z tohoto důvodu se tyto metody řeší nejčastěji prostřednictvím počítačů s odpovídajím softwarem.

V následujících dvou odstavcích se seznámíme s dvěma metodami - lichoběžníkovou metodou a Simpsonovu (kvadratickou) metodou.

10.4.1 Lichoběžníková metoda

Lichoběžníková metoda spočívá v nahrazení funkce f v každém z intervalů $\langle x_{i-1},\, x_i\rangle$ lineární funkcí, viz Obrázek 10.15. Lineární funkce je jednoznačně určena, známe-li dva body, kterými prochází její graf. Za tyto body zvolíme krajní body funkce f v každém z intervalů $\langle x_{i-1},\, x_i\rangle$. Označme symbolem y_i funkční hodnotu funkce f v bodě x_i, je tedy $y_i = f(x_i)$. Potom v intervalu $\langle x_{i-1},\, x_i\rangle$ pro předpis uvažované lineární



Obrázek 10.15: Lichoběžníková metoda

funkce platí vztah

$$y = y_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \cdot (x - x_i), \quad \text{kde} \quad h = x_i - x_{i-1}.$$

Hodnota určitého integrálu z této lineární funkce v mezích od x_{i-1} do x_i odpovídá (až na znaménko) obsahu lichoběžníku v daném intervalu, viz Obrázek 10.15, přičemž pro obsah tohoto lichoběžníku platí

$$S_i = h \cdot \frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

Sečtením všech těchto obsahů S_i pro $i = 1, \dots, n$ dostaneme

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} + S_n \\ &= h \cdot \frac{y_1 + y_0}{2} + h \cdot \frac{y_2 + y_1}{2} + \ldots + h \cdot \frac{y_{n-1} + y_{n-2}}{2} + h \cdot \frac{y_n + y_{n-1}}{2} \\ &= \frac{h}{2} \cdot \big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\big). \end{aligned} \tag{10.16}$$

Ze způsobu odvození je zřejmé, že S_n je přibližnou hodnotou Riemannova určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Lze proto předpokládat, že jemnější dělení intervalu $\langle a,\, b\rangle$ povede k přesnějšímu odhadu hodnoty $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. S rostoucí hodnotou n (a tedy s klesající hodnotou h) se proto zmenšuje odchylka vypočtené přibližné hodnoty od skutečné hodnoty integrálu. Pro funkce, jejichž druhá derivace f'' je spojitá funkce v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a hodnota M představuje maximum funkce $|f''|$ v intervalu $\langle a,\, b\rangle$, lze odhadnout odchylku vypočtené přibližné hodnoty od skutečné hodnoty integrálu ve tvaru

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{b-a}{12} h^2 M.$$

Poznamenejme, že uvedený horní odhad představuje nejvyšší možnou hodnotu chyby za uvedených podmínek.

Příklad 10.24

10.24. Pomocí lichoběžníkového pravidla vypočteme přibližnou hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce $f(x) = e^{x^2}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a tedy i na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$, její primitivní funkce tedy existuje. Tato primitivní funkce však patří mezi ty, které nelze vyjádřit v uzavřeném tvaru[3]). Proto nelze k výpočtu hodnoty zadaného integrálu použít vztah (10.4) na straně 443 a jsme nuceni použít některou z numerických metod. Zvolíme $n = 10$. Potom je $h = \frac{b-a}{10} = 0,1$. V Tabulce 10.1 jsou uvedeny požadované hodnoty. Podle vzorce (10.16) potom je

[3]) Tím máme na mysli, že danou funkci je možné vyjádřit pouze jako součet nekonečně mnoha sčítanců.

x_i	x	x^2	y_0, y_{10}	$y_1, y_2, \ldots, y_8, y_9$
x_0	0	0	1	
x_1	0,1	0,01		1,0101
x_2	0,2	0,04		1,0408
x_3	0,3	0,09		1,0942
x_4	0,4	0,16		1,1735
x_5	0,5	0,25		1,2840
x_6	0,6	0,36		1,4333
x_7	0,7	0,49		1,6323
x_8	0,8	0,64		1,8965
x_9	0,9	0,81		2,2479
x_{10}	1	1	2,7183	
součet			3,7183	12,8126

Tabulka 10.1: Výpočet vybraných hodnot funkce $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x &\doteq \frac{h}{2} \cdot \big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\big) \\
&\doteq \frac{0,1}{2} \cdot \big((y_0 + y_{10}) + 2 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_7 + y_8 + y_9)\big) \\
&\doteq 0,05 \cdot (3,7183 + 2 \cdot 12,8126) \\
&\doteq 1,4672.
\end{aligned}
$$

Odhadneme, jaké chyby jsme se při výpočtu mohli nejvýše dopustit. Je $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$, $f''(x) = (4x^2 + 2)\,\mathrm{e}^{x^2}$. Funkce $f''(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a tedy i v intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$. Funkce $|f''(x)|$ je rostoucí v intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$, její maximum v tomto intervalu je rovno hodnotě $|f''(1)| = (4 \cdot 1^2 + 2) \cdot \mathrm{e}^{1^2} = 6\mathrm{e}$. Potom pro odhad chyby R platí

$$R \leq \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{0,01 \cdot 6\mathrm{e}}{12} = \frac{\mathrm{e}}{200} \doteq 0,0136.$$

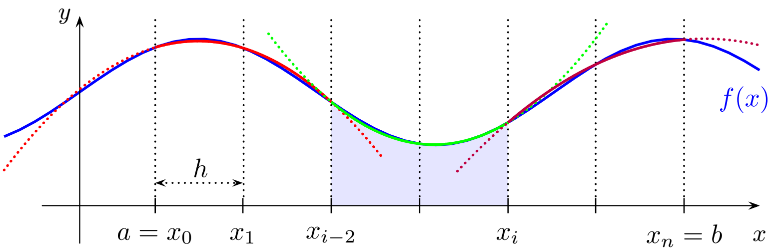
Hodnota určitého integrálu je přibližně $S = 1,4672$, přičemž odchylka od skutečné hodnoty je menší než $R = 0,0136$.

10.4.2 Simpsonova metoda

V této části uvedeme metodu, která poskytuje přesnější odhad hodnoty určitého integrálu než lichoběžníková metoda.

Předpokládejme, že interval $\langle a,\, b\rangle$ rozdělíme na n podintervalů, kde n je sudé číslo. Simpsonova metoda využívá při výpočtu přibližné hodnoty určitého integrálu nahrazení funkce f v každém z intervalů $\langle x_0,\, x_2\rangle$, $\langle x_2,\, x_4\rangle$, $\ldots$, $\langle x_{n-2},\, x_n\rangle$ kvadratickou funkcí, viz Obrázek 10.16. Pro každé sudé i vypočteme k bodům $[x_{i-2}, y_{i-2}]$, $[x_{i-1}, y_{i-1}]$ a $[x_i, y_i]$ předpis kvadratické funkce, která uvedenými body prochází, Potom lze vypočítat hodnotu určitého integrálu z této funkce v mezích od x_{i-2} do x_i. Tato hodnota je rovna

$$S_i = h \cdot \frac{y_{i-2} + 4y_{i-1} + y_i}{3}.$$



Obrázek 10.16: Simpsonova metoda

Sečtením všech hodnot $S_2, S_4, \ldots, S_n$ dostaneme přibližnou hodnotu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ve tvaru

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq S = \frac{h}{3} \cdot \big(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\big). \quad (10.17)$$

Rovnost (10.17) se často nazývá Simpsonův vzorec. Stejně jako u lichoběžníkového pravidla se použitím vzorce (10.17) dopouštíme možné chyby. Horní mez R této chyby je ohraničena vztahem

$$R = \left| S - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M,$$

který platí za předpokladu, že funkce f má v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ spojitou derivaci čtvrtého řádu a M je maximum funkce $|f^{(4)}|$ v intervalu $\langle a,\, b\rangle$.

Příklad 10.25

10.25. Pomocí Simpsonova vzorce vypočteme přibližnou hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand není definovaný v bodě $x = 0$, jako funkční hodnotu v tomto bodě proto budeme uvažovat limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. Potom je integrand funkce spojitá a dostatečně diferencovatelná na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$. Interval $\langle 0,\, 1\rangle$ rozdělíme na 10 stejných podintervalů, každý z nich má délku $h = \dfrac{1-0}{10} = 0,1$. V Tabulce 10.2 jsou uvedeny požadované hodnoty funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Podle vzorce (10.17) potom platí

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &\doteq \frac{h}{3} \cdot \big(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\big) \\
&\doteq \frac{0,1}{3} \cdot \big((y_0 + y_{10}) + 4 \cdot (y_1 + \ldots + y_9) + 2 \cdot (y_2 + \ldots + y_8)\big) \\
&\doteq \frac{1}{30} \cdot \big(1,8415 + 4 \cdot 4,7330 + 2 \cdot 3,8246\big) \\
&\doteq 0,9461.
\end{aligned}$$

Přibližná hodnota určitého integrálu činí $S = 0,9461$. Pouze pro informaci poznamenejme, že při výpočtu horního odhadu chyby zjistíme, že maximum $f^{(4)}$ na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$ je rovno $M = \frac{1}{5}$. Potom pro horní odhad chyby platí

$$R \leq \frac{b-a}{180} h^4 M = \frac{1}{180} \cdot (0,1)^4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{9\,000\,000} = 1,\overline{1} \cdot 10^{-7},$$

což je přesnost na větší počet desetinných míst, než jsme uváděli při samotném výpočtu.

10.5 Použití určitého integrálu v aplikačních úlohách

10.5.1 Přebytek spotřebitele a výrobce

Je-li dokonale konkurenční trh efektivní, znamená to, že maximalizuje prospěch všech účastníků. Při analýze hospodářské politiky je často užitečné odhadnout skutečnou ve-

x_i	x	y_0, y_{10}	y_1, y_3, y_5, y_7, y_9	y_2, y_4, y_6, y_8
x_0	0	1		
x_1	0,1		0,9983	
x_2	0,2			0,9933
x_3	0,3		0,9851	
x_4	0,4			0,9735
x_5	0,5		0,9589	
x_6	0,6			0,9411
x_7	0,7		0,9203	
x_8	0,8			0,8967
x_9	0,9		0,8704	
x_{10}	1	0,8415		
součet		1,8415	4,7330	3,8246

Tabulka 10.2: Výpočet vybraných hodnot funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

likost přínosu, který spotřebitelé a výrobci získávají svou účastní na určitých trzích. V knize [7] str. 401, je uveden příklad vlády jisté země třetího světa, která ví, že když postaví dálnici od pobřeží do vnitrozemí, zpřístupní tím nové trhy potravin přicházejících z moře. Rozhodnutí vlády o výstavbě dálnice závisí na tom, zda prospěch, který nový trh přinese spotřebitelům i dodavatelům, převýší náklady na výstavbu dálnice.

Míru prospěchu, kterou spotřebitel získává účastí na tržní směně, nazýváme *přebytek spotřebitele* a značíme S_c. Při rovnovážném stavu mezi poptávaným a nabízeným množstvím stále existují spotřebitelé, kteří jsou ochotni zaplatit za zboží cenu vyšší, než je rovnovážná cena. Předpokládejme, že funkce poptávky po jistém druhu zboží je popsána rovnicí

$$p = 10 - q,$$

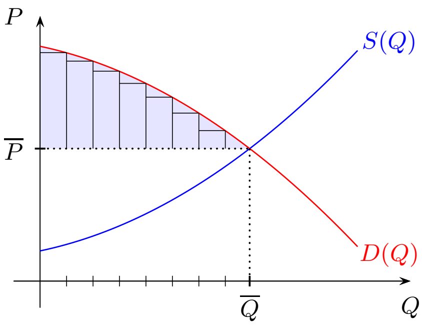
kde q je poptávané množství při ceně p. Z funkce poptávky je zřejmé, že jeden spotřebitel je ochoten nakupovat za cenu 9 Kč, o jednoho spotřebitele víc je ochotno vydat za jednotku zboží 8 Kč atd. Pokud se zboží prodává za 5 Kč, potom první uvedený spotřebitel ušetřil 4 Kč, druhý 3 Kč atd. Zboží koupí celkem pět zákazníků, přičemž čtyři z nich platí nižší cenu, než za jakou jsou ochotni nakupovat. Celkově tak zákazníci ušetří $(4 + 3 + 2 + 1)$ Kč. Přebytek spotřebitele je roven 10 Kč.

Situace je v obecném případě popsána na Obrázku 10.17(a). Hodnota funkce poptávky $D(q)$ vyjadřuje nejvyšší částku, kterou je daný počet spotřebitelů ochoten zaplatit za jednotku zboží. Odečteme-li od této hodnoty nákupní cenu $\overline{p}$ a sečteme-li výsledné rozdíly pro každé množství až do prodejní ceny, dostaneme přibližnou hodnotu obsahu vyznačené plochy. Pokud použijeme určitý integrál, získáme přesnou hodnotu obsahu vyznačené oblasti. Přebytek spotřebitele S_c potom vypočteme ze vztahu

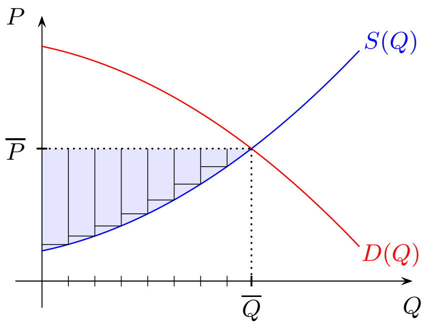
$$S_c = \int_0^{\overline{q}} (D(q) - \overline{p})\, \mathrm{d}q,$$

kde $D(q)$ je funkce poptávky, $\overline{q}$ je množství zboží prodaného za cenu $\overline{p}$.

Analogií k přebytku spotřebitele je *přebytek výrobce* S_p. Tento pojem je založen na myšlence, že při dané funkci nabídky $p = S(q)$, kde p je současná cena a q je odpovídající nabízené množství zboží, existují výrobci, kteří jsou ochotni dodat jisté množství zboží za nižší cenu. Přebytek výrobce S_p potom odpovídá příjmu plynoucího



(a) Přebytek spotřebitele



(b) Přebytek výrobce

Obrázek 10.17: Přebytek spotřebitele a výrobce

z toho, že se zboží prodává za vyšší cenu. Je tedy

$$S_p = \int_0^{\overline{q}} (\overline{p} - S(q))\,\mathrm{d}q. \tag{10.18}$$

Celkový prospěch S všech účastníků z tržní směny je roven součtu přebytků spotřebitele a výrobce, je tedy

$$\begin{aligned} S = S_c + S_p &= \int_0^{\overline{q}} (D(q) - \overline{p})\,\mathrm{d}q + \int_0^{\overline{q}} (\overline{p} - S(q))\,\mathrm{d}q \\ &= \int_0^{\overline{q}} (D(q) - S(q))\,\mathrm{d}q, \end{aligned}$$

kde $D(q)$ znamená funkci poptávky, $S(q)$ je funkce nabídky a $\overline{q}$ značí množství prodaného zboží.

10.26. Vypočtěte hodnotu přebytku spotřebitele, jestliže se jednotka zboží prodává za cenu $\overline{p} = 30$ Kč a funkce poptávky má tvar $p = 50 - \dfrac{q}{10}$, kde p je cena v Kč a q je množství prodaného zboží. **Příklad 10.26**

Řešení: Nejprve zjistíme množství prodaného zboží $\overline{q}$ při ceně 30 Kč.

$$\begin{aligned} \overline{p} &= 50 - \frac{\overline{q}}{10} && \text{\dots\ \textit{vyjádření rovnice poptávky}} \\ 30 &= 50 - \frac{\overline{Q}}{10} && \text{\dots\ \textit{dosazení konkrétních hodnot}} \\ \frac{\overline{q}}{10} &= 20 && \text{\dots\ \textit{algebraická úprava}} \\ \overline{q} &= 200 && \text{\dots\ \textit{vyjádření hodnoty} } \overline{q} \end{aligned}$$

Výpočtem jsme zjistili, že při ceně 30 Kč se prodá 200 kusů zboží. Pro přebytek spotřebitele platí

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^{200} (D(q) - \overline{p})\,\mathrm{d}q = \int_0^{200} \left(50 - \frac{q}{10} - 30\right)\mathrm{d}q \\ &= \int_0^{200} \left(20 - \frac{Q}{10}\right)\mathrm{d}q = \left[20q - \frac{q^2}{20}\right]_0^{200} = 4\,000 - 2\,000 = 2\,000. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že přebytek spotřebitele je roven 2 000 Kč.

10.27. Funkce poptávky $D(q)$ po mléku je dána vztahem $p = 25 - q$, kde q je poptávané množství lahví mléka při ceně p. O kolik se změní přebytek spotřebitele, jestliže se cena mléka zvedne ze 12 Kč na 14 Kč. Předpokládejme, že důchodový efekt ze zvýšení ceny mléka je bezvýznamný, takže k výpočtu spotřebitelského přebytku lze využít funkci poptávky před i po zvýšení ceny mléka. **Příklad 10.27**

Řešení: Nejprve vypočteme množství prodaného mléka při cenách 12 Kč a 14 Kč.

$$\begin{aligned}\overline{p} &= 25 - \overline{q} \\ 12 &= 25 - \overline{q} \\ \overline{q} &= 13,\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\overline{p} &= 25 - \overline{q} \\ 14 &= 25 - \overline{q} \\ \overline{q} &= 11.\end{aligned}$$

Změna přebytku spotřebitele při obou cenách je dána vztahem

$$\begin{aligned}\Delta S_c &= \int_0^{11} \Big((25-q)-14\Big)\,\mathrm{d}q - \int_0^{13} \Big((25-q)-12\Big)\,\mathrm{d}q \\ &= \int_0^{11} (11-q)\,\mathrm{d}q - \int_0^{13} (13-q)\,\mathrm{d}q = \left[11q - \frac{q^2}{2}\right]_0^{11} - \left[13q - \frac{q^2}{2}\right]_0^{13} \\ &= \left(11^2 - \frac{11^2}{2}\right) - \left(13^2 - \frac{13^2}{2}\right) = \frac{11^2 - 13^2}{2} = -24.\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že při zvýšení ceny mléka dojde ke snížení přebytku spotřebitele o 24 Kč.

Příklad 10.28

10.28. Funkce nabídky po zboží je dána vztahem

$$p = S(q) = 4 + \frac{q^2}{100}.$$

Určete přebytek výrobce, jestliže se zboží prodává při ceně 40 Kč za kus.

Řešení: Vypočteme množství nabízeného zboží při ceně 40 Kč.

$$\begin{aligned}P &= 4 + \frac{q^2}{100} \\ 40 &= 4 + \frac{q^2}{100} \\ 36 &= \frac{q^2}{100} \\ q^2 &= 3\,600 \\ q &= 60\end{aligned}$$

Kořen $q = -60$ neuvažujeme, vzhledem k předpokladu $q \geq 0$. Potom pro přebytek výrobce platí

$$\begin{aligned}S_p &= \int_0^{60} \left(40 - \left(4 + \frac{q^2}{100}\right)\right)\mathrm{d}q = \int_0^{60} \left(36 - \frac{q^2}{100}\right)\mathrm{d}q = \left[36q - \frac{q^3}{300}\right]_0^{60} \\ &= 36 \cdot 60 - \frac{60^3}{300} = 1\,440.\end{aligned}$$

Přebytek výrobce činí 1 440 Kč.

Příklad 10.29

10.29. Nalezněte rovnovážnou cenu $\overline{p}$, množství zboží prodávaného $\overline{q}$ za rovnovážnou cenu a celkový přebytek S, jsou-li dány funkce poptávky, resp. nabídky $p = D(q)$, resp. $p = S(q)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}p &= D(q) = 25 - \frac{q^2}{1\,000}, \\ p &= S(q) = 5 + \frac{q}{10}.\end{aligned}$$

Řešení: Při rovnováze na trhu je $\overline{p} = D(\overline{q}) = S(\overline{q})$. Nalezneme tedy q, pro které mají funkce poptávky a nabídky stejnou hodnotu.

$$\begin{aligned}D(q) &= S(q) \\ 25 - \frac{q^2}{1\,000} &= 5 + \frac{q}{10} \\ 20 &= \frac{q^2}{1\,000} + \frac{q}{10} \\ q^2 + 100\,q - 20\,000 &= 0\end{aligned}$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou $q_1 = -200$ a $q_2 = 100$. Kořen $q_1 = -200$ nebudeme uvažovat vzhledem k předpokladu $q \geq 0$. Při rovnováze na trhu se bude prodávat 100 kusů zboží. Nyní můžeme dosazením do předpisu $p = D(q)$, resp. $p = S(q)$ určit cenu, za jakou se bude zboží prodávat.

$$\overline{p} = D(100) = 25 - \frac{100^2}{1\,000} = 25 - 10 = 15 \text{ Kč}$$
$$\overline{p} = S(100) = 5 + \frac{100}{10} = 5 + 10 = 15 \text{ Kč}$$

K výpočtu $\overline{p}$ stačilo určit hodnotu dosazením pouze do jedné funkce, my jsme výpočet pro kontrolu provedli dosazením do obou funkcí. Vypočteme celkový přebytek.

$$S = \int_0^{100} \left(25 - \frac{q^2}{1\,000} - \left(5 + \frac{q}{10}\right)\right) \mathrm{d}q = \int_0^{100} \left(20 - \frac{q}{10} - \frac{q^2}{1\,000}\right) \mathrm{d}q$$
$$= \left[20\,q - \frac{q^2}{20} - \frac{q^3}{3\,000}\right]_0^{100} = 2\,000 - \frac{10\,000}{20} - \frac{1\,000\,000}{3\,000} = \frac{7\,000}{6} \doteq 1167 \text{ Kč}$$

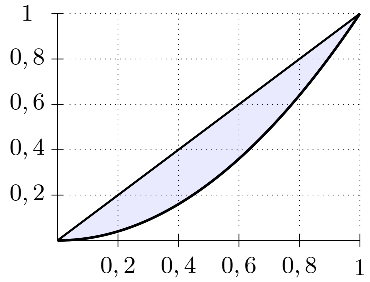
Zjistili jsme, že při rovnováze na trhu se bude prodávat 100 kusů zboží za cenu 15 Kč a celkový přebytek účastníků trhu bude (po zaokrouhlení) 1 167 Kč.

10.5.2 Lorenzova křivka

Lorenzovu křivku používáme k měření nerovností v rozdělení bohatství. Můžeme se ptát: Jsou příjmy domácností rozděleny rovnoměrněji v Česku nebo na Slovensku? Jak je rozděleno vlastnictví půdy v Česku? Jak jsou rozděleny světové zásoby ropy ve všech zemích světa?

Na právě položené otázky navrhl v roce 1905 americký ekonom a statistik MAX OTTO LORENZ (1880 – 1962) odpověď ve formě grafického vyjádření. Roztřídil a seřadil nositele znaku podle vlastněného množství sledovaných statků. Je-li například sledovaným znakem příjem, tak všechny jedince ve společnosti seřadíme podle velikosti jejich příjmu. Nejprve uvedeme ty, kteří nemají nic. Pak se postupně do grafu vyjádří, že $x\,\%$ nejchudších jedinců má $y\,\%$ procent celkových příjmů společnosti. Např. $5\,\%$ populace má $0\,\%$ z celkového příjmu, $10\,\%$ populace má $2\,\%$ z celkového příjmu společnosti, $15\,\%$ populace má $5\,\%$ z celkového příjmu atd. Zaneseme-li zjištěné údaje do grafu, ve kterém vodorovná osa znamená procentuální část populace a svislá osa označuje počet procent celkového příjmu, dostaneme tzv. Lorenzovu křivku, viz Obrázek 10.18.

Zmíníme některé vlastnosti Lorenzovy křivky. Tato prochází vždy body o souřadnicích $[0,\,0]$ a $[1,\,1]$. Je to dáno tím, že $0\,\%$ populace dosahuje $0\,\%$ celkových příjmů a $100\,\%$ populace dosahuje veškerých příjmů populace, tedy $100\,\%$ celkových příjmů. Křivka je „rostoucí", neboť není možné, aby větší část populace, která je seřazena dle



Obrázek 10.18: Lorenzova křivka a míra nerovnosti

velikosti příjmu, měla menší příjem než menší část takto seřazené populace. Křivka leží pod grafem funkce $y = x$, protože $x\,\%$ nejchudších nemůže mít více než $x\,\%$ celkových příjmů. Současně je křivka konvexní, neboť podíl celkových příjmů, který připadá na jednotlivé příjemce, musí s rostoucím příjmem růst.

Čím je Lorenzova křivka prohnutější, tím větší nerovnost v rozdělení příjmu (majetku, bohatství) panuje. Proto se ke kvantitativnímu vyjádření této nerovnosti používá obsah plochy mezi Lorenzovou křivkou a grafem funkce $y = x$. Velikost této plochy musí být v rozmezí od 0 do $1/2$. Jsou dva extrémní případy: příjem je rozdělen naprosto rovnoměrně, tj. všichni dosahují stejného příjmu, nebo je příjem rozdělen naprosto nerovnoměrně, tj. veškerý příjem (majetek, bohatství) má jediná osoba a ostatní nemají nic. V prvním případě Lorenzova křivka splývá s grafem funkce $y = x$, v druhém případě je Lorenzova křivka totožná s osou x až do bodu $100\,\%$, kdy „odskočí" na hodnotu 1 (tj. $100\,\%$ celkového majetku).

Míra nerovnosti G je definována jako poměr plochy mezi grafem funkce $y = x$ a Lorenzovou křivkou k obsahu plochy pod grafem funkce $y = x$. Obsah plochy pod grafem funkce $y = x$ je roven $1/2$, z toho plyne, že míra nerovnosti je rovna dvojnásobku plochy ohraničené Lorenzovou křivkou a grafem funkce $y = x$, a nabývá proto hodnoty od 0 do 1. Poznamenejme, že někdy se míra nerovnosti také nazývá *Giniho koeficient*. Jestliže je $y = f(x)$ rovnicí Lorenzovy křivky, potom pro míru nerovnosti G platí

$$G = 2\int_0^1 \big(x - f(x)\big)\,\mathrm{d}x. \tag{10.19}$$

Pro srovnání uveďme hodnoty míry nerovnosti příjmu rodin ve vybraných zemích světa. Nejnižší hodnoty Giniho koeficientu lze tradičně nalézt ve Skandinávských zemích, nejvyšší hodnoty nalezneme v jižní a střední Africe. Průměrná hodnota v EU je dlouhodobě odhadována na $G \doteq 0,31$. V Tabulce 10.3 jsou uvedeny hodnoty Giniho indexu zjištěné ve dvou po sobě jdoucích měřeních (je uveden také rok měření). Je tak možné určit nejen hodnotu G, ale také trend vývoje indexu.

stát	G_1		G_2	
Švédsko	$0,230$	(1992)	$0,250$	(2005)
Česká republika	$0,254$	(1996)	0,310	(2009)
Rusko	$0,399$	(2001)	0,417	(2011)
USA	$0,408$	(1997)	$0,450$	(2007)
Čína	$0,484$	(2007)	$0,474$	(2012)
Namíbie	$0,707$	(2003)	$0,597$	(2010)

Tabulka 10.3: Giniho koeficient pro vybrané země dle *CIA, The World Factbook*

Příklad 10.30

10.30. Vypočtěte míru nerovnosti rozdělení příjmů v populaci pro Lorenzovu křivku s rovnicí $y = \dfrac{4x^2}{5} + \dfrac{x}{5}$.

Řešení: S použitím vzorce (10.19) dostaneme

$$G = 2\int_0^1 \left(x - \left(\frac{4x^2}{5} + \frac{x}{5}\right)\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(\frac{4x}{5} - \frac{4x^2}{5}\right)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{2x^2}{5} - \frac{4x^3}{15}\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{15}\right) = \frac{4}{15}.$$

Míra nerovnosti je v tomto případě rovna $4/15$, tedy $0,2\overline{6}$. Tato hodnota představuje celkem malou nerovnoměrnost v rozložení příjmů v populaci, příjmy jsou v populaci víceméně rovnoměrně rozdělené.

Příklad 10.31

10.31. Během výzkumu se zjišťoval celkový příjem domácností v jisté společnosti. V Tabulce 10.4 jsou uvedeny výsledky, kde v prvním řádku je uveden počet procent populace, která má procentuální podíl na celkovém příjmu nižší nebo stejný, než je odpovídající údaj v druhém řádku tabulky. Z Tabulky 10.4 je zřejmé, že $10\,\%$ populace má nejvýše $1,27\,\%$ celkových příjmů společnosti, $20\,\%$ populace dosahuje nejvýše na

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	0	$1,27$	$3,36$	$6,69$	$11,68$	$18,75$	$28,32$	$40,81$	$56,64$	$76,23$	100

Tabulka 10.4: Rozdělení celkových příjmů domácností

$3,36\,\%$ celkových příjmů společnosti atd. Vypočteme míru nerovnosti rozdělení příjmu v této společnosti.

Řešení: V tomto případě neznáme předpis pro rovnici Lorenzovy křivky. Není proto možné použít vzorec (10.19). Z tabulky však známe některé funkční hodnoty. Nabízí se použít Simpsonův vzorec (10.17) ze strany 459, což také uděláme. Označme rovnici Lorenzovy křivky $y = f(x)$, $i = x/10$ a $f_i = [f(x)]/100\%$. Je tedy $f_0 = f(0) = 0$, $f_1 = f(10) = 0,0127$ atd. Potom je

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &\doteq \frac{h}{3}\left[\big(f_0+f_{10}\big)+2\big(f_2+f_4+f_6+f_8\big)+4\big(f_1+f_3+f_5+f_7+f_9\big)\right] \\
&= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\left[\big(0+1\big)+2\,\big(0,0336+0,1168+0,2832+0,5664\big)+\right. \\
&\quad \left. +\;4\,\big(0,0127+0,0669+0,1875+0,4081+0,7623\big)\right] \\
&= \frac{1}{30}\left[1+2\cdot 1+4\cdot 1,4375\right] = \frac{875}{3000}.
\end{aligned}
$$

Nyní využijeme následující rovnosti

$$G = 2\int_0^1 \big(x - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left[\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

Snadno ověříme rovnost $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1/2$. Potom je

$$G = 2\cdot\left[\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right] = 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{875}{3000}\right) \doteq 0,4167.$$

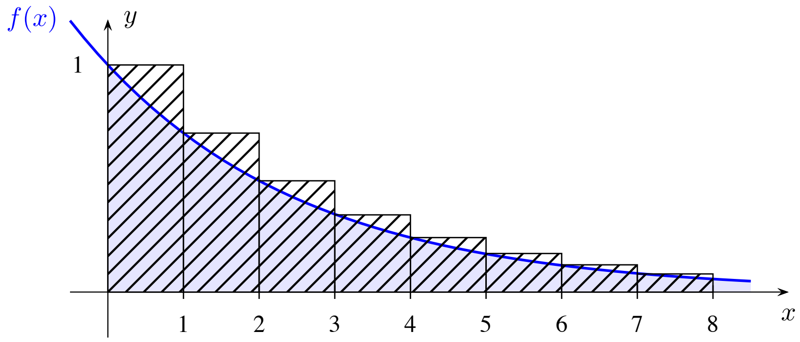
Míra nerovnosti je v tomto případě přibližně rovna $G = 0,4167$.

10.6 Nevlastní integrál

V této kapitole se budeme zabývat speciálním případem integrálu, který má široké uplatnění např. v teorii pravděpodobnosti. Jeho uplatnění lze ale samozřejmě nalézt i v ostatních oblastech matematiky a ostatních věd.

Dosud jsme při výpočtu určitých integrálů předpokládali, že jsou splněny jisté požadavky. Mezi ně patřila podmínka ohraničenosti funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a také to, že interval $\langle a, b\rangle$ je omezená množina. Nyní se zaměříme na ty případy, ve kterých není některá z těchto podmínek splněna.

V následujícím příkladu se budeme snažit odhadnout obsah plochy pod grafem funkce $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$, která je zleva ohraničena osou y a zprava není omezena, tj. horní mez leží v nekonečnu. Situace je schematicky znázorněna na Obrázku 10.19. Lze nahlédnout, že obsah vyšetřované plochy bude nižší než obsah vyšrafované plochy skládající se z obdélníků. Každý z uvedených obdélníků má šířku rovnu jedné a jeho výška odpovídá funkční hodnotě funkce $f(x)$ v bodě, ve kterém leží levý dolní roh



Obrázek 10.19: Obsah plochy, která není zprava ohraničená

obdélníku. Potom pro součet obsahů všech těchto obdélníku platí

$$
\begin{aligned}
S &= f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + f(4)\cdot 1 + f(5)\cdot 1 + \dots \\
&= \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 1 + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \dots \\
&= 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots \\
&= 1,1111\dots = 1,\overline{1}.
\end{aligned}
$$

Součet obsahů všech (nekonečně mnoha) obdélníků je roven (konečně velké) hodnotě $S = 1,1\,\mathrm{j}^2$. Obsah plochy pod grafem funkce $f(x)$ tedy musí mít konečně velkou hodnotu, přestože šířka této plochy je nekonečně velká.

Tento překvapivý závěr nám umožní pochopit pojem nevlastního integrálu. Vzhledem k tomu, že uvažovaná funkce $f(x)$ je nezáporná na $\mathbb{R}$, odpovídá obsah plochy (s konečnými mezemi) hodnotě určitého integrálu funkce f v těchto (konečných) mezích. Pokud některá z mezí integrálu není omezená, potom již nehovoříme o určitém integrálu, ale o tzv. *nevlastním integrálu, konkrétně o nevlastním integrálu vlivem meze*.

10.6.1 Nevlastní integrál vlivem meze

Již víme, že nevlastním integrálem vlivem meze rozumíme integrál, u kterého alespoň jedna jeho mez leží v nekonečnu. Značíme je symboly

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice 10.6.1. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a,\, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a že existuje konečná (vlastní) limita

$$\lim_{t\to\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.20}$$

Potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje (je konvergentní) a pro jeho hodnotu platí rovnost

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.21}$$

Definice 10.6.2. V případě, že neexistuje konečná limita (10.20) (tj. limita ve vzorci (10.20) neexistuje, nebo je nevlastní), říkáme, že nevlastní integrál diverguje (je divergentní). Analogicky se definuje konvergence nevlastního integrálu $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Při výpočtu hodnoty nevlastního integrálu postupujeme tak, že nejprve vyjádříme určitý integrál $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ jakožto funkci horní meze t (viz Příklad 10.21 na straně 454) a poté vypočteme limitu této funkce pro $t \to \infty$.

10.32. Vypočteme hodnotu nevlastního integrálu **Příklad 10.32**

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}. \tag{10.22}$$

Řešení: Integrál (10.22) představuje nevlastní integrál vlivem (horní) meze. Již víme, že funkce $f(x) = 1/x^2$ je integrovatelná na každém intervalu $\langle 1, t\rangle$, kde $1 < t$. Nejprve vyjádříme určitý integrál jakožto funkci horní meze.

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_1^t x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \left(-\frac{1}{t}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{t}$$

Dosazením do (10.21) dostaneme

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Existuje konečná limita s hodnotou 1 a zadaný nevlastní integrál tedy konverguje a jeho hodnota je rovna 1.

10.33. Vypočteme hodnotu nevlastního integrálu **Příklad 10.33**

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}. \tag{10.23}$$

Řešení: Funkce $f(x) = 1/\sqrt{x}$ je opět integrovatelná na každém intervalu $\langle 1,\ t\rangle$. Vyjádříme určitý integrál jakožto funkci horní meze.

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_1^t x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^t = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^t = 2\left(\sqrt{t} - 1\right)$$

Vypočteme hodnotu příslušné limity.

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{t\to\infty} \left(\sqrt{t} - 1\right) = \infty$$

Tato limita je nevlastní, proto není splněna podmínka existence vlastní limity z Definice 10.6.1 a nevlastní integrál (10.23) diverguje.

10.34. Zjistíme, pro jaké hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ konverguje nevlastní integrál **Příklad 10.34**

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}. \tag{10.24}$$

Řešení: Funkce $f(x) = 1/x^p$ je na intervalu $\langle 1,\, t\rangle$ integrovatelná pro všechny hodnoty $p \in \mathbb{R}$. Pro všechna $p \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ je

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t.$$

Předpokládejme, že $p \in (1,\, \infty)$. Výraz $p-1$ je potom kladný a platí

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{1}{1-p}\cdot\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^t =$$
$$= \frac{1}{1-p}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - \frac{1}{1^{p-1}}\right) = \frac{1}{1-p}\cdot(0-1) = \frac{1}{p-1},$$

neboť pro $p \in (1,\, \infty)$ je $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^{p-1}}\right) = 0$ a $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1^{p-1}}\right) = 1$. Pro $p \in (1,\, \infty)$ tak integrál (10.24) konverguje a platí rovnost

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{p-1}, \qquad p \in (1, \infty).$$

Nyní se budeme zabývat případem $p \in (-\infty,\, 1)$. Potom je výraz $1-p$ kladný a platí

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\cdot\lim_{t\to\infty}\left[x^{1-p}\right]_1^t = \frac{1}{1-p}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(t^{1-p}-1\right) = \infty,$$

neboť pro $p \in (-\infty,\, 1)$ je $\lim\limits_{t\to\infty}\left(t^{1-p}-1\right) = \infty$. Pro $p \in (-\infty,\, 1)$ neexistuje vlastní limita a integrál (10.24) diverguje.

Zbývá vyšetřit případ $p = 1$. Potom je $1/x^p = 1/x$ a platí

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty}\left[\ln x\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\ln t - \ln 1\right) = \lim_{t\to\infty}\ln t = \infty.$$

Zjistili jsme, že pro $p \in (-\infty,\, 1\rangle$ integrál (10.24) diverguje.

V následující části se zaměříme na případ, kdy jsou obě meze integrálu tzv. singulární, tj. obě leží v nekonečnu. Při výpočtu nevlastního integrálu ve tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.25}$$

postupujeme tak, že zvolíme vhodný bod $c \in \mathbb{R}$ a vypočteme hodnoty integrálů

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.26}$$

Konvergují-li oba integrály v (10.26), potom říkáme, že integrál (10.25) konverguje a platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.27}$$

Jestliže alespoň jeden z integrálů v (10.26) diverguje, potom říkáme, že integrál (10.25) neexistuje.

V případě, že funkce $f(x)$ je lichá a oba integrály v (10.26) konvergují, platí rovnost $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a pro nevlastní integrál pak dostaneme rovnost

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{10.28}$$

V případě, že funkce $f(x)$ je sudá a oba integrály v (10.26) konvergují, platí rovnost $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a pro nevlastní integrál pak dostaneme rovnosti

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.29}$$

10.35. Vypočteme hodnotu nevlastního integrálu

Příklad 10.35

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. \tag{10.30}$$

Řešení: Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, proto je také na $\mathbb{R}$ integrovatelná. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = f(x).$$

Funkce $f(x)$ je sudá, proto stačí ověřit konvergenci integrálu $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ a k výpočtu hodnoty integrálu (10.30) použít vzorec (10.29). Je

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

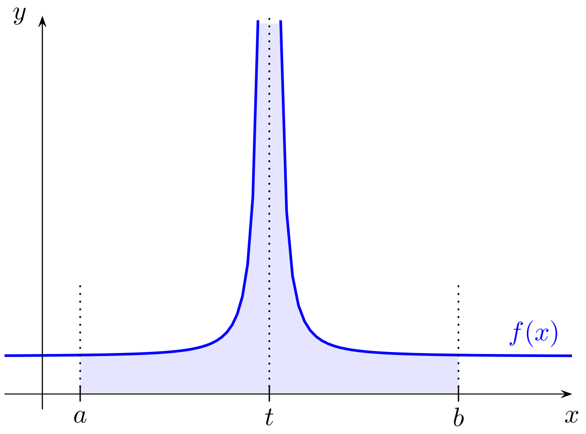
neboť $\operatorname{arctg} 0 = 0$ a $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$. Integrál $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ tedy konverguje a jeho hodnota je rovna $\pi/2$. Potom konverguje i nevlastní integrál $\int_{-\infty}^0 1/(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ a použitím vzorce (10.29) dostaneme

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\cdot\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Integrál (10.30) tedy konverguje a jeho hodnota činí π.

10.6.2 Nevlastní integrál vlivem funkce

Nyní se budeme zabývat dalším případem, ve kterém nejsou splněny podmínky pro existenci určitého integrálu. Tímto požadavkem byla omezenost funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\, b\rangle$. Nyní dáme smysl i případům, kdy tento požadavek není splněn, tj. v případě, že v jistém bodě $t \in \langle a,\, b\rangle$ je $\lim_{x\to t} f(x) = \infty$, resp. $\lim_{x\to t} f(x) = -\infty$, viz Obrázek 10.20. Plocha ohraničená grafem funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ je „neomezeně vysoká“ a není tedy ohraničená.



Obrázek 10.20: Limita funkce f v bodě t je rovna $+\infty$

Definice 10.6.3. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná v libovolném intervalu $\langle a, c\rangle$, kde $a < c < b$. Nechť současně platí, že $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$, resp. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$. Potom výraz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.31}$$

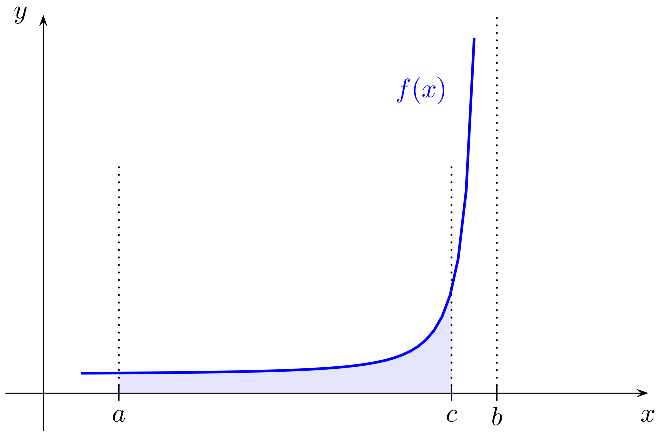
nazýváme *nevlastním integrálem vlivem funkce*. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{10.32}$$

říkáme, že integrál (10.31) konverguje (je konvergentní) a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.33}$$

Neexistuje-li vlastní limita (10.32), říkáme, že integrál (10.31) diverguje (je divergentní).



Obrázek 10.21: K definici nevlastního integrálu vlivem funkce

Analogicky se definuje konvergence nevlastního integrálu (10.31) v případě, kdy je $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, a existuje vlastní limita

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.34}$$

V takovém případě je hodnota integrálu (10.31) rovna hodnotě limity v (10.34).

Poznamenejme, že bod $c \in \langle a,\, b\rangle$, ve kterém není funkce f ohraničená, nazýváme singularitou funkce f.

10.36. Vypočteme hodnotu integrálu **Příklad 10.36**

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,. \tag{10.35}$$

Řešení: Integrál (10.35) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou v dolní mezi. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je integrovatelná na každém intervalu $\langle c,\, 1\rangle$, kde $0 < c < 1$. Vyšetříme konvergenci integrálu (10.35) pomocí výpočtu limity (10.34).

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} &= \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \Big[2\sqrt{x}\Big]_c^1 \\ &= \lim_{c\to 0^+} \big(2 - 2\sqrt{c}\big) = 2\end{aligned}$$

Integrál (10.35) konverguje a jeho hodnota je rovna dvěma.

10.37. Vypočteme hodnotu integrálu **Příklad 10.37**

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\,. \tag{10.36}$$

Řešení: Integrál (10.36) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou v horní mezi. Snadno ověříme, že integrand je funkce integrovatelná na každém intervalu $\langle 0,\, c\rangle$, kde $0 < c < 1$. Vyšetříme existenci limity (10.32).

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{x-1} &= \lim_{c\to 1^-} \Big[\ln|x-1|\Big]_0^c = \lim_{c\to 1^-} \big(\ln|c-1| - \ln|-1|\big) \\ &= \lim_{c\to 1^-} \big(\ln|c-1|\big) = \lim_{t\to 0^+} \big(\ln t\big) = -\infty\end{aligned}$$

Limita (10.32) není vlastní, proto integrál (10.36) diverguje.

Definice 10.6.4. Nechť funkce $f(x)$ není omezená v jistém okolí bodu c, kde $a < c < b$. Jestliže konvergují oba integrály

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{10.37}$$

potom platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.38}$$

a o nevlastním integrálu na levé straně rovnosti (10.37) řekneme, že je konvergentní. Je-li alespoň jeden z integrálů na pravé straně rovnosti (10.37) divergentní, pak říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Při výpočtu nevlastního integrálu vlivem funkce může snadno dojít k záměně s určitým integrálem. K označení určitého i nevlastního integrálu používáme stejný symbol $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Protože způsob výpočtu obou integrálů je odlišný, musíme vždy před výpočtem rozlišit, zda uvedený symbol představuje určitý, nebo nevlastní integrál. Oba typy integrálu rozlišíme vyšetřením oboru, na kterém je integrovaná funkce definována.

Příklad 10.38

10.38. Vypočteme hodnotu integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{10.39}$$

Řešení: Integrál (10.39) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou v dolní i v horní mezi. Proto je vhodné rozdělit interval $\langle -1,\,1\rangle$ pomocí vhodného bodu na dva intervaly. Zvolíme bod $x = 0$, neboť integrand je sudá funkce. Budeme tedy vyšetřovat konvergenci integrálů

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{a} \qquad \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{10.40}$$

Z tabulky základních vzorců na straně 423 víme, že primitivní funkcí k integrandu na intervalu $(-1,\,1)$ je funkce $\arcsin x$. Proto je

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{c\to -1^+} \int_{c}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1^+} \Big[\arcsin x\Big]_c^0 \\ &= \lim_{c\to -1^+} \big(\arcsin 0 - \arcsin c\big) = -\lim_{c\to -1^+} \arcsin c = -\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}\,,\end{aligned}$$

neboť $\arcsin 0 = 0$ a $\lim_{c\to -1^+} \big(\arcsin c\big) = -\frac{\pi}{2}$, viz Kapitola 5.7.3. Dále platí

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{c\to 1^-} \int_{0}^{c} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \Big[\arcsin x\Big]_0^c \\ &= \lim_{c\to 1^-} \big(\arcsin c - \arcsin 0\big) = \lim_{c\to 1^-} \arcsin c = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Oba integrály v (10.40) jsou konvergentní, proto pro integrál (10.39) platí

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

To, že oba integrály v (10.40) mají stejnou hodnotu, by nás nemělo překvapit, neboť integrand je sudá funkce. K výpočtu by tedy stačilo ověřit, že konverguje jeden z těchto integrálů, a poté použít rovnost

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ve všech příkladech z posledních dvou kapitol jsme o konvergenci nevlastních integrálů rozhodli vyšetřováním limit typu (10.20), resp. (10.32) a (10.34). V některých případech však není možné tento postup použít, protože například nelze nalézt příslušnou primitivní funkci k integrandu. V některých takových případech potom můžeme o konvergenci integrálu rozhodnou na základě vět o konvergenci nevlastních integrálů. Těmito větami se však v tomto textu zabývat nebudeme.

10.6.3 Použití nevlastních integrálů v teorii pravděpodobnosti

V této kapitole stručně zavedeme některé pojmy z teorie pravděpodobnosti a ukážeme jejich souvislost s nevlastními integrály.

Náhodným pokusem rozumíme děj (konaný záměrně, či neúmyslně), jehož výsledek předem nedokážeme určit, nicméně po uskutečnění tohoto pokusu jsme schopni určit jeho výsledek. Klasickým případem náhodného pokusu je hod hrací kostkou. Před hodem nedokážeme určit, jaké číslo po hodu na kostce padne, nicméně po uskutečnění hodu jsme schopni výsledek zjistit. Dalšími případy náhodných pokusů jsou např. doba čekání na konkrétní vlak (předem nevíme, jak dlouho budeme čekat, nicméně po příjezdu vlaku to již víme), doba životnosti nové žárovky, počet špatných výrobků v balení atd.

Předpokládejme, že probíhá jistý náhodný pokus, jehož možným výsledkem je jakékoliv reálné číslo x z intervalu $\langle a,\, b\rangle$. V jistých situacích jsme schopni nalézt funkci $f(x)$, která nám umožňuje vypočítat pravděpodobnost $P(c \le x \le d)$, že hodnota x se bude nacházet v rozmezí $c \le x \le d$. Taková funkce se nazývá *hustota pravděpodobnosti* a vyhovuje následujícím podmínkám:

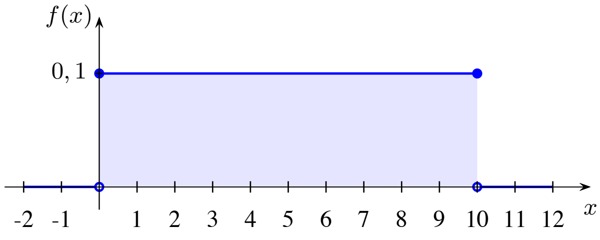
- funkce $f(x)$ je nezáporná pro všechna $x \in \mathbb{R}$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
- pravděpodobnost, že hodnota x se nachází v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ je rovna

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.39. Trolejbusy jisté linky MHD odjíždějí z dané stanice v desetiminutových intervalech. Cestující přicházejí na stanici v libovolné části tohoto intervalu. Doba čekání na trolejbus může nabývat jakékoliv hodnoty $x \in \langle 0,\, 10\rangle$, kde x vyjadřujeme v minutách. Protože cestující přicházejí v jakékoliv části intervalu, jsou všechny hodnoty x stejně pravděpodobné a hustota pravděpodobnosti má potom předpis **Příklad 10.39**

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 & \dots \text{ pro } \quad x \in \langle 0,\, 10\rangle, \\ 0 & \dots \text{ pro } \quad \text{ostatní hodnoty } x \end{cases}$$

viz Obrázek 10.22. Všimněme si, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \ge 0$. Dále platí



Obrázek 10.22: Hustota pravděpodobnosti v Příkladu 10.39

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} 0,1\,\mathrm{d}x = \big[0,1x\big]_0^{10} = 0,1 \cdot 10 - 0,1 \cdot 0 = 1.$$

Pravděpodobnost, že se doba čekání bude pohybovat v rozmezí od c do d je rovna

$$\begin{aligned} P(c \le x \le d) &= \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d 0,1\,\mathrm{d}x = \big[0,1x\big]_c^d = 0,1 \cdot d - 0,1 \cdot c \\ &= \frac{d-c}{10}. \end{aligned} \tag{10.41}$$

V konkrétním případě se můžeme ptát, jaká je pravděpodobnost, že na trolejbus budeme čekat nejméně 5 minut, ale nejvýše 8 minut. Potom nás zajímá hodnota $P(5 \le x \le 8)$ a tu vypočteme pomocí vztahu (10.41).

$$P(5 \le x \le 8) = \frac{8-5}{10} = 0,3$$

Tuto hodnotu pravděpodobnosti jsme mohli očekávat, neboť z intervalu o „délce" 10 minut jsme připouštěli dobu o délce 3 minuty, tedy tři desetiny celkové doby trvání intervalu.

Důležitým pojmem v teorii pravděpodobnosti je tzv. *rozdělení pravděpodobnosti*, které popisuje pravděpodobnosti jistých typů náhodných jevů. Jedno z nejpoužívanějších rozdělení pravděpodobnosti se nazývá *exponenciální* rozdělení pravděpodobnosti. Toto rozdělení se používá k výpočtu pravděpodobnosti doby čekání na výskyt nějakého jevu, např. doby životnosti nějakého výrobku či stroje (sledujeme dobu, než nastane nějaká porucha), nebo dobu trvání do příchodu příštího zákazníka, doba trvání telefonického rozhovoru atd. Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je dána vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \dots \text{ pro } \quad x \ge 0, \\ 0 & \dots \text{ pro } \quad \text{ostatní hodnoty } x < 0, \end{cases} \tag{10.42}$$

kde λ je parametr exponenciálního rozdělení, který odpovídá převrácené hodnotě střední hodnoty (průměrné doby) čekání na výskyt dané události.

Příklad 10.40

10.40. Skupina přátel chodí pravidelně do jisté restaurace. Ze zkušenosti vědí, že na obsloužení čekají průměrně 10 minut. Jaká je pravděpodobnost, že budou obslouženi do osmi minut?

Řešení: Víme, že střední hodnota doby do obsloužení činí 10 minut. Je tedy $\lambda = \frac{1}{10}$, a pro hustotu pravděpodobnosti platí vztah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}} & \dots \text{ pro } \quad x \ge 0, \\ 0 & \dots \text{ pro } \quad \text{ostatní hodnoty } x < 0. \end{cases} \tag{10.43}$$

Pravděpodobnost obsloužení do osmi minut je rovna

$$\begin{aligned} P(0 \le x \le 8) &= \int_0^8 \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} -\frac{x}{10} = & t \\ -\frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int_0^{-0,8} e^t\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-0,8}^{0} e^t\, \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_{-0,8}^{0} = e^0 - e^{-0,8} \doteq 1 - 0,45 = 0,55. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili substituční metodu, přičemž jsme změnili meze určitého integrálu podle vztahu $t = -x/10$. Potom je

$$\begin{array}{lcl} a = 0 & \to & \alpha = -\frac{0}{10} = 0, \\ b = 8 & \to & \beta = -\frac{8}{10} = -0,8. \end{array}$$

Pravděpodobnost, že přátelé budou obslouženi do osmi minut, je rovna $P = 0,55$.

Příklad 10.41

10.41. Uvažujme stejné zadání jako v Příkladu 10.40. Nyní vypočteme, jaká je pravděpodobnost, že přátelé budou čekat déle než čtyři minuty.

Řešení: Protože se nezměnilo zadání, bude hustota pravděpodobnosti opět popsána vzorcem (10.43). Pravděpodobnost obsloužení po čtyřech minutách odpovídá době v rozmezí $4 \le x < \infty$. Nejprve provedeme následující pomocný výpočet.

$$\begin{aligned} \int_4^c \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}}\, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rl} -\frac{x}{10} = & t \\ -\frac{1}{10}\,\mathrm{d}x = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int_{-0,4}^{-c/10} e^t\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-c/10}^{-0,4} e^t\, \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_{-c/10}^{-0,4} = e^{-0,4} - e^{-c/10} \end{aligned}$$

Nyní již snadno vypočteme příslušný nevlastní integrál. Platí

$$P(4 \le x < \infty) = \int_4^\infty \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}} \, \mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_4^c \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}} \, \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left(e^{-0,4} - e^{-c/10}\right) = e^{-0,4} \doteq 0,67,$$

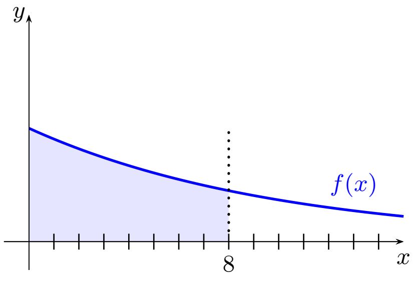
neboť

$$\lim_{c\to\infty} \left(e^{-c/10}\right) = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{e^{c/10}}\right) = 0.$$

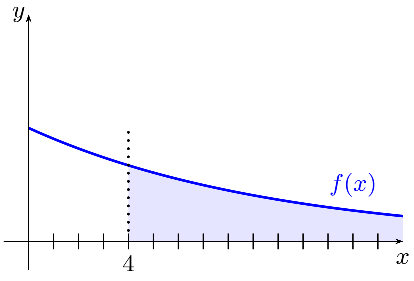
Pravděpodobnost, že přátelé budou na obsloužení čekat déle než čtyři minuty je rovna $P = 0,67$. Poznamenejme, že stejný výsledek bychom mohli získat ze vztahu

$$P(4 \le x < \infty) = 1 - P(0 \le x \le 4),$$

který snadno odvodíme z vzorce $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = 1$ a Obrázku 10.23[4]).



(a) $P(0 \le x \le 8)$



(b) $P(4 \le x < \infty)$

Obrázek 10.23: Hustota pravděpodobnosti v Příkladech 10.40 a 10.41

10.7 Cvičení:

Vypočtěte hodnotu následujících určitých integrálů.

10.7.1. $\int_0^9 \sqrt{x} - 4x + 5 \, \mathrm{d}x$

10.7.2. $\int_1^4 4x^2 - 3x \, \mathrm{d}x$

10.7.3. $\int_1^4 \frac{5}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

10.7.4. $\int_0^2 3^x - 2^x \, \mathrm{d}x$

10.7.5. $\int_0^1 e^{5x} \, \mathrm{d}x$

10.7.6. $\int_{-1}^1 (3x+1)^5 \, \mathrm{d}x$

10.7.7. $\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+x-3} \, \mathrm{d}x$

10.7.8. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$

10.7.9. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$

10.7.10. $\int_0^\pi x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

10.7.11. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} \, \mathrm{d}x$

10.7.12. $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$

[4]) Pro úplnost zmíníme, že pravděpodobnost $P(x = 4) = 0$. Proto si jsou pravděpodobnosti $P(4 \le x < \infty)$ a $P(4 < x < \infty)$ rovny.

Vypočtěte obsahy ploch ohraničených zadanými křivkami (grafy uvedených funkcí).

10.7.13. $f(x) = 9 - x, x = 0, y = 0$

10.7.14. $f(x) = 9 - x^2, x = 0, y = 0$

10.7.15. $f(x) = \ln x, x = 1, x = \mathrm{e}, y = 0$

10.7.16. $f(x) = 2x - 5, g(x) = 19 - 4x, y = 0$

10.7.17. $f(x) = x^2 - x - 6, y = 0$

10.7.18. $f(x) = 3x^2 - 4x + 2, g(x) = 8 - x$

10.7.19. $f(x) = 2x^2 + 4x - 4, g(x) = 5 - 2x - x^2$

10.7.20. $f(x) = \mathrm{e}^x, g(x) = \mathrm{e}^{2x}, x = 2$

Vypočtěte hodnotu následujících nevlastních integrálů.

10.7.21. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

10.7.22. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{5}{x^3}\,\mathrm{d}x$

10.7.23. $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

10.7.24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

10.7.25. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

10.7.26. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

10.7.27. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

10.7.28. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,\mathrm{d}x$

10.7.29. Je dána rovnice (funkce) poptávky $P = D(Q)$ a nabídky $P = S(Q)$ ve tvarech

$$P = D(Q) = 700 - 2Q,$$
$$P = S(Q) = 200 + \frac{8}{900}Q^2.$$

Určete:

a) přebytek spotřebitele při cenové hladině $P = 500$ Kč,

b) přebytek výrobce při cenové hladině $P = 350$ Kč,

c) rovnovážnou cenu a poté přebytek spotřebitele a výrobce při této rovnovážné ceně.

10.7.30. Při testování nového typu tabletu bylo zjištěno, že doba funkčnosti dotykové obrazovky (v hodinách) je náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti

$$f(t) = \begin{cases} 0,0006\,\mathrm{e}^{-0,0006t} & \dots \text{ pro } \quad t \ge 0, \\ 0 & \dots \text{ pro } \quad t < 0. \end{cases}$$

Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost, že dotyková obrazovka bude správně fungovat:

a) nejvýše 1000 hodin,

b) alespoň (tj. nejméně) 1200 hodin.

Výsledky:

10.7.1 -99 **10.7.2** $\frac{123}{2}$ **10.7.3** 10 **10.7.4** $\frac{8}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 2}$ **10.7.5** $(\mathrm{e}^5 - 1)/5$ **10.7.6** 224 **10.7.7** $-\ln 9$ **10.7.8** $1/3$ **10.7.9** $(\pi - 2)/4$ **10.7.10** $\pi^2 - 4$ **10.7.11** $\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$ **10.7.12** $\frac{3}{2}$ **10.7.13** $\frac{81}{2}\,\mathrm{j}^2$ **10.7.14** $18\,\mathrm{j}^2$ **10.7.15** $1\,\mathrm{j}^2$ **10.7.16** $\frac{27}{8}\,\mathrm{j}^2$ **10.7.17** $\frac{125}{6}\,\mathrm{j}^2$ **10.7.18** $\frac{27}{2}\,\mathrm{j}^2$ **10.7.19** $32\,\mathrm{j}^2$ **10.7.20** $(\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e} + 1)/2\,\mathrm{j}^2)$ **10.7.21** diverguje **10.7.22** $5/2$ **10.7.23** $1/2$ **10.7.24** π **10.7.25** diverguje **10.7.26** 2 **10.7.27** 1 **10.7.28** 0 **10.7.29** a) $D = 10\,000$ Kč, b) $S = 12\,990$ Kč c) $P = 400$ Kč, $D = 22\,500$ Kč, $S = 20\,000$ Kč **10.7.30** a) $P \doteq 0,45$, b) $P \doteq 0,41$

Kapitola 11

Funkce více proměnných

V této kapitole navážeme na pojem funkce jedné proměnné. Naším cílem bude vybudovat si představu funkce více proměnných, uvědomit si vlastnosti těchto funkcí a umět vyšetřit extrémy těchto funkcí. Již víme, že k vyšetření extrémů funkce jedné proměnné nám dobře posloužila derivace funkce. Stejné to bude i případě funkcí více proměnných. Nicméně přechod od jedné proměnné k více proměnným bude trochu složitější. Naproti tomu ve vyšetřování extrémů funkce dvou proměnných a více než dvou proměnných nebude zásadní rozdíl, a proto se často omezíme jen na funkce dvou proměnných.

Funkce jedné proměnné je vztah mezi závisle a nezávisle proměnnou. Tento vztah je vyjádřen většinou funkčním předpisem. Jistě se nám ale vybaví situace, kdy jeden důsledek má více příčin, kdy jedna veličina závisí na chování více veličin. Například víme, že cena je závislá na celkové produkci jistého výrobku. Pokud je na trhu více výrobců daného produktu, pak cena tohoto produktu bude závislá na produkci každého z výrobců. Nebo například z ekonomie víme, že celková produkce je závislá na výši kapitálu i množství vložené práce.

Připomeňme dále, že v této kapitole budeme pracovat s pojmy z oblasti lineární algebry, se kterými jsme se seznámili v kapitolách o maticích, determinantech a kvadratických formách. Zcela zřejmě by čtenář před studiem této kapitoly měl být seznámen s diferenciálním počtem funkcí jedné proměnné.

11.1 Základní pojmy funkce více proměnných

Nejprve zavedeme korektně pojem funkce více proměnných a než přistoupíme k vyšetřování vlastností funkcí více proměnných, ukážeme si několik grafů pro lepší představu.

Definice 11.1.1. Nechť množina $D \subset \mathbb{R}^n$. Pak zobrazení f, které každé n-tici z $D \in \mathbb{R}^n$ přiřadí právě jednu reálnou hodnotu, se nazývá *funkce více proměnných*. Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f. Množinu všech hodnot $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, nazýváme *obor hodnot* funkce f.

Definice 11.1.2. Jakákoli funkce n proměnných, která vznikne z elementárních funkcí jedné proměnné konečným počtem operací sčítání, odečítání, násobení, dělení, skládání a rozšiřování, se nazývá *elementární funkce n proměnných*.

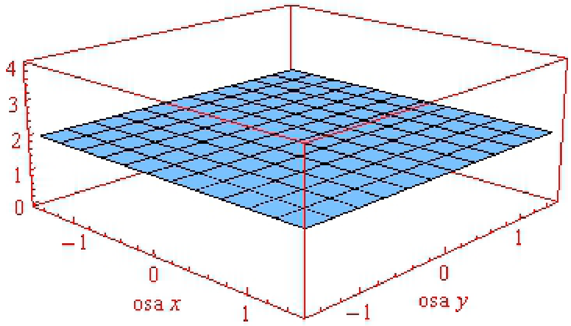
V diferenciálním počtu funkce jedné proměnné jsme si zavedli pojmy limita a spojitost funkce. Tyto pojmy jsou u funkcí více proměnných definovány formálně stejně jako u funkcí jedné proměnné. My zde tyto definice nebudeme uvádět. U spojitosti funkce vystačíme s představou, že graf spojité funkce více proměnných v každém bodě definičního oboru nemá „skoky“.

Věta 11.1.3. *Všechny elementární funkce n proměnných jsou spojité na svém definičním oboru.*

U funkcí jedné proměnné jsme viděli, že při mnohém uvažování a řešení problémů nám napomohla představa o grafu funkce. S grafy funkcí více než dvou proměnných je problém. V našem trojrozměrném světě je nezobrazíme. Ale jistou představu si můžeme utvořit z grafů funkcí dvou proměnných $z = f(x, y)$.

Poznamenejme, že u všech následujících grafů osy leží uprostřed grafů. Popisy „osa x“ a „osa y“ jsou v grafech umístěny pouze z důvodu naznačení směru os.

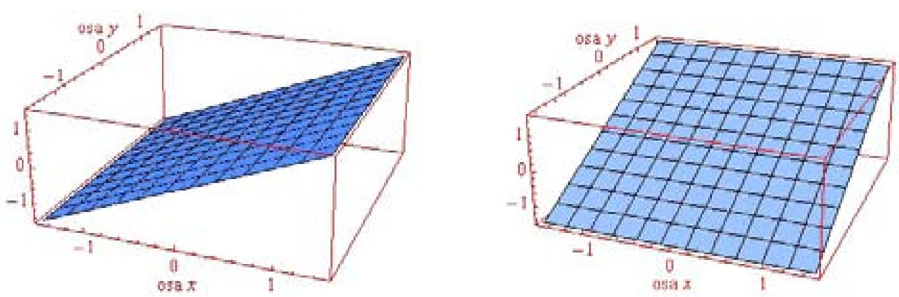
Nejjednodušší funkcí jedné proměnné byla konstantní funkce. Jak vypadá graf konstantní funkce dvou proměnných s předpisem $f(x, y) = c$? Víme, že graf konstantní funkce jedné proměnné je přímka rovnoběžná s osou x. Na Obrázku 11.1 vidíme graf konstantní funkce dvou proměnných $z = f(x, y) = 2$. Jedná se o rovinu rovnoběžnou s osami x a y ve výšce 2. Ať mají nezávisle proměnné x a y jakoukoli hodnotu, závisle proměnná z je stále rovna dvěma. Na Obrázku 11.1 je graf této funkce zobrazen pouze pro $(x, y) \in \langle -1,5\,,\, 1,5\rangle \times \langle -1,5\,,\, 1,5\rangle$.



Obrázek 11.1: Graf funkce $f(x, y) = 2$

Soustřeďme se dále na funkci dvou proměnných s předpisem $f(x, y) = x$. Vidíme, že v předpisu se proměnná y vůbec nevyskytuje. Znamená to, že ať bude proměnná y nabývat jakékoli hodnoty, funkční hodnotu to neovlivní. Proměnná x se v předpisu funkce vyskytuje v první mocnině, závislost je tedy vzhledem k této proměnné lineární. Kdyby se jednalo o funkci jedné proměnné, grafem takové funkce by byla rostoucí přímka procházející počátkem souřadných os. Pokud se jedná o funkci dvou proměnných, grafem bude taková plocha, která bude mít následující vlastnosti:

- při jakékoli konktrétní hodnotě proměnné y se funkce chová jako lineární funkce $f(x) = x$,
- při jakékoli konktrétní hodnotě proměnné x se funkce chová jako konstanta.



(a) Graf funkce $f(x, y) = x$ (b) Graf funkce $f(x, y) = y$

Obrázek 11.2: Grafy funkcí dvou proměnných

Na grafu funkce se toto projeví následovně. Pokud bychom prořízli graf této funkce rovinou rovnoběžnou s osou x (viz např. čelní stěna u grafu na Obrázku 11.2(a)), řez bude mít tvar přímky (graf lineární funkce v $\mathbb{R}$). Jestliže prořízneme graf této funkce rovinou rovnoběžnou s osou y (viz např. boční stěna u grafu na Obrázku 11.2(a)), řez bude mít tvar přímky rovnoběžné s osou y (graf konstantní funkce v $\mathbb{R}$). Graf této funkce vidíme na Obrázku 11.2(a) pro $(x, y) \in \langle -1,5\,,\, 1,5\rangle \times \langle -1,5\,,\, 1,5\rangle$.

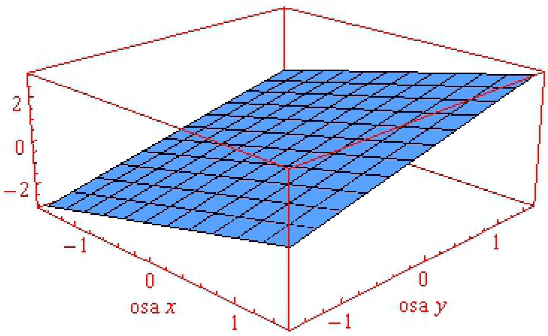
Funkce $f(x, y) = y$ je naopak lineární v proměnné y, kdežto proměnná x nebude funkční hodnoty této funkce nijak ovlivňovat. Z grafu na Obrázku 11.2(b) vidíme, že pro jakoukoli hodnotu proměnné x, má graf funkce tvar skloněné přímky. Naopak pro jakoukoli konkrétní hodnotu proměnné y je graf dané funkce přímka rovnoběžná s osou y, protože pro jakoukoli konkrétní hodnotu proměnné y je funkce konstantní. Například pro $y = 2$ platí $f(x, 2) = 2$.

Nyní již tušíme, že graf funkce $f(x, y) = x + y$ bude rovina s následujícími vlastnostmi:

- pro jakoukoli hodnotu proměnné x ($x = c$, kde c je libovolná konstanta) bude daná funkce dvou proměnných lineární funkce jedné proměnné $f(c, y) = c + y$ a jejím grafem bude nakloněná přímka,

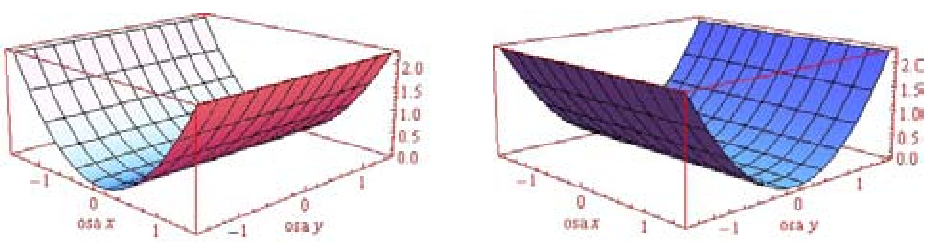
- pro jakoukoli hodnotu proměnné y ($y = c$) bude daná funkce dvou proměnných lineární funkce jedné proměnné $f(x, c) = x + c$ a jejím grafem bude „rostoucí“ přímka.

Graf funkce vidíme na Obrázku 11.3.



Obrázek 11.3: Graf funkce $f(x, y) = x + y$

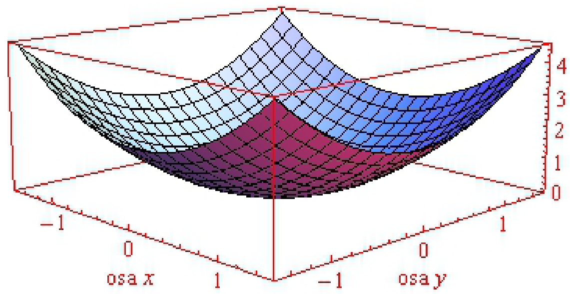
Dále se soustřeďme na funkce $f(x, y) = x^2$ a $f(x, y) = y^2$. Kdyby se jednalo o funkce pouze jedné proměnné, jejich grafem by byla parabola s vrcholem v počátku souřadných os. Obě funkce jsou ale funkcemi dvou proměnných. Pro funkci $f(x, y) = x^2$ platí, že hodnoty proměnné y funkční hodnoty neovlivní. Funkční hodnoty funkce $f(x, y) = x^2$ se v závislosti na proměnné x budou měnit s druhou mocninou. Tedy pro libovolnou konstantu c, pro kterou $x = c$, pak $f(c, y) = c^2$ je konstantní funkce proměnné y a jejím grafem je přímka rovnoběžná s osou y.



Obrázek 11.4: Grafy funkcí dvou proměnných

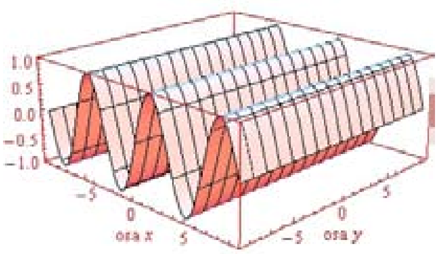
Pokud vezmeme pevně $y = c$, pak $f(x,c) = x^2$. Grafem této funkce je parabola pro každé c. Pro $f(x,y) = y^2$ platí všechny předešlé úvahy jen se záměnou proměnných. Grafy těchto funkcí pro $(x,y) \in \langle -1,5\,,\,1,5\rangle \times \langle -1,5\,,\,1,5\rangle$ jsou na Obrázcích $11.4(a)$ a $11.4(b)$.

Graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ bude plocha, kterou prořízneme-li rovinou rovnoběžnou s osou x, řez bude mít tvar paraboly. A stejně v případě proříznutí rovinou rovnoběžnou s osou y, řez bude mít tvar paraboly. Graf této funkce je na Obrázku 11.5 pro $(x,y) \in \langle -1,5\,,\,1,5\rangle \times \langle -1,5\,,\,1,5\rangle$.

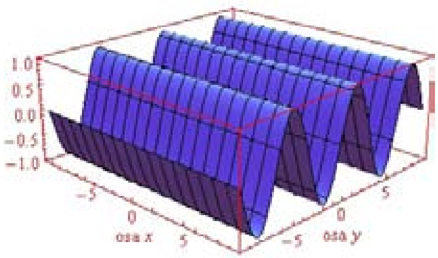


Obrázek 11.5: Graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$

Nakonec se ještě podíváme na funkce $f_1(x,y) = \sin x$, $f_2(x,y) = \sin y$ a funkci $f(x,y) = \sin x + \sin y$. První dvě funkce mají ve svém předpisu vždy jen jednu proměnnou. Pokud tato proměnná bude nabývat hodnotu rovnou určité konstantě, pak se bude jednat o konstantní funkce. Totiž $f_1(c,y) = \sin c$ a $f_2(x,c) = \sin c$. Pokud prořízneme



(a) Graf funkce $f(x,y) = \sin x$



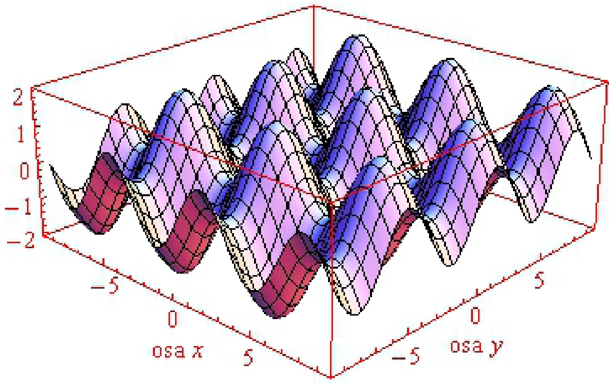
(b) Graf funkce $f(x,y) = \sin y$

Obrázek 11.6: Grafy funkcí dvou proměnných

grafy těchto funkcí rovinou rovnoběžnou s osou y, resp. x, řez má podobu přímky rovnoběžné s osou y, resp. x. Pokud za druhou proměnnou do předpisu těchto dvou funkcí dosadíme libovolnou konstantu, dostaneme funkce $f_1(x,c) = \sin x$ a $f_2(c,y) = \sin y$. Tedy řezy rovnoběžné roviny s osou y, resp. x, budou sinové vlny.

Graf funkce $f(x,y) = \sin x + \sin y$ bude mít v obou řezech rovinami rovnoběžnými s osami x a y tvary sinových vln. Grafy těchto funkcí pro $(x,y) \in \langle -3\pi, 3\pi\rangle \times \langle -3\pi, 3\pi\rangle$ jsou na Obrázcích $11.6(a)$, $11.6(b)$ a 11.7.

Na uvedených příkladech funkcí dvou proměnných jsme si uvědomili, že pokud jednu proměnnou zafixujeme (položíme rovnu konstantě), dostáváme funkci jedné proměnné. V případě, že proměnná y je rovna konstantě, funkce dvou proměnných se stane funkcí pouze proměnné x a graf této funkce bude průsečík grafu funkce dvou proměnných a roviny rovnoběžné s osou x a procházející bodem $y =$ konst. V případě, že proměnná x je rovna konstantě, funkce dvou proměnných se stane funkcí pouze proměnné y a graf této funkce bude průnik grafu funkce dvou proměnných a roviny rovnoběžné s osou y a procházející bodem $x =$ konst.



Obrázek 11.7: Graf funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$

Na závěr této podkapitoly uveďme definice některých podmnožin prostoru $\mathbb{R}^n$, které budeme v následujícím textu potřebovat.

Definice 11.1.4. Množina všech bodů $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, které vyhovují nerovnici $|X - C| < \delta$, kde $C = [c_1, c_2, \ldots, c_n] \in \mathbb{R}^n$ a δ je kladné reálné číslo, se nazývá *kruhové okolí* bodu C a značí se U_C^δ.

Definice 11.1.5. Množina všech bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, které vyhovují nerovnicím $|x_i - c_i| < \delta$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, kde $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ a δ je kladné reálné číslo, se nazývá *čtvercové okolí* bodu C a značí se $U_{\square C}^\delta$.

Definice 11.1.6. Bod $C \in M$ je *vnitřní bod* množiny $M \subset \mathbb{R}^n$, jestliže existuje takové okolí U_C^δ, že platí $U_C^\delta \subset M$.

Definice 11.1.7. *Otevřená množina* je množina, jejíž každý bod je vnitřní.

Definice 11.1.8. *Hraniční bod* $D \in M$ množiny M je bod, v jehož každém okolí U_D^δ jsou jak body z množiny M, tak body z množiny $\mathbb{R}^n \setminus M$. (Obecně hraniční body nemusí být prvky M.)

Definice 11.1.9. Pokud všechny hraniční body množimy M patří do M, řekneme, že *množina* M *je uzavřená*.

Definice 11.1.10. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá *hranice množiny* M.

Definice 11.1.11. Nechť M_i je množina $i-$ tých souřadnic všech bodů $X \in M$. Pokud všechny množiny $M_i, i = 1, \ldots, n$ jsou omezené (všechny leží uvnitř jistého obdélníku), pak množinu M nazýváme omezenou množinou.

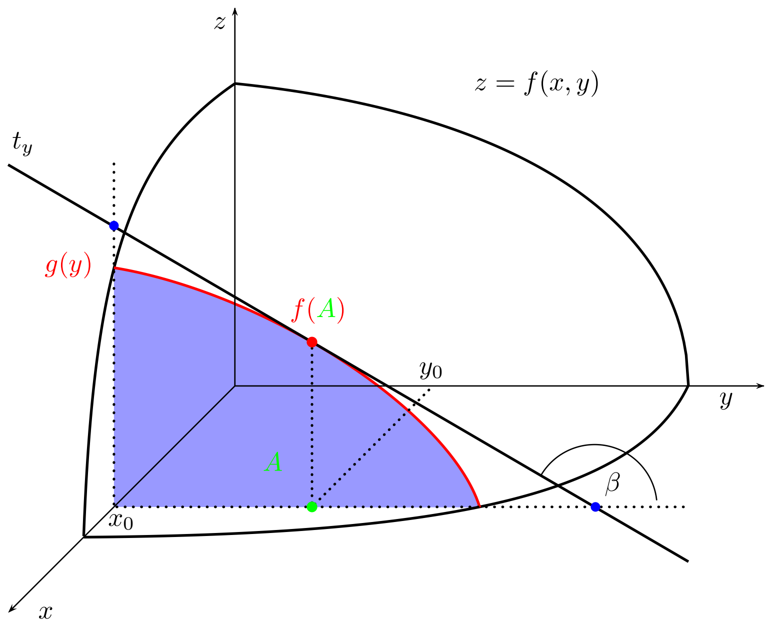
Definice 11.1.12. *Kompaktní množima* je taková množina, která je zároveň omezená a uzavřená.

11.2 Parciální derivace

Jak bylo již uvedeno v kapitole o derivaci funkce jedné proměnné, geometrický význam derivace funkce jedné proměnné v určitém bodě je hodnota směrnice tečny v daném bodě ke grafu funkce. Připomeneme definici derivace funkce jedné proměnné.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

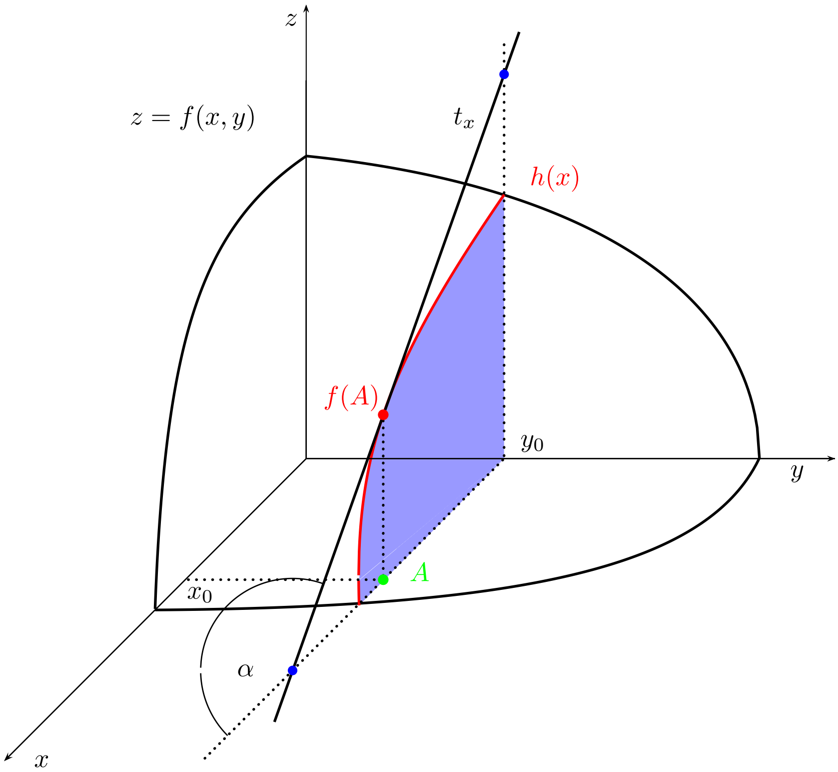
V úvodu této kapitoly jsme si uvědomili, že zafixujeme-li ve funkci dvou proměnných jednu proměnnou, stává se z ní funkce jedné proměnné. Na tuto neměnnou proměnnou nahlížíme jako na konstantu.



Obrázek 11.8: Parciální derivace podle proměnné y

Než si přesně zadefinujeme pojem derivace funkce více proměnných, nejprve si vytvoříme grafickou představu této derivace na funkci dvou proměnných. Graf takové funkce je jistá plocha v prostoru. Tečen v daném bodě ke grafu takové funkce (k ploše v prostoru) existuje nekonečně mnoho. Proto z těchto tečen budeme uvažovat jen jisté tečny. Na Obrázku 11.8 vidíme graf funkce dvou proměnných $z = f(x,y)$. V bodě $[A, f(A)]$, neboli $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, sestrojíme tečnu ke grafu této funkce. Uvažujme rovinu procházející body $[x_0, y_0, 0]$, $[x_0, 0, 0]$ a $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$. Část této roviny je na obrázku 11.8 znázorněna modrou barvou. Je to rovina kolmá k rovině, v níž leží osy x a y. Všechny body v této rovině mají první složku rovnu x_0, tedy neměnnou. Průnikem grafu funkce $z = f(x,y)$ s touto rovinou je graf funkce $g(y)) = f(x_0, y)$. Na Obrázku 11.8 tuto funkci máme zakreslenu červeně. Tečnu ke grafu této funkce v bodě $A = [x_0, y_0, f(x_0, y(0))]$ označíme t_y. Směrnice této tečny t_y bude geometrickým významem jisté derivace funkce dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y(0))]$. Tuto derivaci budeme nazývat parciální derivace funkce $z = f(x,y)$ podle proměnné y v bodě A.

Stejně tak na Obrázku 11.9 je znázorměna tečna t_x ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, hodnota jejíž směrnice bude rovna hodnotě parciální derivace funkce $z = f(x,y)$ podle proměnné x v bodě A. Rovina procházející bodem A a kolmá k rovině, v níž leží osy x a y, je na Obrázku 11.9 vyjádřena modrou barvou. Průnik této roviny s grafem funkce $z = f(x,y)$ je graf funkce $h(x)$, zobrazená červeně. Platí $h(x) = f(x, y_0)$. Tečna ke grafu této funkce $h(x)$ v bodě $f(A)$ je tečna t_x. Na Obrázku 11.9 je α označen úhel, který svírá tečna t_x a s přímkou spojující body A a $[0, y_0, 0]$. Hodnota směrnice tečny t_x je rovna hodnotě $\mathrm{tg}(\alpha)$.



Obrázek 11.9: Parciální derivace podle proměnné x

Parciální derivace funkce dvou proměnných podle proměnné x bude derivace funkce, ve které na proměnnou y nahlížíme jako na konstantu. Obdobně parciální derivace funkce dvou proměnných podle proměnné y bude derivace funkce, ve které proměnná x je neměnná neboli konstantní.

Definice 11.2.1. *Parciální derivací* funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné x budeme nazývat limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Parciální derivací funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ podle proměnné y budeme nazývat limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Tyto limity mohou být jak vlastní, tak nevlastní. Mluvíme pak o vlastní, resp. nevlastní parciální derivaci.

Označení pro parciální derivace není jednotné. Parciální derivace podle proměnné x může být označena $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ nebo $f'_x(x, y)$. Analogicky bývá označena parciální derivace podle proměnné y, totiž $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nebo $f'_y(x, y)$.

Pokud budeme pracovat s funkcemi více než dvou proměnných, bude parciální derivace v bodě $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ definována následovně.

Definice 11.2.2. *Parciální derivací* funkce n proměnných $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ podle proměnné x_i v bodě $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ budeme nazývat limitu

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}.$$

Pokud každému bodu z definičního oboru funkce přiřadíme hodnotu parciální derivace v tomto bodě (za předpokladu existence parciální derivace), dostáváme pojem parciální derivace jako funkce. Při výpočtu funkčního předpisu parciálních derivací využijeme vlastností parciálních derivací funkce. Ty jsou stejné jako vlastnosti obyčejné derivace funkce jedné proměnné. Přesto si je znovu raději připomeneme.

Věta 11.2.3. *Mějme funkce $f(X)$ a $g(X)$ n proměnných, kde $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Pak platí*

$$\frac{\partial(f+g)(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \frac{\partial g(X)}{\partial x_i} \qquad \ldots \textit{ derivace součtu}$$

$$\frac{\partial(f-g)(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(X)}{\partial x_i} \qquad \ldots \textit{ derivace rozdílu}$$

$$\frac{\partial(f\cdot g)(X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \cdot g(X) + f(X) \cdot \frac{\partial g(X)}{\partial x_i} \qquad \ldots \textit{ derivace součinu}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)(X)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \cdot g(X) - f(X) \cdot \frac{\partial g(X)}{\partial x_i}}{g^2(X)} \qquad \ldots \textit{ derivace podílu}$$

Dále si uvědomme, že vzorce pro derivace základních elementárních funkcí zůstávají v platnosti. Použití těchto vzorců a vlastností si ukážeme na následujících příkladech. Vždy si předem uvědomíme, podle jaké proměnné derivujeme, a na ostatní proměnné pohlížíme jako na konstantu.

Příklad 11.1

11.1. Nalezněte předpis prvních parciálních derivací funkce $f(x,y) = x^y$ podle obou proměnných.

Řešení: Uvědomme si, že pokud budeme derivovat podle proměnné x, proměnná y je konstanta a jedná se pak o mocninnou funkci. Pokud budeme derivovat podle proměnné y, pak proměnná x je konstanta a zadaná funkce je exponenciální funkce.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

Příklad 11.2

11.2. Nalezněte předpis prvních parciálních derivací funkce $f(x,y) = 2\sin x + x \ln y$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru součtu, podle pravidel pro derivování budeme derivovat každý sčítanec. Při derivaci jednotlivých sčítanců použijeme vlastnost, že derivace konstanty je nula a derivujeme-li součin konstanty a funkce, konstantu necháme beze změny a derivujeme jen funkci.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2\cos x + 1 \cdot \ln y = 2\cos x + \ln y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

Příklad 11.3

11.3. Nalezněte předpis prvních parciálních derivací funkce

$$f(x,y) = 3x^2y - 5x^3\sqrt{y}$$

podle obou proměnných.

Řešení: Derivujme nejprve podle proměnné x. S proměnnou y zacházíme v tomto případě jako s konstantou. Funkce je ve tvaru rozdílu, derivujeme každý člen rozdílu zvlášť.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y - 5 \cdot 3 \cdot x^2\sqrt{y} = 6xy - 15x^2\sqrt{y}$$

Než začneme derivovat funkci podle proměnné y, přepíšeme v předpisu funkce f odmocninu na mocninu ve tvaru zlomku, tedy $f(x,y) = 3x^2y - 5x^3y^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 \cdot 1 - 5x^3 \cdot \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = 3x^2 - \frac{5x^3}{2\sqrt{y}}$$

V následujícím příkladě připomeneme derivaci složené funkce jedné proměnné. Derivace složené funkce jedné proměnné se počítala jako součin derivace vnější funkce a derivace vnitřní funkce.

Příklad 11.4

11.4. Nalezněte předpis prvních parciálních derivací funkce $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je složená funkce. Vnější funkce je přirozený logaritmus, vnitřní funkce je součet druhých mocnin obou proměnných. Nejprve zderivujeme vnější funkci a necháme jí argument ve tvaru součtu druhých mocnin obou proměnných a tuto derivaci vynásobíme derivací argumentu.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (2x+0) = \frac{2x}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (0+2y) = \frac{2y}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Příklad 11.5

11.5. Nalezněte předpis prvních parciálních derivací funkce $f(x,y) = \ln 2x \cdot \sqrt{3x+5y}$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru součinu, proto budeme derivovat podle příslušného vzorce. Druhou odmocninu v předpisu funkce pro snadnější derivování přepíšeme na racionální mocninu, $f(x,y) = \ln 2x \cdot (3x+5y)^{\frac{1}{2}}$. V derivaci užijeme i vzorce pro derivování složené funkce.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot \sqrt{3x+5y} + \ln 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x+5y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3+0) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \sqrt{3x+5y} + \frac{3\ln 2x}{2\sqrt{3x+5y}} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0 \cdot (3x+5y)^{\frac{1}{2}} + \ln 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x+5y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0+5) = \frac{5\ln 2x}{2\sqrt{3x+5y}}
\end{aligned}$$

Příklad 11.6

11.6. Nalezněte předpis prvních parciálních derivací funkce $f(x,y) = \frac{3xy}{x-y}$ podle obou proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru podílu dvou funkcí, proto při jejím derivování využijeme vzorce pro derivaci podílu.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{3y \cdot 1 \cdot (x-y) - 3xy \cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{-3y^2}{(x-y)^2} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{3x \cdot 1 \cdot (x-y) - 3xy \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{3x^2}{(x-y)^2}
\end{aligned}$$

Příklad 11.7

11.7. Nalezněte předpis prvních parciálních derivací funkce

$$f(x,y,z) = (x + \operatorname{tg} z)\, \mathrm{e}^{xyz^2}$$

podle všech proměnných.

Řešení: Zadaná funkce je ve tvaru součinu dvou funkcí, proto při jejím derivování využijeme vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= 1\cdot \mathrm{e}^{xyz^2} + (x+\operatorname{tg} z)\,\mathrm{e}^{xyz^2}\cdot yz^2 = \mathrm{e}^{xyz^2}(1+(x+\operatorname{tg} z)yz^2)\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= 0\cdot \mathrm{e}^{xyz^2} + (x+\operatorname{tg} z)\,\mathrm{e}^{xyz^2}\cdot xz^2 = (x+\operatorname{tg} z)xz^2\mathrm{e}^{xyz^2}\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \left(0+\frac{1}{\cos^2 z}\right)\cdot \mathrm{e}^{xyz^2} + (x+\operatorname{tg} z)\,\mathrm{e}^{xyz^2}\cdot xy\,2z\\
&= \mathrm{e}^{xyz^2}\left[\frac{1}{\cos^2 z} + 2xyz(x+\operatorname{tg} z)\right]
\end{aligned}$$

Umíme tedy spočítat derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí. Než si uvedeme vzorec pro derivaci složené funkce více proměnných, zadefinujeme si nejprve pojem složené funkce více proměnných.

Definice 11.2.4. Nechť funkce $f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ je definována na množině $D \subset \mathbb{R}^p$ a nechť funkce $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pro $i = 1, \ldots, p$ jsou funkce n proměnných definovaných na množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Dále nechť pro každé $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ je $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ pro $i = 1, \ldots, p$. Pak funkce

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n))$$

se nazývá *složená funkce* n proměnných.

Příkladem složené funkce dvou proměnných je funkce definovaná na $\mathbb{R}^2$ ve tvaru $h(x,y) = \ln(\mathrm{e}^{x^2y} + (x^3-y)^2)$. V tomto případě je vnější funkce dána předpisem $f(u_1,u_2) = \ln(u_1 + u_2^2)$ a vnitřní funkce jsou $u_1(x,y) = \mathrm{e}^{x^2y}$ a $u_2(x,y) = x^3 - y$.

Věta 11.2.5 (Derivace složené funkce více proměnných)**.** *Mějme funkci r proměnných $f(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, která má spojité parciální derivace na množině D a nechť funkce $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pro $i = 1, \ldots, r$ jsou funkce n proměnných, které mají spojité parciální derivace na množině G, a dále nechť platí $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ pro $i = 1, \ldots, r$ a pro všechna $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$. Pak složená funkce*

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_r(x_1, \ldots, x_n))$$

má spojité parciální derivace na množině G a pro všechna x_i, $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_i}.$$

Příklad 11.8

11.8. Nalezněte předpis parciálních derivací funkce $h(x,y) = \ln(e^{x^2y} + (x^3-y)^2)$ podle obou proměnných.

Řešení: Derivaci zadané funkce nalezneme dvojím způsobem. Jednak budeme postupovat podle vzorce pro derivaci funkce více proměnných z Věty 11.2.5, jednak budeme derivovat zadanou funkci h podle doposud známých pravidel.

První způsob

Funkci h přepíšeme jako složenou funkci $h(x,y) = f(u_1,u_2) = \ln(u_1 + u_2^2)$, kde $u_1(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 y}$ a $u_2(x,y) = x^3 - y$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}\\
&= \frac{1}{u_1+u_2^2}\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{x^2y} 2xy + \frac{1}{u_1+u_2^2}\cdot 2u_2\cdot 3x^2\\
&= \frac{2xy\,\mathrm{e}^{x^2y}}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2} + \frac{6x^2(x^3-y)}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\\
&= \frac{2xy\,\mathrm{e}^{x^2y}+6x^2(x^3-y)}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\\
\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y}\\
&= \frac{1}{u_1+u_2^2}\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{x^2y}\cdot x^2 + \frac{1}{u_1+u_2^2}\cdot 2u_2\cdot(-1)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{x^2y}}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\cdot x^2 - \frac{2(x^3-y)}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\\
&= \frac{x^2\mathrm{e}^{x^2y}-2(x^3-y)}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}
\end{aligned}$$

Druhý způsob

Zadanou funkci $h(x,y) = \ln\left(\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2\right)$ budeme derivovat přímo, jen se znalostí vzorce pro derivování funkce jedné proměnné. Při výpočtu parciální derivace se totiž na funkci více proměnných díváme jen jako na funkci jedné proměnné.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\cdot\left(2xy\,\mathrm{e}^{x^2y}+2(x^3-y)\cdot 3x^2\right)\\
&= \frac{2xy\,\mathrm{e}^{x^2y}+2(x^3-y)\cdot 3x^2}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\\
&= \frac{2xy\,\mathrm{e}^{x^2y}+6x^2(x^3-y)}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\\
\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\cdot\left(\mathrm{e}^{x^2y}\cdot x^2+2(x^3-y)\cdot(-1)\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{x^2y}\cdot x^2+2(x^3-y)\cdot(-1)}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}\\
&= \frac{x^2\mathrm{e}^{x^2y}-2(x^3-y)}{\mathrm{e}^{x^2y}+(x^3-y)^2}
\end{aligned}$$

Definice 11.2.6. Derivací funkce $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ v bodě $A = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$ budeme nazývat vektor parciálních derivací této funkce podle všech proměnných v bodě A

$$f'(A) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\ldots, \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}\right).$$

Dále budeme uvažovat vektor parciálních derivací v každém bodě z definičního oboru funkce f, v nichž existují vlastní parciální derivace. Takový vektor budeme nazývat *derivací funkce* f neboli *gradient funkce*.

Definice 11.2.7. Pro všechna $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, v nichž existují vlastní parciální derivace $\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n}$, budeme vektor

$$f'(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \dots, \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \right)$$

nazývat *derivace funkce* f neboli *gradient funkce*.

Geometricky gradient funkce f v bodě X vyjadřuje směr největšího růstu funkce f v okolí bodu X.

11.2.1 Parciální derivace vyšších řádů

Stejně jako v případě derivace vyšších řádů funkce jedné proměnné i v případě funkce více proměnných se derivace vyšších řádů, obecně n-tá derivace, bude počítat rekurentně, tady zderivováním $(n-1)$-ní derivace.

Definice 11.2.8. Nechť existuje derivace funkce $f(x, y)$. Pak druhé derivace podle příslušných proměnných jsou definovány vztahy (za předpokladu, že dané derivace existují)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Obecně: Je-li f funkce n proměnných, pak derivujeme-li funkci nejprve podle proměnné x_i, pak podle x_j pro $i \neq j$, píšeme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Vidíme, že pokud je dána funkce dvou proměnných, potom první derivace existují dvě a druhé derivace existují čtyři. Funkce tří proměnných má tři první derivace podle každé z proměnných. Druhých derivací takové funkce bude devět. Pokud je funkce obecně n proměnných, prvních derivací bude n, druhých n^2. Druhé parciální derivace funkce f o n proměnných, derivovaných nejprve podle proměnné x_i, pak podle x_j pro $i \neq j$, tj. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, se nazývají *smíšené derivace*.

Věta 11.2.9 (Postačující podmínka rovnosti smíšených druhých derivací)**.** *Jestliže existují druhé smíšené parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $A = [a_1, a_2]$ a jsou spojité v tomto bodě, pak platí*

$$\frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial y\, \partial x}.$$

Víme, že elementární funkce n proměnných jsou spojité v každém bodě svých definičních oborů. Pak ve všech bodech, v nichž existují následující derivace, platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}.$$

O druhých parciálních derivacích také mluvíme jako o derivacích druhého řádu. Analogicky n-tou derivaci nazýváme také derivací n-tého řádu.

Příklad 11.9

11.9. Nalezněte předpis všech druhých parciálních derivací funkce

$$f(x, y) = x^2 y - \ln xy.$$

Řešení: Nejprve spočteme první derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{1}{xy}\cdot y = 2xy - \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{1}{xy}\cdot x = x^2 - \frac{1}{y}$$

Zderivováním prvních derivací podle příslušných proměnných dostaneme žádané druhé derivace.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(2xy - \frac{1}{x})}{\partial x} = 2y + \frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(2xy - \frac{1}{x})}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial(x^2 - \frac{1}{y})}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(x^2 - \frac{1}{y})}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$$

Všimněte si, že smíšené druhé parciální derivace mají stejný předpis. Platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

11.10. Nalezněte předpis všech druhých parciálních derivací funkce **Příklad 11.10**

$$f(x,y,z) = (x - z^3y)^2 + \mathrm{tg}(xyz).$$

Řešení: Nejprve spočteme první derivace. Budeme využívat všech pravidel pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu. V případě, že ve funkci $\mathrm{tg}(xyz)$ vždy dvě proměnné zafixujeme, díváme se na tuto funkci jako na funkci jedné proměnné. Jedná se o složenou funkci a budeme ji derivovat jako složenou funkci.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x - z^3y)^1\cdot(1+0) + \frac{1}{\cos^2(xyz)}\cdot yz = 2(x - z^3y) + \frac{yz}{\cos^2(xyz)} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x - z^3y)^1\cdot(0 - z^3) + \frac{1}{\cos^2(xyz)}\cdot xz = -2z^3(x - z^3y) + \frac{xz}{\cos^2(xyz)} \\
&= -2z^3x + 2z^6y + \frac{xz}{\cos^2(xyz)} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 2(x - z^3y)^1\cdot(0 - 3z^2y) + \frac{1}{\cos^2(xyz)}\cdot xy \\
&= -6z^2y(x - z^3y) + \frac{xy}{\cos^2(xyz)} \\
&= -6xyz^2 + 6y^2z^5 + \frac{xy}{\cos^2(xyz)}
\end{aligned}$$

Každou z prvních derivací zderivujeme znovu podle každé ze tří proměnných. Druhých derivací bude devět.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(2(x - z^3y) + \frac{yz}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial x} \\
&= 2 - 0 + \frac{0\cdot\cos^2(xyz) - yz\cdot 2\cos(xyz)\cdot(-\sin(xyz))\cdot yz}{\cos^4(xyz)} \\
&= 2 + \frac{(yz)^2\cdot\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial\left(2(x - z^3y) + \frac{yz}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial y} \\
&= 2(0 - z^3) + \frac{z\cos^2(xyz) - yz\cdot 2\cos(xyz)\cdot(-\sin(xyz))\cdot xz}{\cos^4(xyz)} \\
&= -2z^3 + \frac{z\cos^2(xyz) + xyz^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} &= \frac{\partial\left(2(x-z^3y)+\frac{yz}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial z}\\
&= 2(0-3z^2y)+\frac{y\cos^2(xyz)-yz\,2\cos(xyz)(-\sin(xyz))\cdot xy}{\cos^4(xyz)}\\
&= -6yz^2+\frac{y\cos^2(xyz)+xy^2z\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} &= \frac{\partial\left(-2z^3x+2z^6y+\frac{xz}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial x}\\
&= -2z^3+0+\frac{z\cdot\cos^2(xyz)-xz\,2\cos(xyz)(-\sin(xyz))\cdot yz}{\cos^4(xyz)}\\
&= -2z^3+\frac{z\cos^2(xyz)+xyz^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial\left(-2z^3x+2z^6y+\frac{xz}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial y}\\
&= 0+2z^6+\frac{0\cdot\cos^2(xyz)-xz\,2\cos(xyz)(-\sin(xyz))\cdot xz}{\cos^4(xyz)}\\
&= 2z^6+\frac{(xz)^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial\left(-2z^3x+2z^6y+\frac{xz}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial z}\\
&= -2\cdot 3z^2x+2\cdot 6z^5y+\frac{x\cos^2(xyz)-xz\,2\cos(xyz)(-\sin(xyz))\cdot xy}{\cos^4(xyz)}\\
&= -6z^2x+12z^5y+\frac{x\cos^2(xyz)+x^2yz\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial\left(-6xyz^2+6y^2z^5+\frac{xy}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial x}\\
&= -6yz^2+0+\frac{y\cos^2(xyz)-xy\,2\cos(xyz)(-\sin(xyz))\cdot yz}{\cos^4(xyz)}\\
&= -6yz^2+\frac{y\cos^2(xyz)+xy^2z\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} &= \frac{\partial\left(-6xyz^2+6y^2z^5+\frac{xy}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial y}\\
&= -6xz^2+6\cdot 2yz^5+\frac{x\cos^2(xyz)-xy\,2\cos(xyz)(-\sin(xyz))\cdot xz}{\cos^4(xyz)}\\
&= -6xz^2+12yz^5+\frac{x\cos^2(xyz)+x^2yz\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial\left(-6xyz^2+6y^2z^5+\frac{xy}{\cos^2(xyz)}\right)}{\partial z}\\
&= -12xyz+6y^2\cdot 5z^4+\frac{0\cdot\cos^2(xyz)-xy\,2\cos(xyz)(-\sin(xyz))\cdot xy}{\cos^4(xyz)}\\
&= -12xyz+30y^2z^4+\frac{(xy)^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}
\end{aligned}$$

Druhé derivace jsou spojité funkce, a proto smíšené derivace jsou si rovny.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -2z^3 + \frac{z\cos^2(xyz) - xyz^2\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = -6yz^2 + \frac{y\cos^2(xyz) - xy^2z\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = -6xz^2 + 12yz^5 + \frac{x\cos^2(xyz) - x^2yz\sin(2xyz)}{\cos^4(xyz)}$$

Druhé derivace funkce obecně n-proměnných můžeme uspořádat do matice řádu n. Tato matice se nazývá *Hessova matice*.

Definice 11.2.10. Nechť existují druhé parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Matice

$$H_f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

se nazývá *Hessova matice*.

Pro elementární funkce n proměnných je Hessova matice symetrická matice typu $n \times n$. V následujícím příkladu si ukážeme nejen sestavení takové matice v konkrétní podobě, ale zopakujeme i výpočet determinantu matice.

Příklad 11.11

11.11. Vypočtěte determinant Hessovy matice funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$.

Řešení: Zadaná funkce je dvou proměnných. Hessova matice této funkce je matice řádu dva. Spočteme nejprve první parciální derivace podle každé z proměnných.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y\cdot(x^2+y^2) - xy(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x\cdot(x^2+y^2) - xy(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Nyní spočítáme všechny druhé parciální derivace.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)}{\partial x} = \frac{(0-2xy)\cdot(x^2+y^2)^2 - (y^3-x^2y)\cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(x^2+y^2)[-2xy(x^2+y^2) - 4x(y^3-x^2y)]}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^3y - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)}{\partial y} = \frac{(3y^2-x^2)\cdot(x^2+y^2)^2 - (y^3-x^2y)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(x^2+y^2)[(3y^2-x^2)(x^2+y^2) - 4y(y^3-x^2y)]}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{3y^2x^2 + 3y^4 - x^4 - x^2y^2 - 4y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6y^2x^2 - y^4 - x^4}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)}{\partial x} = \frac{(3x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^3-xy^2)2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(x^2+y^2)\cdot[(3x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)-4x(x^3-xy^2)]}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(3x^4+3x^2y^2-x^2y^2-y^4)-4x^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)}{\partial y} = \frac{-2xy\cdot(x^2+y^2)^2-(x^3-xy^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(x^2+y^2)[-2xy(x^2+y^2)-4y(x^3-xy^2)]}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{-2yx^3-2xy^3-4yx^3+4xy^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-6yx^3+2xy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

Vidíme, že smíšené derivace vyšly stejné. Nyní zbývá vypočítat hodnotu všech druhých derivací v bodě $[1,1]$.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{2\cdot 1^3\cdot 1-6\cdot 1\cdot 1^3}{(1^2+1^2)^3} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{6\cdot 1^2\cdot 1^2-1^4-1^4}{(1^2+1^2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{-1^4+6\cdot 1^2\cdot 1^2-1^4}{(x1^2+1^2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{-6\cdot 1\cdot 1^3+2\cdot 1\cdot 1^3}{(1^2+1^2)^3} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Pak zapíšeme Hessovu matici v bodě $[1,1]$ a determinant spočteme křížovým pravidlem.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Hodnota determinantu Hessovy matice funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$ je rovna nule.

11.3 Diferenciál funkce více proměnných

Stejně jako v případě diferenciálu funkce jedné proměnné si ukážeme, že i pomocí diferenciálu funkce více proměnných můžeme zjistit přibližnou funkční hodnotu funkce více proměnných v nějakém bodě definičního oboru. Ukážeme si vše nejprve na funkci dvou proměnných, pak definici diferenciálu rozšíříme na funkci více než dvou proměnných.

Předpokládejme, že funkce $f(x,y)$ je definována na množině $M \subseteq D_f$. Dále je dán bod $X_0 = [x_0, y_0] \in M$, funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace a nakonec uvažujme libovolný bod $X = [x,y] \in M$, který je blízko bodu $X_0 = [x_0,y_0]$. V bodě $f(X_0)$ sestrojíme tečny ke grafu funkce $f(x,y)$ ve směrech os x a y. Směrnice těchto tečen vyjadřují hodnoty parciálních derivací podle x a podle y v bodě $X_0 = [x_0,y_0]$. Tyto přímky určují rovinu, kterou nazveme *tečnou rovinou*. Funkční hodnota $f(X)$ se pak dá přibližně určit pomocí $f(X_0)$ a hodnot parciálních derivací funkce f v bodě $X_0 = [x_0,y_0]$. Platí

$$f(X) \approx f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y-y_0).$$

Rozdíl mezi takto vypočtenou přibližnou hodnotou funkce f v bodě $X = [x, y]$ a hodnotou $f(X_0)$ budeme nazývat *diferenciál* funkce f v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$. Označme změnu proměnné x symbolem Δx, je tedy $\Delta x = x - x_0$, a změnu proměnné y označíme symbolem Δy, kde $\Delta y = y - y_0$. Jestliže předpokládáme, že bod $X = [x, y]$ je libovolně blízko bodu $X_0 = [x_0, y_0]$, tedy $\Delta x \to 0$ a $\Delta y \to 0$, pak píšeme změny jednotlivých proměnných ve tvaru $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$. Diferenciál funkce dvou proměnných pak budeme psát ve tvaru

$$\mathrm{d}f(X_0) = \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Takto zavedený pojem diferenciálu funkce dvou proměnných si zobecníme pro funkce obecně více proměnných.

Definice 11.3.1. Nechť funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ spojité parciální derivace. Pak výraz $\mathrm{d}f(A)$, určený vztahem

$$\mathrm{d}f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n,$$

nazýváme *diferenciál funkce* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

11.12. Určete diferenciál funkce dvou proměnných $f(x, y) = \mathrm{e}^{y^2 - x}$. **Příklad 11.12**

Řešení: Nejprve spočteme parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{y^2-x} \cdot (-1) = -\mathrm{e}^{y^2-x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{y^2-x} \cdot 2y = 2y\,\mathrm{e}^{y^2-x}$$

Je tedy

$$\mathrm{d}f(x, y) = -\mathrm{e}^{y^2-x}\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{e}^{y^2-x}\mathrm{d}y.$$

11.13. Určete diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{3x - 5y}$ v bodě $C = [3, 1]$. **Příklad 11.13**

Řešení: Funkci přepíšeme do tvaru $f(x, y) = (3x - 5y)^{\frac{1}{2}}$ a spočteme parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(3x - 5y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x - 5y}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(3x - 5y)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-5) = -\frac{5}{2\sqrt{3x - 5y}}$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $C = [3, 1]$ jsou

$$\frac{\partial f(3, 1)}{\partial x} = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 3 - 5 \cdot 1}} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{\partial f(3, 1)}{\partial y} = -\frac{5}{2\sqrt{3 \cdot 3 - 5 \cdot 1}} = -\frac{5}{4}.$$

Pak

$$\mathrm{d}f(3, 1) = \frac{3}{4}\mathrm{d}x - \frac{5}{4}\mathrm{d}y.$$

V dalším příkladu si ukážeme, jak se dá diferenciál funkce využít k určení přibližné hodnoty určitého výrazu.

11.14. Určete přibližnou hodnotu výrazu $P = 2,05^{4,94}$. **Příklad 11.14**

Řešení: Nejprve si zadaný výraz zapíšeme jako funkční hodnotu určité funkce v daném bodě. Pro funkci $f(x, y) = x^y$ platí $P = f(2,05, 4,94)$. Bod $[2,05, 4,94]$ je blízko bodu $[2,5]$. Změna proměnné x je $\mathrm{d}x = 0,05$, změna proměnné y je $\mathrm{d}y = -0,06$. Pro vyjádření difereciálu vypočteme parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

Vypočteme hodnoty parciálních derivací v bodě $[2,5]$.

$$\frac{\partial f(2,5)}{\partial x} = 5 \cdot 2^{5-1} = 80$$
$$\frac{\partial f(2,5)}{\partial y} = 2^5 \cdot \ln 2 = 32 \ln 2$$

Diferenciál funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $[2,5]$ má hodnotu

$$\mathrm{d}f(2,5) = 80 \cdot 0,05 + 32 \ln 2 \cdot (-0,06) = 4 - 1,92 \ln 2.$$

Pak

$$P \approx 2^5 + 4 - 1,92 \ln 2 = 34,66915741.$$

Pro kontrolu, přesná hodnota je $P = 34,678801$.

V další části o lokálních extrémech funkce budeme potřebovat diferenciál druhého řádu. Tento pojem nejprve zavedeme.

Definice 11.3.2. Nechť má funkce f v bodě $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojité druhé parciální derivace. *Diferenciál druhého řádu* funkce f v bodě $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definujeme rovností

$$\mathrm{d}^2 f(X) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(X)).$$

Pro funkci dvou proměnných můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(X) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(X)) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(X)}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(X)}{\partial y}\mathrm{d}y\right)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(X)}{\partial y}\mathrm{d}y\right)}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x\,\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2.
\end{aligned}$$

Pokud se na diferenciál druhého řádu podíváme jako na funkci proměnných $\mathrm{d}(x)$ a $\mathrm{d}(y)$, jedná se o kvadratickou formu. Každou kvadratickou formu můžeme zapsat pomocí matice. V tomto případě je zmíněná matice Hessova matice. Označíme-li řádkový vektor $\mathrm{d}^T(X) = (\mathrm{d}(x), \mathrm{d}(y))$, můžeme psát

$$\mathrm{d}^2 f(X) = \mathrm{d}^T(X) H_f(X) \mathrm{d}(X).$$

Příklad 11.15

11.15. Určete diferenciál druhého řádu funkce dvou proměnných $f(x,y) = \ln(y-x)$ v bodě $C = [5,4]$.

Řešení: Vypočtěme nejprve první parciální derivace.

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x} = \frac{1}{y-x} \cdot (-1) = \frac{-1}{y-x}$$
$$\frac{\partial f(X)}{\partial y} = \frac{1}{y-x} \cdot (1) = \frac{1}{y-x}$$

Dále určeme druhé parciální derivace.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(\frac{-1}{y-x}\right)}{\partial x} = \frac{0\cdot(y-x)-(-1)\cdot(-1)}{(y-x)^2} = \frac{-1}{(y-x)^2}\\
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{-1}{y-x}\right)}{\partial y} = \frac{0\cdot(y-x)-(-1)\cdot(1)}{(y-x)^2} = \frac{1}{(y-x)^2}\\
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial y\,\partial x} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{y-x}\right)}{\partial x} = \frac{0\cdot(y-x)-(1)\cdot(-1)}{(y-x)^2} = \frac{1}{(y-x)^2}\\
\frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{y-x}\right)}{\partial y} = \frac{0\cdot(y-x)-(1)\cdot(1)}{(y-x)^2} = \frac{-1}{(y-x)^2}
\end{aligned}
$$

Potom diferenciál druhého řádu bude

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(X) &= \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2}(\mathrm{d}(x))^2 + 2\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x\,\partial y}\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y) + \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2}(\mathrm{d}(y))^2\\
&= \frac{-1}{(y-x)^2}(\mathrm{d}(x))^2 + 2\frac{1}{(y-x)^2}\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y) + \frac{-1}{(y-x)^2}(\mathrm{d}(y))^2\\
&= -\frac{1}{(y-x)^2}(\mathrm{d}(x))^2 + 2\frac{1}{(y-x)^2}\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y) - \frac{1}{(y-x)^2}(\mathrm{d}(y))^2.
\end{aligned}
$$

Nakonec stačí vypočítat hodnotu tohoto diferenciálu v bodě $C = [5, 4]$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(C) &= -\frac{1}{(4-5)^2}(\mathrm{d}(x))^2 + 2\frac{1}{(4-5)^2}\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y) - \frac{1}{(4-5)^2}(\mathrm{d}(y))^2\\
&= -(\mathrm{d}(x))^2 + 2\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y) - (\mathrm{d}(y))^2.
\end{aligned}
$$

Pomocí Hessovy matice můžeme diferenciál druhého řádu matice této funkce zapsat ve tvaru

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{d}(x) & \mathrm{d}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{(y-x)^2} & \frac{1}{(y-x)^2} \\ \frac{1}{(y-x)^2} & \frac{-1}{(y-x)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}(x) \\ \mathrm{d}(y) \end{pmatrix}
$$

a v bodě $C = [5, 4]$ máme

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{d}(x) & \mathrm{d}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}(x) \\ \mathrm{d}(y) \end{pmatrix}.
$$

Nakonec připomeňme, že Hessova matice je pozitivně (resp. negativně) definitní, jestliže příslušná kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f(X)$ je pozitivně (resp. negativně) definitní. Hessova matice je indefinitní, jestliže příslušná kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f(X)$ je indefinitní.

11.4 Globální a lokální extrémy funkcí více proměnných

Stejně jako v kapitole o lokálních extrémech funkce jedné proměnné, zavedeme si nejprve pojmy lokálních a globálních extrémů funkce více proměnných.

Definice 11.4.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a nechť funkce f je definována v bodě $C \in M$. Řekneme, že v bodě $C \in M \subseteq D_f$ nastává *maximum funkce f vzhledem k množině M*, jestliže pro všechna $X \in M$ platí

$$f(X) \leq f(C).$$

Řekneme, že v bodě $C \in M \subseteq D_f$ nastává *minimum funkce f vzhledem k množině M*, jestliže pro všechna $X \in M$ platí

$$f(X) \geq f(C).$$

Maximum funkce f vzhledem k množině M značíme symbolem

$$\max_M f(X) = f(C).$$

Minimum funkce f vzhledem k množině M značíme symbolem

$$\min_M f(X) = f(C).$$

Maximum a minimum funkce na množině M souhrnně nazýváme *extrémy funkce f vzhledem k množině M*.

Definice 11.4.2. Pokud je množina M definičním oborem D_f funkce f, nazýváme extrém funkce f vzhledem k množině M *globálním (absolutním) extrémem*. Pokud existuje okolí $U_C^\delta \subset D_f$ a v bodě C nastává extrém funkce f, nazýváme tento extrém funkce f na množině U_C^δ *lokálním extrémem*.

Stejně jako u funkcí jedné proměnné uvedeme nyní vlastnosti funkcí více proměnných, které nám umožní vyšetřovat lokální extrémy funkcí více proměnných.

Věta 11.4.3 (Nutná podmínka pro extrém funkce více proměnných)**.** *Jestliže funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v některém svém vnitřním bodě C lokální extrém, potom pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí*

buď $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$,

nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *neexistuje.*

Tato věta tvrdí, že aby funkce f mohla mít v bodě C lokální extrém, musí být v bodě C nutně parciální derivace podle všech proměnných x_i buď nulové, nebo tyto derivace v bodě C neexistují. Jinými slovy, pokud v bodě C parciální derivace alespoň podle jedné z proměnných existuje a je nenulová, nemůže v bodě C nastávat lokální extrém funkce f.

Definice 11.4.4. Body z definičního oboru funkce f, ve kterých je splněna nutná podmínka z Věty 11.4.3, budeme nazývat *stacionární body*.

Poznamenejme, že stacionární body jsou body, které jsou „podezřelé“ z toho, že v nich má funkce f lokální extrém. Tento extrém v nich může, ale také nemusí nastat.

Příklad 11.16

11.16. Nalezněme stacionární body funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^2 + 3x + 4y + 43.$$

Řešení: Definičním oborem zadané funkce je celá množina $\mathbb{R}^2$. Nyní stačí vypočítat parciální derivace podle obou proměnných a pak, pokud budou existovat, je položit rovny nule.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 6y + 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x + 2y + 4$$

Obě parciální derivace existují v každém bodě množiny $\mathbb{R}^2$. Abychom zjistili stacionární body, položíme parciální derivace rovny nule a dostaneme soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} 6x + 6y + 3 &= 0 \qquad \text{neboli} \qquad & 6x + 6y &= -3 \\ 6x + 2y + 4 &= 0 & 6x + 2y &= -4 \end{aligned}$$

Vynásobením druhé rovnice mínus jednou a sečtením obou rovnic dostáváme řešení $y = \frac{1}{4}$. Dosazením této hodnoty do kterékoli z obou rovnic dostaneme $x = -\frac{3}{4}$. Daná funkce má jeden stacionární bod $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

11.17. Nalezněte stacionární body funkce dvou proměnných **Příklad 11.17**

$$f(x,y) = 2\sqrt{2x^2 + 3y^2}.$$

Řešení: Nejprve musíme určit definiční obor této funkce. Pod druhou odmocninou musí být nezáporná hodnota, tedy $2x^2 + 3y^2 \geq 0$. Tato nerovnost je splněna pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Definičním oborem této funkce jsou všechny reálné dvojice $[x, y]$. Nyní určíme parciální derivace. Zadaná funkce je složená funkce. Před derivováním přepíšeme odmocninu na racionální mocninu $f(x,y) = 2(2x^2 + 3y^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 3y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x = \frac{4x}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x^2 + 3y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6y = \frac{6y}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}$$

Obě parciální derivace mají předpis ve tvaru zlomku. Tento zlomek není definován v bodě $[0, 0]$. V tomto bodě neexistují parciální derivace podle obou proměnných. Zjistili jsme, že zadaná funkce má jeden stacionární bod, a to $[0, 0]$.

Věta 11.4.5 (Postačující podmínka pro lokální extrém funkce více proměnných)**.** *Předpokládejme, že ve vnitřním bodě $C \in D_f$ jsou všechny parciální derivace funkce f rovny nule a funkce f má v jistém okolí bodu C spojité parciální derivace druhého řádu. Jestliže je navíc kvadratická forma* $\mathrm{d}^2 f(C)$

a) pozitivně definitní, *pak v bodě C nastává* lokální minimum,

b) negativně definitní, *pak v bodě C nastává* lokální maximum,

c) indefinitní, *pak v bodě C, není lokální extrém. V takovém případě řekneme, že bod C je* sedlový bod *funkce f.*

Předchozí vlastnost neřeší situaci, kdy kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f(C)$ je pozitivně semidefinitní, nebo negativně semidefinitní. V takovém případě musíme lokální extrém vyšetřovat jinak. Připomeňme, že matice příslušná kvadratické formě $\mathrm{d}^2 f(X)$ je Hessova matice. O pozitivní definitnosti, negativní definitnosti či indefinitnosti příslušné Hessovy matice v bodě C pak můžeme rozhodnout podle Sylvestrovy věty 4.10.9 na straně 204.

11.18. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných **Příklad 11.18**

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: Definiční obor zadané funkce je množina $\mathbb{R}^2$. Pro nalezení lokálních extrémů musíme nejprve určit stacionární body. Vypočtěme tedy parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Položíme-li tyto parciální derivace rovny nule, dostaneme jednoduchou soustavu dvou lineárních rovnic.

$$2x = 0$$
$$-2y = 0$$

Odtud dostáváme jeden stacionární bod, a to $[0, 0]$. Pro ověření, zda v tomto bodě opravdu nastává lokální extrém, musíme vypočítat druhé parciální derivace v bodě $[0, 0]$

a uspořádat je do Hessovy matice.

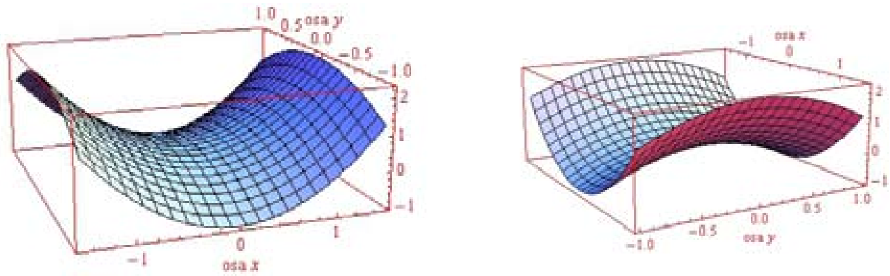
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial(-2y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(2x)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(-2y)}{\partial y} = -2$$

Hessova matice pak bude následující

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Druhé parciální derivace jsou konstantní, a proto Hessova matice zadané funkce v bodě $[0,0]$ bude mít stejný tvar. Musíme spočítat její subdeterminanty a zjistit jejich znaménka. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ a $D_1 = 2 > 0$. Podle Sylvestrovy věty je příslušná kvadratická forma indefinitní. Ve stacionárním bodě $[0,0]$ nastává tedy sedlo. Na Obrázcích 11.10(a) a 11.10(b) vidíme graf zadané funkce jednou z pohledu osy x, podruhé otočený o $90°$ z pohledu osy y. Graf této funkce v okolí bodu $[0,0]$ opravdu připomíná koňské sedlo.



(a) Pohled ze směru osy x (b) Pohled ze směru osy y

Obrázek 11.10: Graf funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$

Příklad 11.19

11.19. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: Nejprve opět musíme určit definiční obor zadané funkce. Ten je $D_f = \mathbb{R}^2$, protože v předpisu funkce jsou jen mocniny a ty existují pro každé reálné číslo. Dále vypočteme první parciální derivace.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y$$

Tyto derivace položíme rovny nule a dostáváme soustavu rovnic

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$3y^2 - 6y = 0.$$

Z první rovnice dostáváme $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$. Ze druhé rovnice dostáváme $y = 0$ a $y = 2$. Stacionárních bodů je tedy celkem šest: $[0,0]$, $[1,0]$, $[-1,0]$, $[0,2]$, $[1,2]$ a $[-1,2]$. Pro vyšetření, který ze stacionárních bodů je bodem lokálního extrému, musíme nejprve vypočítat parciální derivace druhého řádu.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(4x^3 - 4x)}{\partial x} = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial(3y^2 - 6y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(4x^3 - 4x)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(3y^2 - 6y)}{\partial y} = 6y - 6$$

Tyto derivace uspořádáme do Hessovy matice

$$H_f([x,y]) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix}.$$

Hessovu matici vyjádříme postupně ve všech stacionárních bodech.

$$H_f([0,0]) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad H_f([1,0]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$H_f([-1,0]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad H_f([0,2]) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H_f([1,2]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad H_f([-1,2]) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dále spočteme determinanty těchto matic.

$$\det H_f([0,0]) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 \qquad \det H_f([1,0]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -48$$

$$\det H_f([-1,0]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -48 \qquad \det H_f([0,2]) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24$$

$$\det H_f([1,2]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 \qquad \det H_f([-1,2]) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

- V bodě $[0,0]$ nastává lokální maximum, protože $\det H_f([0,0]) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$,
- v bodě $[1,0]$ nastává sedlo, protože $\det H_f([1,0]) < 0$,
- v bodě $[-1,0]$ nastává sedlo, protože $\det H_f([-1,0]) < 0$,
- v bodě $[0,2]$ nastává sedlo, protože $\det H_f([0,2]) < 0$,
- v bodě $[1,2]$ nastává lokální minimum, protože $\det H_f([1,2]) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$,
- v bodě $[-1,2]$ nastává lokální minimum, neboť $\det H_f([-1,2]) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$.

Všechna vyšetřená sedla i lokální extrémy jsou dobře vidět na Obrázku 11.11.

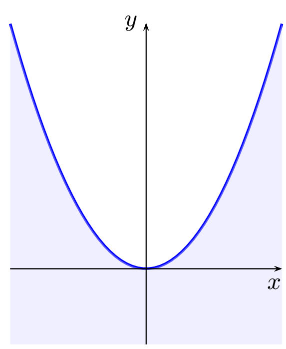
11.20. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných **Příklad 11.20**

$$f(x,y) = -y - \ln(x^2 - y)$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: V předpisu zadané funkce je přirozený logaritmus, což je funkce definovaná pouze pro kladné argumenty.

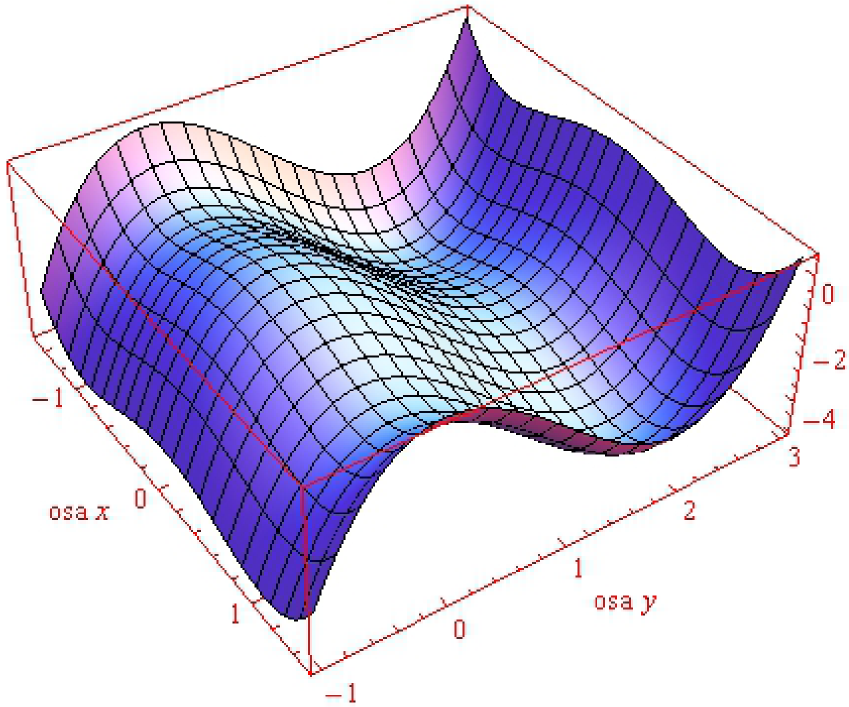
Odtud máme $x^2 - y > 0$, neboli $x^2 > y$. Zadaná funkce je definovaná pouze pro ty body z $\mathbb{R}^2$, pro které platí, že druhá mocnina první složky je větší než druhá složka bodu z roviny. Dále spočítáme první parciální derivace, položíme je rovny nule a ze vzniklé soustavy rovnic vypočítáme stacionární body.



$D(f) = \{[x,y] : x^2 > y\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 - \frac{1}{x^2 - y} \cdot 2x = \frac{-2x}{x^2 - y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 - \frac{1}{x^2 - y} \cdot (-1) = -1 + \frac{1}{x^2 - y}$$

$$\frac{-2x}{x^2 - y} = 0$$
$$-1 + \frac{1}{x^2 - y} = 0$$



Obrázek 11.11: Graf funkce $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$

Protože zlomek se rovná nule, jestliže se jeho čitatel rovná nule, z první rovnice dostáváme, že $-2x = 0$ a odtud $x = 0$. Tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice a vypočteme proměnnou y.

$$\begin{aligned} -1 + \frac{1}{0^2 - y} &= 0 \\ -\frac{1}{y} &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Ověříme ještě, že vypočtený bod leží v definičním oboru funkce. Musí platit $x^2 > y$, $0^2 > -1$. Tato nerovnost platí, vyšetřený bod patří do definičního oboru funkce. Zadaná funkce má tedy pouze jeden stacionární bod $[0,-1]$. Dále vypočteme parciální derivace druhého řádu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(\frac{-2x}{x^2-y}\right)}{\partial x} = \frac{-2(x^2-y)-(-2x)(2x-0)}{(x^2-y)^2} = \frac{2x^2+2y}{(x^2-y)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{-2x}{x^2-y}\right)}{\partial y} = \frac{-2\cdot 0\cdot(x^2-y)-(-2x)(0-1)}{(x^2-y)^2} = \frac{-2x}{(x^2-y)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} &= \frac{\partial\left(-1+\frac{1}{x^2-y}\right)}{\partial x} = 0 + \frac{0\cdot(x^2-y)-1\cdot(2x-0)}{(x^2-y)^2} = \frac{-2x}{(x^2-y)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial\left(-1+\frac{1}{x^2-y}\right)}{\partial y} = 0 + \frac{0\cdot(x^2-y)-1(0-1)}{(x^2-y)^2} = \frac{1}{(x^2-y)^2} \end{aligned}$$

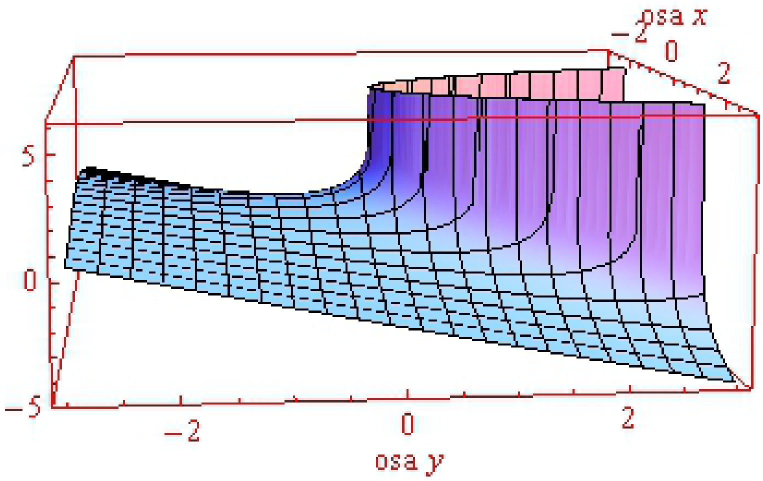
Hessova matice zadané funkce bude

$$\begin{pmatrix} \frac{2x^2+2y}{(x^2-y)^2} & \frac{-2x}{(x^2-y)^2} \\ \frac{-2x}{(x^2-y)^2} & \frac{1}{(x^2-y)^2} \end{pmatrix}.$$

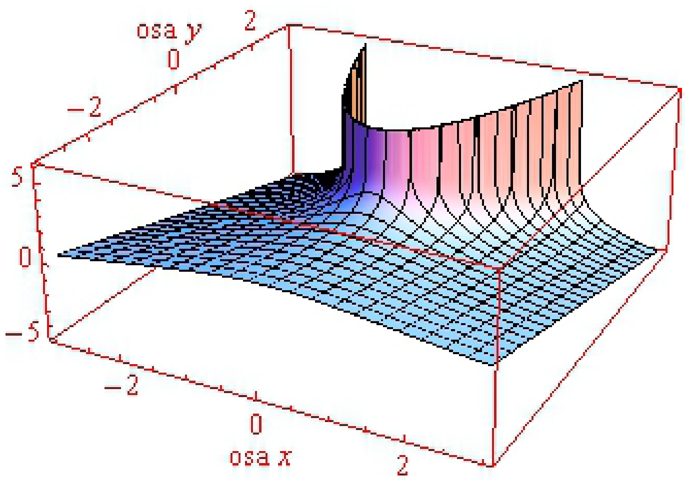
Její hodnota v bodě $[0, -1]$ je $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinant této matice je $\det H_f([0, -1]) = -2 < 0$. Stacionární bod $[0, -1]$ je sedlovým bodem. Zadaná funkce nemá lokální extrémy.

Část grafu této funkce máme zobrazenu na Obrázcích 11.12 a 11.13. Na prvním z těchto obrázků je graf zadané funkce z pohledu osy y, na Obrázku 11.13 je graf této funkce mírně pootočený. Na těchto obrázcích dobře vidíme jak hranici definičního oboru, tak vyšetřené sedlo v bodě $[0, -1]$.



Obrázek 11.12: Graf funkce $f(x, y) = -y - \ln(x^2 - y)$



Obrázek 11.13: Graf funkce $f(x, y) = -y - \ln(x^2 - y)$

Nakonec se zabývejme případem, kdy nehledáme jen lokální extrémy, ale i globální extrémy. A to navíc v případě, kdy množina, na které vyšetřujeme extrém, je kompaktní. O tom, že zadaný problém má řešení nás informuje následující věta analogická k Větě 6.1.12 na straně 323.

Věta 11.4.6 (Weierstrassova věta)**.** *Spojitá reálná funkce definovaná na neprázdné kompaktní množině nabývá na této množině svého maxima a minima.*

Extrémy funkce (ať již lokální nebo globální) mohou nastat v pouze v bodech, pro které platí následující

a) parciální derivace podle všech proměnných jsou v těchto bodech rovny 0,

b) některé (nebo i všechny) parciální derivace v těchto bodech neexistují a zbývající parciální derivace v těchto bodech jsou rovny 0,

c) v hraničních bodech definičního oboru funkce.

Při vyšetřování globálních extrémů spojité funkce na kompaktní množině budeme postupovat následujícím způsobem.

I. Určení podezřelých bodů Určíme všechny body, které splňují jednu z předcházejících tří podmínek.

II. Rozlišení sedel a lokálních extrémů Ze stacionárních bodů vybereme ty body, které jsou lokálními extrémy.

III. Určení funkčních hodnot Výpočet funkčních hodnot v bodech lokálních extrémů a ve významných hraničních bodech.

IV. Určení globálních extrémů Z bodů lokálních maxim a hraničních bodů vybereme ten, ve kterém funkční hodnota je největší (globální maximum). Z bodů lokálních minim a hraničních bodů vybereme ten, ve kterém funkční hodnota je nejmenší (globální minimum).

Popsaný postup si předvedeme na následujícím příkladě.

Příklad 11.21

11.21. Nalezněte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = \sqrt{18-2x^2} + \sqrt{12-3y^2}$$

na jejím definičním oboru.

Řešení: Určíme nejprve definiční obor této funkce. V předpisu funkce jsou druhé odmocniny a ty jsou definovány pouze pro nezáporné argumenty. Odtud dostáváme podmínku, že $18-2x^2 \geq 0$ a $12-3xy^2 \geq 0$. Vyřešením těchto nerovností dostaneme, že $-3 \leq x \leq 3$ a $-2 \leq y \leq 2$. Definiční obor zadané funkce je tedy obdélník $\{[x,y]; x \in \langle -3,3\rangle, y \in \langle -2,2\rangle\}$. Dále určíme stacionární body. Jelikož

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}},$$

dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}} &= 0 \\ \frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení, a to bod $[0,0]$. Tento bod leží v definičním oboru funkce. Spočítáme druhé parciální derivace a přesvědčíme se, zda se jedná o lokální extrém.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}}\right)}{\partial x} = \frac{-2\sqrt{18-2x^2} - (-2x)\frac{1}{2}\frac{-4x}{\sqrt{18-2x^2}}}{\left(\sqrt{18-2x^2}\right)^2} = \frac{-36}{\left(\sqrt{18-2x^2}\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}}\right)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}}\right)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}}\right)}{\partial y} = \frac{-3\sqrt{12+3y^2} - (-3y)\frac{1}{2}\frac{-6y}{\sqrt{12-3y^2}}}{\left(\sqrt{12-3y^2}\right)^2} = \frac{-36-18y^2}{\left(\sqrt{12-3y^2}\right)^3}$$

Hessova matice zadané funkce bude

$$\begin{pmatrix} \frac{-36}{\sqrt{18-2x^2}^3} & 0 \\ 0 & \frac{-36-18y^2}{(\sqrt{12-3y^2})^3} \end{pmatrix}.$$

Hessova matice v bodě $[0,0]$ je $\begin{pmatrix} -\frac{36}{(\sqrt{18})^3} & 0 \\ 0 & \frac{-36}{(\sqrt{12})^3} \end{pmatrix}$. Determinant této matice má kladnou hodnotu. Protože druhá parciální derivace podle x je záporná, jediný stacionární bod je tedy lokální maximum. Musíme ještě vyšetřit hranici definičního oboru. Uvažujme jednotlivé hranice obdélníku, který je definičním oborem funkce. Jednotlivé strany tohoto obdélníku jsou množiny

$$\begin{array}{ll} \{[3,y]; y \in \langle -2,2 \rangle\} & \{[-3,y]; y \in \langle -2,2 \rangle\} \\ \{[x,2]; x \in \langle -3,3 \rangle\} & \{[x,-2]; x \in \langle -3,3 \rangle\}. \end{array}$$

Na množině $\{[3,y]; y \in \langle -2,2 \rangle\}$ má daná funkce předpis

$$g(y) = f(3,y) = \sqrt{12-3y^2}.$$

Stejný předpis má funkce na množině $\{[-3,y]; y \in \langle -2,2 \rangle\}$. Jedná se o funkci jedné proměnné. Pro nalezení lokálních extrémů vypočteme první derivaci této funkce. Platí $g'(y) = \frac{-3y}{\sqrt{12-3y^2}}$. Tato derivace je rovna nule v bodě $y = 0$. Platí $0 \in \langle -2,2 \rangle$. Dále tato derivace neexistuje pro $y = 2$ a $y = -2$. Druhá derivace $g''(y) = \frac{-36}{\left(\sqrt{12-3y^2}\right)^3}$ je pro $y = 0$ záporná, v tomto bodě nastává lokální maximum funkce $g(y)$. Body $y = 2$ a $y = -2$ jsou body lokálních minim funkce $g(y)$.

Stejně tak daná funkce na množinách $\{[x,2]; x \in \langle -3,3 \rangle\}$ a $\{[x,-2]; x \in \langle -3,3 \rangle\}$ má předpis

$$h(x) = f(x,2) = f(x,-2) = \sqrt{18-2x^2}.$$

Derivace této funkce jedné proměnné x je rovna $h'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{18-2x^2}}$. Tato je rovna nule pro $x = 0$ a neexistuje pro $x = 3$ a $x = -3$. Pomocí druhé derivace $h''(x) = \frac{-36}{\left(\sqrt{18-2x^2}\right)^3}$ zjistíme, že v bodě $x = 0$ má funkce $h(x)$ lokální maximum. V bodech $x = 3$ a $x = -3$ má funkce $h(x)$ globální minima.

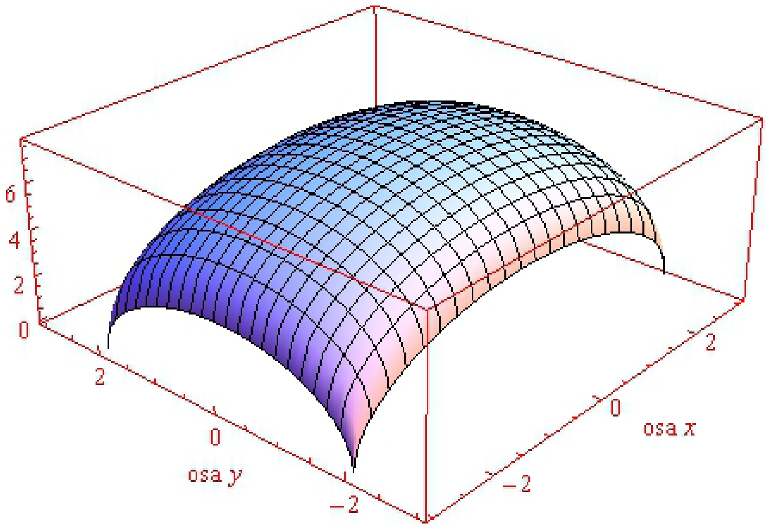
Zjistili jsme, že zadaná funkce dvou proměnných má vzhledem k množině dané hraničními body minima v bodech $[-3,2]$, $[3,2]$, $[3,-2]$, $[-3,-2]$ a maxima v bodech $[0,2]$, $[3,0]$, $[0,-2]$ a $[-3,0]$. Nyní zjistíme funkční hodnoty v těchto bodech a porovnáme je s funkční hodnotou v bodě $[0,0]$, o kterém již víme, že je lokálním maximem funkce $f(x,y)$. Platí

$$f(3,2) = f(-3,2) = f(-3,-2) = f(3,-2) = 0.$$

Odtud plyne, že zadaná funkce nabývá neostrá globální minima ve všech těchto bodech. Pro nalezená maxima platí

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \\ f(-3,0) &= 2\sqrt{3} \\ f(3,0) &= 2\sqrt{3} \\ f(0,-2) &= 3\sqrt{2} \\ f(0,2) &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Největší hodnotu nabývá funkce $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$. Proto je tento bod globálním maximem funkce $f(x,y)$. Graf funkce můžeme vidět na Obrázku 11.14.



Obrázek 11.14: Graf funkce $f(x,y) = \sqrt{18-2x^2} + \sqrt{12-3y^2}$

11.5 Cvičení

Vypočtěte první parciální derivace podle obou proměnných následujících funkcí.

11.5.1. $f(x,y) = 5x^2y^3 + 3\sqrt{x}\mathrm{e}^y - \ln x$

11.5.2. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x+y}}$

11.5.3. $f(x,y) = \frac{x}{\ln y}$

11.5.4. $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$

11.5.5. $f(x,y) = (x-y)\ln(2x+y)$

11.5.6. $f(x,y) = \sin xy^2 + \mathrm{e}^{x^2y}$

11.5.7. $f(x,y) = \ln\sqrt{2x^3+y^2}$

11.5.8. $f(x,y) = (3^{xy} - \operatorname{cotg}(x-y))^6$

11.5.9. $f(x,y) = \frac{y\,\mathrm{e}^x}{x+y^2}$

Spočítejte první parciální derivace podle obou proměnných následujících funkcí v daném bodě C.

11.5.10. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v $C = [-1,1]$

11.5.11. $f(x,y) = \sqrt{3xy+y^3}$ v $C = [2,3]$

11.5.12. $f(x,y) = x\ln(x^2+y)$ v $C = [1,0]$

11.5.13. $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{xy}}{xy}$ v $C = [2,-1]$

11.5.14. $f(x,y) = \ln\sqrt{xy^3}$ v $C = [-1,-1]$

Vypočítejte všechny druhé parciální derivace následujících funkcí.

11.5.15. $f(x,y) = 5xy^2 - \frac{x^3}{y^2}$

11.5.16. $f(x,y) = \cos xy$

11.5.17. $f(x,y) = x^y$

11.5.18. $f(x,y) = (5x-y)^4$

11.5.19. $f(x,y) = \frac{xy}{y-x}$

Nalezněte Hessovy matice následujících funkcí v bodě A.

11.5.20. $f(x,y) = xy^2 - \frac{y}{x} + 2\sqrt{x}$, $A = [1,2]$

11.5.21. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$, $A = [-1,0]$

Vypočítejte diferenciál prvního a druhého řádu následujících funkcí v bodě A.

11.5.22. $f(x,y) = x^5y^3$, $A = [-1,1]$

11.5.23. $f(x,y) = \ln(3x - 7y^2)$, $A = [1,-1]$

11.5.24. $f(x,y) = x^2y^3 - x^3 + 3y$, $A = [1,2]$

Pomocí diferenciálu prvního řádu vypočítejte hodnotu následujících výrazů.

11.5.25. $v = \sqrt{4{,}98 - 1{,}04^2}$

11.5.26. $v = \frac{\sqrt{9{,}09}}{2{,}96}$

11.5.27. $v = (4{,}03 - 1{,}95)^5$

11.5.28. $v = \ln(2{,}05 - 0{,}98^2)$

Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí.

11.5.29. $f(x,y) = x^2 + \frac{2y^2}{x} + 4y$

11.5.30. $f(x,y) = xy - x + y$

11.5.31. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$

11.5.32. $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$

11.5.33. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11.5.34. $f(x,y) = x^3 + y^3 + x + y$

11.5.35. $f(x,y) = (x+y^2)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

11.5.36. $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

11.5.37. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{4x - x^2 - 4y^2}$.

Výsledky cvičení

11.5.1 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 10xy^3 + \frac{3\mathrm{e}^y}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 15x^2y^2 + 3\sqrt{x}\mathrm{e}^y$ **11.5.2** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2y^2+xy}{2\sqrt{(x+y)^3}}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^2+xy}{2\sqrt{(x+y)^3}}$ **11.5.3** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\ln y}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-x}{y\ln^2 y}$ **11.5.4** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **11.5.5** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln(2x+y) + \frac{2x-y}{2x+y}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\ln(2x+y) + \frac{x-y}{2x+y}$ **11.5.6** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos xy^2 + 2x\,\mathrm{e}^{x^2y}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y\cos xy^2 + \mathrm{e}^{x^2y}$ **11.5.7** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{3x^2}{2x^3+y^2}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{2x^3+y^2}$ **11.5.8** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6(3^{xy} - \mathrm{cotg}(x-y))^5(y\,3^{xy}\ln 3 + \frac{1}{\sin^2(x-y)})$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6(3^{xy} - \mathrm{cotg}(x-y))^5(x\,3^{xy}\ln 3 - \frac{1}{\sin^2(x-y)})$ **11.5.9** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y\mathrm{e}^x(x+y^2-1)}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^x(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$ **11.5.10** $\frac{\partial f(-1,1)}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial f(-1,1)}{\partial y} = 1$ **11.5.11** $\frac{\partial f(2,3)}{\partial x} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$, $\frac{\partial f(2,3)}{\partial y} = \frac{11}{2\sqrt{5}}$ **11.5.12** $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 1$ **11.5.13** $\frac{\partial f(2,-1)}{\partial x} = -\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$, $\frac{\partial f(2,-1)}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ **11.5.14** $\frac{\partial f(-1,-1)}{\partial x} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f(-1,-1)}{\partial y} = -\frac{3}{2}$ **11.5.15** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} =$

$\frac{6x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 10x - \frac{6x^3}{y^4}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = 10y + \frac{6x^2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = 10y + \frac{6x^2}{y^3}$ **11.5.16** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = -\sin xy - xy\cos xy$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = -\sin xy - xy\cos xy$ **11.5.17** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1}(1+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = x^{y-1}(y\ln x+1)$ **11.5.18** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 180(5x-y)^2$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 12(5x-y)^2$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = -60(5x-y)^2$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = -60(5x-y)^2$ **11.5.19** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(y-x)^3}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(y-x)^3}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{-2xy}{(y-x)^3}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{-2xy}{(y-x)^3}$ **11.5.20** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{2y}{x^3} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = 2y + \frac{1}{(x)^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = 2y + \frac{1}{(x)^2}$, $H_f[1,2] = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ **11.5.21** $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = y^2 \mathrm{e}^{-xy}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = x^2 \mathrm{e}^{-xy}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = (xy-1)\mathrm{e}^{-xy}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = (xy-1)\mathrm{e}^{-xy}$, $H_f[-1,0] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
11.5.22 $\mathrm{d}(x,y)f = 5x^4y^3\mathrm{d}x + 3x^5y^2\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}f(-1,1) = 5\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 f(x,y) = 20x^3y^3\mathrm{d}x^2 + 30x^4y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 6x^5y\mathrm{d}y^2$, $\mathrm{d}^2 f(-1,1) = -20\mathrm{d}x^2 + 30\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 6\mathrm{d}y^2$ **11.5.23** $\mathrm{d}(x,y)f = \frac{3}{3x-7y^2}\mathrm{d}x - \frac{14y}{3x-7y^2}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}f(1,-1) = -\frac{3}{4}\mathrm{d}x - \frac{7}{2}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 f(x,y) = -\frac{9}{(3x-7y^2)^2}\mathrm{d}x^2 - \frac{84y}{(3x-7y^2)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{14(3x+7y)}{(3x-7y^2)^2}\mathrm{d}y^2$, $\mathrm{d}^2 f(1,-1) = -\frac{9}{16}\mathrm{d}x^2 + \frac{84}{16}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{35}{4}\mathrm{d}y^2$ **11.5.24** $\mathrm{d}(x,y)f(x,y) = (2xy^3 - 3x^2)\mathrm{d}x + (3x^2y^2+3)\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}f(1,2) = 13\mathrm{d}x + 15\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}^2 f(x,y) = (2y^3 - 6x)\mathrm{d}x^2 + 12xy^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (6x^2y)\mathrm{d}y^2$, $\mathrm{d}^2 f(1,2) = 10\mathrm{d}x^2 + 48\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 12\mathrm{d}y^2$ **11.5.25** $v = 1,975$, hodnota na kalkulačce $v = 1,9744$ **11.5.26** $v = 1,09$, hodnota na kalkulačce $v = 1,0186$ **11.5.27** $v = 38,4$, hodnota na kalkulačce $v = 38,93$ **11.5.28** $v = 0,09$, hodnota na kalkulačce $v = 0,0858$ **11.5.29** Lokální minimum v bodě $A = [1,-1]$, $f(A) = -1$ **11.5.30** Sedlový bod $A = [1,-1]$ **11.5.31** Lokální maximum v bodě $A = [0,0]$, $f(A) = 0$, lokální minima v bodech $B = [1,2]$, $f(B) = -5$ a $C = [-1,2]$, $f(C) = -5$, sedlové body $D = [-1,0]$, $E = [1,0]$, $F = [0,2]$. **11.5.32** Lokální minimum v bodě $A = [2,2]$, $f(A) = -8$, sedlový bod $B = [0,0]$. **11.5.33** Lokální minimum v bodě $A = [0,0]$, $f(A) = 0$, lokální maximum v bodě $B = [-\frac{5}{3}, 0]$, $f(B) = -\frac{5^4}{3^3}$, sedlové body $C = [-1,2]$ a $D = [-1,-2]$. **11.5.34** Funkce nemá žádné lokální extrémy. **11.5.35** Lokální minimum v bodě $A = [-2,0]$, $f(A) = -\frac{2}{\mathrm{e}}$. **11.5.36** Lokální maximum v bodě $B = [4,4]$, $f(B) = 15$. **11.5.37** Globální minimum v bodech A pro něž platí $4x - x^2 = 4y^2$, $f(A) = 0$, globální maximum v bodě $B = [2,0]$, $f(B) = 2$.

Kapitola 12

Lineární programování

V této kapitole se budeme zabývat jednou z rozsáhlých oblastí aplikované matematiky zvanou lineární programování, jednou z nejstarších disciplín operačního výzkumu. Tato oblast úzce navazuje na teorii lineární algebry, speciálně teorii lineárních nerovností, která byla propracována již na počátku 19. století maďarským matematikem JULIUSEM FARKASEM (1847-1930). Bouřlivý rozvoj lineárního programování však nastal až v době kolem 2. světové války a byl vyvolán nutností řešit složité ekonomické problémy. Mezi první matematiky zabývající se tímto problémem patřil ruský matematik LEONID VITALIYEVICH KANTOROVICH (1912-1986) , který v roce 1939 matematicky zformuloval daný problém, a tím dal základ celému odvětví. Otcem lineárního programování však můžeme nazvat až amerického matematika GEORGE BERNARDA DANTZIGA (1914-2005), který v roce 1947 zformuloval algoritmus k řešení úlohy lineárního programování. Tato metoda se nazývá simplexová metoda a je využívána dodnes.

Lineární programování se řadí do široké skupiny úloh matematického programování, což je speciální druh optimalizačních úloh. Jak název napovídá, celé odvětví se zabývá řešením lineárních úloh, speciálně řešením problému nalezení optima (minima resp. maxima) lineární funkce n proměnných na množině dané podmínkami popsanými soustavou lineárních rovností a nerovností.

12.1 Matematická formulace problému

Jak již bylo v úvodu řečeno, úloha lineární optimalizace se skládá z omezujících podmínek vyjádřených jako lineární rovnosti či nerovnosti a z lineární tzv. účelové funkce. Úkolem úlohy je nalézt řešení splňující všechna omezení, která optimalizují (tj. minimalizují či maximalizují) účelovou funkci. Jinými slovy hledáme extrém (minimum či maximum) lineární funkce n proměnných při splnění podmínek vyjádřených lineárními rovnicemi či nerovnicemi.

Z matematiky víme, že každou nerovnici můžeme převést na rovnici o větším počtu neznámých, než měla původní nerovnice. Toto je jeden ze základních faktů lineární algebry a my si to podrobně vysvětlíme právě v této kapitole. A také víme, že hledání minima funkce můžeme převést na hledání maxima upravené funkce. O tomto poznatku z oblasti matematické analýzy se také zmíníme v dalším textu kapitoly. Z těchto důvodů můžeme zjednodušeně formulovat obecnou úlohu lineárního programování následovně.

Nalézt maximum lineární funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{12.1}$$

za splnění podmínek

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \tag{12.2}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$
$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \tag{12.3}$$

Definice 12.1.1. Funkci (12.1), jejíž maximum hledáme, nazýváme *účelovou funkcí*.

Definice 12.1.2. Rovnice (12.2) nazýváme *vlastními omezeními úlohy*.

Definice 12.1.3. Nerovnice (12.3) nazýváme *podmínkami nezápornosti*.

Úlohu lineárního programování lze zapsat stručně a přehledně v maticovém tvaru.

Nalézt maximum lineární funkce

$$z = (\mathbf{c})^T \mathbf{x} \tag{12.4}$$

při splnění podmínek

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{12.5}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{12.6}$$

kde matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ nazýváme *maticí strukturálních koeficientů*,

vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ nazýváme *vektorem řešení*,

vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ nazýváme *vektorem omezení*, neboli *vektorem pravých stran*,

vektor $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ nazýváme *vektorem cen*,

vektor $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ je nulový vektor.

Mějme na paměti, že jak bylo výše zmíněno, u vlastních omezení mohou být místo rovnic nerovnice obou typů $(\leq, \geq)$.

Příklad 12.1

12.1. Vytvořte matematický model následující úlohy LP.

Dílna vyrábí dva výrobky V1 a V2, výrobek V1 prodává za dva tisíce Kč a výrobek V2 prodává také za dva tisíce Kč. Na výrobu obou výrobků potřebuje jednak surovinu S1, a to 3 kg na každý kus výrobku V1 a 1 kg na každý kus výrobku V2. Dále na výrobu obou výrobků potřebuje surovinu S2, a to 2 g na každý výrobek V1 a 3 g na každý výrobek V2. Dílna má na den k dispozici 6 kg suroviny S1 a 11 g suroviny S2. Jak máme v dílně naplánovat denní výrobu, pokud nesmíme překročit disponibilní množství obou surovin a naším cílem je optimalizovat tržby?

Řešení: Nejdříve si musíme uvědomit, co a jak chceme optimalizovat, a na základě této informace určíme, kolik neznámých budeme mít a jaké budou, a sestrojíme účelovou funkci.

V našem případě vidíme, že chceme optimalizovat tržby. Tržby jistě chceme mít co největší, proto budeme naši účelovou funkci maximalizovat.

A z čeho máme tržby? Peníze jednak získáváme z výrobku V1, a to 2 tisíce Kč za každý kus, a jednak z výrobku V2, a to rovněž 2 tisíce Kč za každý kus. Množství peněz, které můžeme získat za všechny výrobky V1 vypočítáme vynásobením množství výrobků V1 a jednotkové ceny 2 tisíce Kč. Obdobně vypočítáme i tržby za všechny výrobky V2. Celkové tržby pak vypočteme součtem obou těchto hodnot.

Jediné hodnoty, které v předchozí úvaze neznáme, jsou jednak množství výrobku V1 a také množství výrobku V2. Toto tedy budou dvě naše neznámé. Označme je x_1 a x_2. Účelová funkce bude mít následující tvar (jednotky pro tržby jsou tisíce Kč)

$$z = 2x_1 + 2x_2 \ldots \text{max}.$$

Nyní se zaměříme na omezující podmínky. V textu postupně nalezneme všechna omezení. Vidíme, že máme k dispozici pouze 6 kg suroviny S1. Kde a jak tuto surovinu spotřebováváme? Ze zadání vidíme, že potřebujeme 3 kg této suroviny na výrobu každého výrobku V1. Vyrobíme x_1 výrobků V1, proto celkové množství suroviny S1 na výrobu všech výrobků V1 bude $3x_1$ kg.

Obdobnou úvahou zjistíme, že na celkovou výrobu všech výrobků V2 potřebujeme $1x_2$ kg. Celkové množství spotřebované suroviny S1 získáme jako součet obou těchto hodnot. Toto spotřebované množství nesmí přesáhnout 6 kg, může tedy být menší nebo rovno 6 kg. Vlastní omezení týkající se množství suroviny S1 bude vypadat následovně

$$3x_1 + 1x_2 \leq 6.$$

Dále víme, že máme k dispozici pouze 11 g suroviny S2, kterou spotřebováváme jednak na výrobek V1, a to 2 g na každý tento výrobek, a také potřebujeme 3 g na každý výrobek V2. Z této informace vytvoříme druhé vlastní omezení

$$2x_1 + 3x_2 \leq 11.$$

Tím máme popsány všechny podmínky vlastního omezení. Nesmíme však zapomenout na ošetření podmínek nezápornosti. Obě proměnné vyjadřují počty výrobků. Je tedy zřejmé, že obě proměnné nemohou nabývat záporných hodnot. Proto budou pro obě proměnné muset platit podmínky nezápornosti.

Nyní již shrneme celý výsledný matematický model naší úlohy LP.

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 2x_2 \ldots \text{max} \\ 3x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

12.2. Vytvořte matematický model následující úlohy LP. **Příklad 12.2**

Podnik vyrábí dva druhy výrobků - V1 a V2. Ve sledovaném období máme k dispozici pouze 180 hodin práce potřebného odborníka, přičemž tohoto odborníka potřebujeme 2 hodiny při výrobě každého výrobku V1 a 1 hodinu na výrobu každého kusu výrobku V2. Potřebujeme vyrobit výrobků V1 nejvýše o 5 více než je polovina počtu výrobků V2. Naopak výrobků V2 můžeme vyrobit maximálně o 30 více než výrobků V1. Jak máme naplánovat výrobu, pokud je naším cílem optimalizovat zisky a víme, že na každém výrobku V1 máme zisk 300 Kč a na každém výrobku V2 získáme 400 Kč?

Řešení: Nejdříve si musíme uvědomit, co a jak chceme optimalizovat, a na základě této informace určíme, kolik budeme mít neznámých a jaké budou, a sestrojíme účelovou funkci.

V našem případě vidíme, že chceme optimalizovat zisky. Zisky jistě chceme mít co největší, proto budeme naši účelovou funkci maximalizovat.

A z čeho máme zisky? Peníze jednak získáváme z výrobku V1, a to 300 Kč za každý kus, a také z výrobku V2, a to 400 Kč za každý kus. Množství peněz, které můžeme získat za všechny výrobky V1, vypočítáme vynásobením množství výrobků V1 a jednotkového zisku 300 Kč. Obdobně vypočítáme i zisky ze všech výrobků V2. Celkové zisky pak vypočítáme součtem obou těchto hodnot.

Jediné hodnoty, které v předchozí úvaze neznáme, jsou jednak množství výrobku V1 a také množství výrobku V2. Toto tedy budou dvě naše neznámé. Označme je x_1 a x_2. Účelová funkce bude mít následující tvar:

$$z = 300x_1 + 400x_2 \ldots \max$$

Nyní se zaměříme na omezující podmínky. V textu nalezneme všechna omezení. Vidíme, že máme k dispozici pouze 180 hodin práce odborníka. Pro který výrobek a na jak dlouho práci odborníka potřebujeme? Při výrobě každého kusu výrobku V1 potřebujeme odborníka na 2 hodiny. Již jsme si řekli, že celkově vyrobené množství výrobků V1 označíme jako x_1, tedy na celou výrobu všech výrobků V1 potřebujeme odborníka na $2x_1$ hodin.

Obdobnou úvahou zjistíme, že na celkovou výrobu všech výrobků V2 potřebujeme odborníka na $1x_2$ hodin. Celkové množství hodin práce odborníka získáme jako součet obou těchto hodnot. Doba, po kterou potřebujeme odborníka, nesmí přesáhnout 180 hodin, musí být tedy menší nebo rovna 180 hodinám. Vlastní omezení týkající se hodin odborníka bude vypadat následovně

$$2x_1 + 1x_2 \leq 180$$

Dále víme, že výrobků V1 potřebujeme vyrobit nejvýše o 5 více než je polovina počtu výrobků V2. Z této informace vytvoříme druhé vlastní omezení

$$x_1 \leq \frac{x_2}{2} + 5.$$

Tuto nerovnici můžeme upravit do standardizovaného tvaru, kdy na levé straně nerovnice máme výraz obsahující všechny proměnné a na pravé straně je číslo

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 5.$$

Jako poslední si musíme uvědomit, že výrobků V2 můžeme vyrobit maximálně o 30 více než výrobků V1. Z této informace vytvoříme poslední vlastní omezení

$$x_2 \leq x_1 + 30.$$

Tuto nerovnici můžeme upravit do standardizovaného tvaru

$$-x_1 + x_2 \leq 30.$$

Tím máme popsány všechny podmínky vlastního omezení. Nesmíme však zapomenout na ošetření podmínek nezápornosti. Obě proměnné vyjadřují počty výrobků. Je tedy zřejmé, že obě proměnné nemohou nabývat záporných hodnot. Proto budou muset platit podmínky nezápornosti pro obě proměnné.

Nyní již shrneme celý výsledný matematický model naší úlohy LP.

$$z = 300x_1 + 400x_2 \ldots \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 180 \\ 1x_1 - \frac{1}{2}x_2 &\leq 5 \\ -1x_1 + 1x_2 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

12.2 Řešení matematického modelu úlohy LP

Než přistoupíme k výkladu metod pro hledání optima úlohy LP, popišme základní principy, na nichž naše postupy výpočtů budou založeny. Nejdříve definujme základní typy řešení úlohy lineárního programování.

Definice 12.2.1. Vektor, jehož složky splňují všechna vlastní omezení úlohy (12.2) a zároveň všechny podmínky nezápornosti (12.3), nazveme *přípustným řešením*.

Nepřípustným řešením nazveme každé řešení, které není přípustné, tj. které nesplňuje buď některou z podmínek vlastního omezení či některou z podmínek nezápornosti.

Definice 12.2.2. Přípustné řešení, které maximalizuje (resp. minimalizuje) účelovou funkci (12.1), nazveme *optimálním řešením*.

Ve většině případů má úloha LP nekonečně mnoho přípustných řešení. Není však výjimkou, že z důvodu vzájemně si odporujících vlastních podmínek nemá úloha LP žádné přípustné řešení. Relativně ojedinělým případem je stav, kdy má úloha LP jediné přípustné řešení. Toto vše vyplývá z teorie týkající se řešení soustav lineárních rovnic.

Úloha LP může mít žádné, jedno nebo nekonečně mnoho optimálních řešení. V případě, že existuje více optimálních řešení, musí mít samozřejmě všechna shodnou hodnotu účelové funkce.

Ale jak najít optimální řešení mezi nekonečně mnoha přípustnými? To je dost obtížný úkol. Naštěstí nemusíme hledat optimum mezi nekonečně mnoha přípustnými řešeními, ale můžeme se soustředit na průzkum pouze konečné podmnožiny obsahující tzv. základní, neboli bazická řešení.

Definice 12.2.3. Přípustné řešení, které má tolik kladných složek, kolik lineárně nezávislých rovnic tvoří vlastní omezení (12.2), nazveme *základním řešením*.

Rovnice v soustavě rovnic jsou lineárně nezávislé, pokud jsou lineárně nezávislé vektory koeficientů jednotlivých rovnic, tj. pokud má matice soustavy hodnost rovnou počtu jejích řádků.

S pojmem základní řešení se můžeme setkat v lineární algebře. Zopakujme si, kdy a jak jej ze soustavy obdržíme. Víme, že soustava *m* lineárně nezávislých rovnic o *n* neznámých má, v případě řešitelnosti, právě jedno řešení, pokud $n = m$, a nekonečně mnoho řešení, pokud $n > m$. Pokud tedy dosadíme (v obecném případě $n \geq m$) za libovolných $n - m$ proměnných nulu a zbylé proměnné budeme dopočítávat, obdržíme soustavu *m* rovnic o *m* neznámých, která již má právě jedno řešení.

Počet základních řešení soustavy *m* lineárně nezávislých rovnic o *n* neznámých, neboli počet možností, jak můžeme "rozložit"$n - m$ nul na *n* míst, můžeme vypočítat jako počet kombinací bez opakování, a to *n*-*m*-té třídy z *n* prvků, tedy:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

V úloze LP máme navíc podmínky nezápornosti, které ještě některé z těchto řešení mohou vyřadit z důvodu zápornosti některé ze složek. Tedy výše uvedený počet je horní hranicí počtu všech základních řešení úlohy LP.

Princip řešitelnosti úloh LP je shrnut ve větě, která je nazývána jako základní věta lineárního programování.

Věta 12.2.4 (Základní věta lineárního programování)**.** *Má-li úloha lineárního programování přípustné optimální řešení, má také optimální řešení základní.*

Někdy se může stát, že i některá z dopočítávaných složek vyjde nulová. To znamená, že výsledný vektor bude mít více než $n-m$ nulových složek. V takovém případě mluvíme o tzv. degenerovaném řešení.

Definice 12.2.5. Přípustné řešení, které má méně kladných složek, než je lineárně nezávislých rovnic tvořících vlastní omezení (12.2), nazveme *degenerovaným řešením*.

Bohužel, základní věta nám vypovídá o existenci základního optimálního řešení, ale o existenci degenerovaného optimálního řešení není nic známo, tj. může a nemusí existovat.

Proto v případě, kdy se v úloze vyskytne degenerované řešení, můžeme mít závažné problémy při hledání optima. Tyto potíže blíže popíšeme později.

Příklad 12.3

12.3. Máme úlohu lineárního programování s následujícími podmínkami vlastního omezení

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Jaký typ řešení je vektor

a) $(0,2)$, b) (-1,-1), c) $(0,0)$, d) $(1,1)$, e) $(3,3)$?

Řešení: V každém příkladu budeme ověřovat podmínky pro jednotlivé typy řešení. Vždy nejdříve zjistíme, zda se jedná o přípustné řešení, či nikoliv. Musíme si uvědomit, že přípustné řešení nemusí splňovat jen vlastní omezení, která máme uvedena v zadání, ale i podmínky nezápornosti (12.3). V případě, že se bude jednat o přípustné řešení, budeme dále zjišťovat, zda se jedná i o základní, respektive degenerované řešení.
K tomu potřebujeme znát jednak počet lineárně nezávislých rovnic a také počet neznámých dané soustavy. Nejprve převedeme všechny nerovnice na rovnice, a to tak, že do každé nerovnice přidáme jednu proměnnou. Výsledná soustava rovnic bude vypadat následovně

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní musíme ověřit, zda se jedná o lineárně nezávislé rovnice. Případ, že by rovnice byly lineárně závislé, by v praxi znamenal, že některé z podmínek vlastního omezení jsou na sobě závislé, tj. vypovídají o stejných faktických podmínkách.

Lineární závislost či nezávislost můžeme například ověřit pomocí hodnosti matice soustavy. Připomeňme si poznatek z lineární algebry, že vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když matice, jejíž řádky jsou tvořeny sledovanými vektory, má hodnost rovnou počtu řádků.

Vytvoříme si tedy nejprve matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tu nyní upravíme následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ve výsledné matici jsou tři nenulové řádky, proto je hodnost matice tři, a tedy všechny tři řádky jsou lineárně nezávislé.

Vidíme, že máme soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých, tedy $n = 4$ a $m = 3$. Počet nulových složek základního řešení bude $n - m = 4 - 3 = 1$. Vektor, který bude mít více než jednu nulu, bude degenerovaným řešením.
Nyní již můžeme přistoupit k vyhodnocení každého z nabízených vektorů.

a) Zároveň s ověřováním přípustnosti řešení rozšíříme vektor $(0, 2)$ ze zadání o další ze čtyř složek, a to o složku x_3, která byla přidána při úpravě první nerovnice na rovnici, a složku x_4 přidanou při úpravě druhé nerovnice na rovnici. Ověření s dopočtem provedeme dosazením prvních dvou složek vektoru, tedy $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 + 2 + x_3 &= 4 \\ -2 \cdot 0 + 2 + x_4 &= 2 \\ 0 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Hned na první pohled vidíme, že tato soustava je neřešitelná, protože poslední rovnost nemá řešení.

Uvedený vektor je tedy nepřípustným řešením. Dále již zjevně nemá smysl zkoumat, jestli je základním či degenerovaným řešením, protože v požadavcích na příslušnost k oběma těmto typům je nutnost přípustnosti daného řešení.

b) Pokud jsme dostatečně všímaví, můžeme vidět, že vektor $(-1, -1)$ nemůže být přípustným řešením, protože má obě zadané složky záporné, což je v rozporu s podmínkami nezápornosti. Uvedený vektor je tedy opět nepřípustným řešením. Dále již opět nemá smysl zkoumat, jestli je základním či degenerovaným řešením.

c) Opět provedeme ověření přípustnosti zadaného vektoru $(0, 0)$ společně s dopočtem zbývajících dvou složek pomocí dosazení zadaných hodnot za první dvě proměnné v soustavě rovnic. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 + 0 + x_3 &= 4 \\ -2 \cdot 0 + 0 + x_4 &= 2 \\ 0 - 0 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice obdržíme hodnotu $x_3 = 4$ a z druhé $x_4 = 2$. Poslední rovnost zjevně platí. Rozšířený vektor $(0, 0, 4, 2)$ má všechny složky nezáporné a odpovídá všem zadaným rovnicím, je tedy přípustným řešením dané úlohy LP.

Nyní již stačí ověřit, zda se jedná o základní, či degenerované řešení. Vidíme, že vektor má dvě nulové složky, tedy více než jednu, proto se jedná o degenerované řešení.

d) Opět provedeme ověření přípustnosti zadaného vektoru $(1, 1)$ společně s dopočtem zbývajících dvou složek pomocí dosazení zadaných hodnot za první dvě proměnné v soustavě rovnic. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + 1 + x_3 &= 4 \\ -2 \cdot 1 + 1 + x_4 &= 2 \\ 1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice obdržíme hodnotu $x_3 = 2$ a z druhé $x_4 = 3$. Poslední rovnost zjevně platí. Rozšířený vektor $(1, 1, 2, 3)$ má všechny složky nezáporné a odpovídá všem zadaným rovnicím, je tedy přípustným řešením dané úlohy LP.

Vidíme, že vektor nemá žádnou nulovou složku, proto není ani základním ani degenerovaným řešením, ale je tedy „pouze“ řešením přípustným.

e) I v posledním případě provedeme ověření přípustnosti zadaného vektoru $(3,3)$ společně s dopočtem zbývajících dvou složek pomocí dosazení zadaných hodnot za první dvě proměnné v soustavě rovnic. Po dosazení dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3+3+x_3 &= 4 \\ -2\cdot 3+3+x_4 &= 2 \\ 3-3 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice obdržíme hodnotu $x_3 = -2$ a z druhé $x_4 = 5$. Poslední rovnost zjevně platí. Rozšířený vektor $(3,3,-2,5)$ má třetí složku zápornou, a proto je porušena jedna z podmínek nezápornosti, vektor je tedy nepřípustným řešením dané úlohy LP.

Zápornost třetí složky dopočítaného vektoru odpovídá faktu, že nebyla splněna první z původních podmínek vlastního omezení, a to první nerovnice. Vidíme, že opravdu zjevně neplatí $3+3 \leq 4$.

Mohli jsme si všimnout, že v příkladu 12.3 se nám vyskytly vektory, které se ukázaly být přípustnými, nepřípustnými, či degenerovanými řešeními. Nevyskytl se však žádný vektor, který by byl řešením základním. Opravdu v úloze LP popsané v tomto příkladu žádné základní řešení neexistuje?

Příklad 12.4

12.4. Nalezněte všechna základní řešení úlohy LP popsané v příkladu 12.3.

Řešení: Nejprve si znovu připomeňme, co to je základní řešení. Víme, že musí být jednak řešením přípustným, tj. musí odpovídat všem podmínkám vlastního omezení (ať už v původní podobě nerovnic či v upravené podobě rovnic) a musí splňovat podmínky nezápornosti (tedy mít všechny složky nezáporné). Navíc musí mít přesně daný počet nulových složek. V našem případě je počet složek, jejichž hodnota je nula, roven hodnotě vypočítané $n-m = 4-3 = 1$.

Jaký tedy zvolíme postup při hledání základního řešení? Zvolíme jednu ze složek a její hodnotu položíme rovnu nule. Tím zajistíme onen přesně daný počet nul. Dosazením této nulové složky do soustavy rovnic vzniklé z úlohy LP obdržíme soustavu *m* (lineárně nezávislých) rovnic o *m* neznámých, která má právě jedno řešení. Konkrétně v našem případě, zvolíme-li například $x_3 = 0$, obdržíme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1+x_2+0 &= 4 \\ -2x_1+x_2+x_4 &= 2 \\ x_1-x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledným řešením této soustavy rovnic je $x_1 = 2, x_2 = 2, x_4 = 4$. To znamená, že vektor $(2,2,0,4)$ je základním řešením naší úlohy LP.

Existuje ještě jiné základní řešení? Případné jiné základní řešení bychom našli dosazením nuly za jinou z neznámých v soustavě rovnic, tedy buď za x_1, nebo x_2, nebo x_4. Přičemž si můžeme všimnout, že na základě třetí rovnice je $x_1 = x_2$, tedy pokud by byla jedna z těchto neznámých rovna nule, bude rovna nule i druhá. Volit nulu za tyto dvě neznámé tedy nemůžeme, protože bychom ve výsledném vektoru neměli jednu, ale dvě nulové složky, což by bylo v rozporu s definicí základního řešení.

Zbývá nám tedy pouze možnost zvolit $x_4 = 0$. V tomto případě obdržíme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 4 \\ -2x_1+x_2+0 &= 2 \\ x_1-x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Jejím výsledným řešením je $x_1 = -2, x_2 = -2, x_3 = 8$.

Bohužel vidíme, že vektor $(-2,-2,8,0)$ sice odpovídá naší soustavě rovnic a má přesně jednu složku nulovou, ale má první dvě složky záporné, čili nesplňuje podmínky nezápornosti. Proto neodpovídá definici přípustného, a proto ani základního řešení. Jediným základním řešením popsané úlohy LP je vektor $(2,2,0,4)$.

12.3 Grafické řešení úlohy LP

Výše popsané principy jsou dobře a názorně vidět v grafickém znázornění úlohy LP pro případ, že se nám v úloze vyskytují pouze dvě neznámé.

Představme si zjednodušenou verzi úlohy LP popsanou pomocí rovnic a nerovnic 12.1, 12.2 a 12.3. Máme tedy úlohu LP s účelovou funkcí o dvou neznámých, m nerovnicích o dvou neznámých a dvou podmínkách nezápornosti.

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \ldots \text{max} \tag{12.7}$$

za splnění podmínek

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \qquad (12.8)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \qquad (12.9) \end{aligned}$$

Nejprve vytvoříme množinu všech přípustných řešení. K tomu si musíme uvědomit, co je grafickým znázorněním lineární nerovnice o dvou neznámých. Jistě víme, že grafickým obrazem lineární rovnice o dvou neznámých je přímka, která nám celou rovinu dělí na dvě části, tj. poloroviny. Pro všechny body této přímky platí rovnost popsaná danou rovnicí a pro všechny body mimo tuto přímku tato nerovnost neplatí. Pokud neplatí rovnost, musí platit jedna z nerovností $(<, >)$. Na jedné straně od přímky platí pro všechny body jedna z těchto nerovností, pro všechny body na straně druhé nerovnost opačná.

Grafickým obrazem lineárních nerovnic o dvou neznámých je tedy polorovina. Průnikem všech polorovin odpovídajících všem nerovnicím vlastního omezení a podmínek nezápornosti bude množina všech přípustných řešení.

Z popsané konstrukce množiny všech přípustných řešení je zřejmé, že tato množina může být:

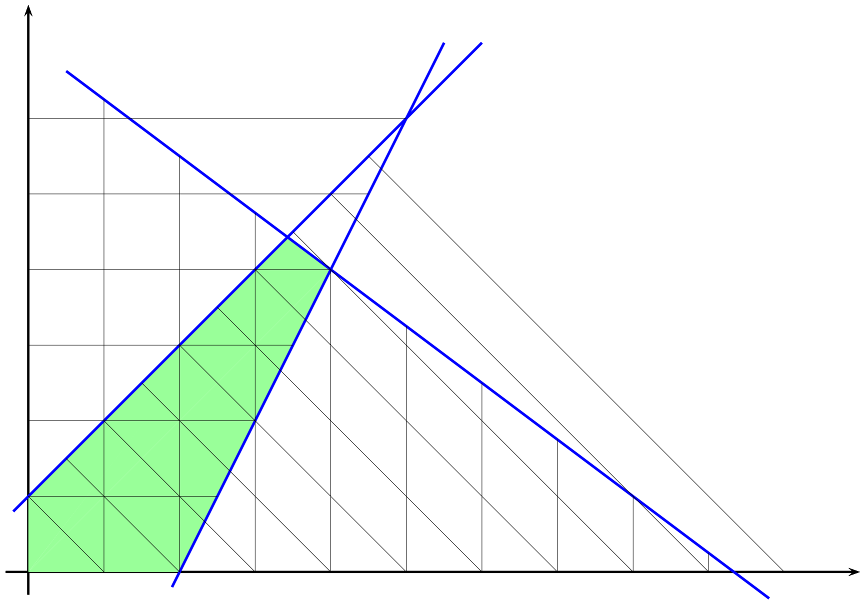
1. konvexní omezená množina - viz Obrázek 12.1
2. konvexní neomezená množina - viz Obrázek 12.2
3. prázdná množina - viz Obrázek 12.3

Vrcholy množiny všech přípustných řešení představují základní řešení úlohy LP.

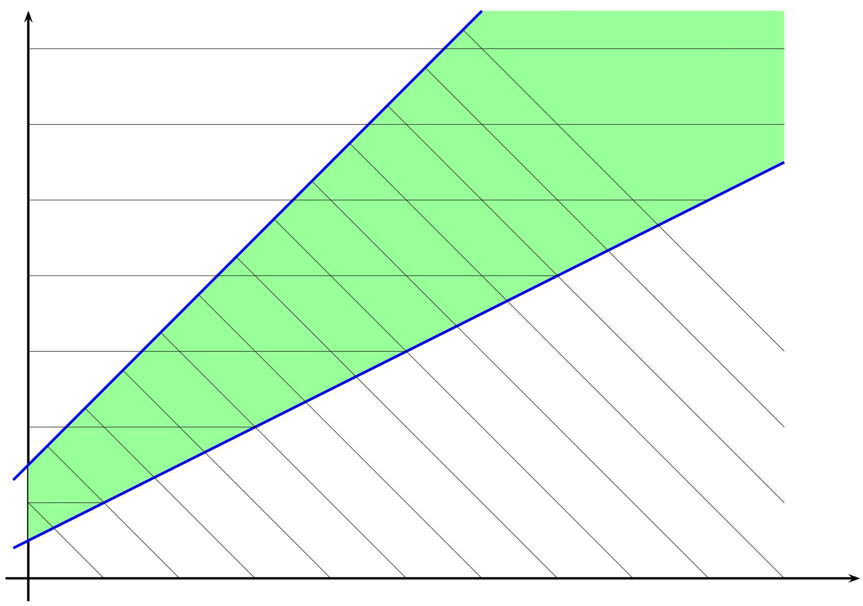
V dalším kroku postupu budeme v rámci množiny všech přípustných řešení optimalizovat (např. maximalizovat) účelovou funkci. K tomu si opět uvědomme, co je grafickým znázorněním této funkce, co vlastně předpis účelové funkce představuje. Jedná se v podstatě o rovnici o třech neznámých. K x_1 a x_2 přibyla ještě neznámá z. Pro každou konkrétní hodnotu proměnné z obdržíme lineární rovnici o dvou neznámých, jejímž grafickým obrazem je přímka.

A jaký mají vztah jednotlivé přímky příslušející k různým hodnotám z? Jedná se o přímky se stejnou hodnotou směrnice, ale různými hodnotami koeficientu posunutí. Z toho vyplývá, že se jedná o rovnoběžné přímky. Grafickým znázorněním účelové funkce úlohy LP je tedy soustava rovnoběžných přímek. Tyto přímky se se vzrůstajícím z posouvají na jednu stranu, naopak s klesajícím z se posouvají na druhou stranu.

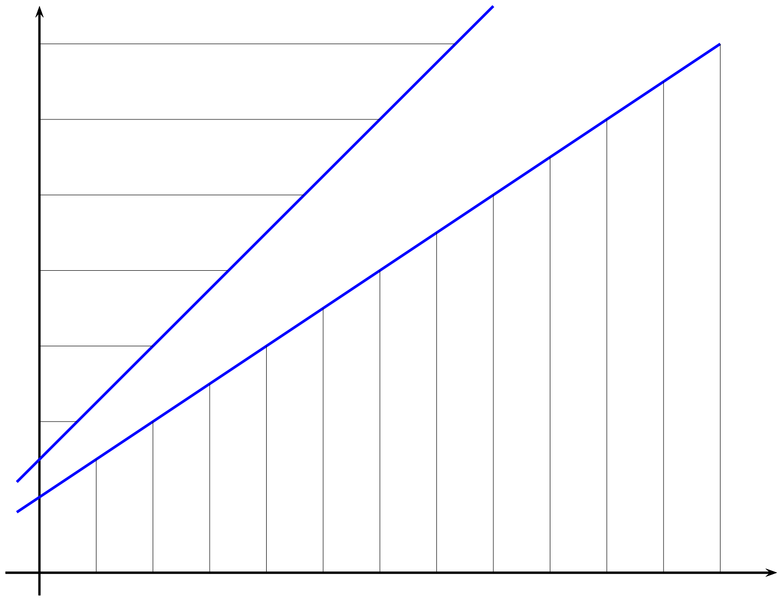
Při optimalizaci účelové funkce úlohy LP tedy hledáme takové body, které zároveň leží v množině přípustných řešení a zároveň leží na té z rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci, která náleží k optimálnímu (maximálnímu, či minimálnímu) z.



Obrázek 12.1: Omezená konvexní množina přípustných řešení



Obrázek 12.2: Neomezená konvexní množina přípustných řešení



Obrázek 12.3: Prázdná množina přípustných řešení

12.5. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná a optimální řešení následující úlohy LP.

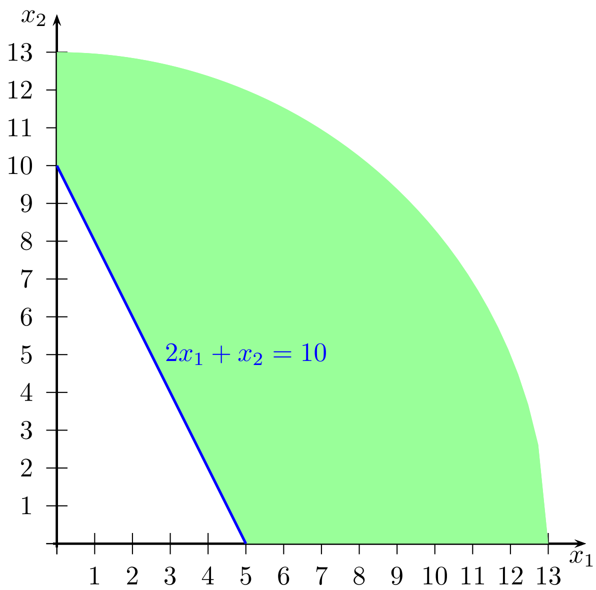
Příklad 12.5

$$
\begin{aligned}
z = x_1 + 3x_2 \ldots \max\\
2x_1 + x_2 &\geq 10\\
x_1 - 3x_2 &\leq 5\\
-x_1 + x_2 &\leq 6\\
2x_1 + 3x_2 &\leq 30\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

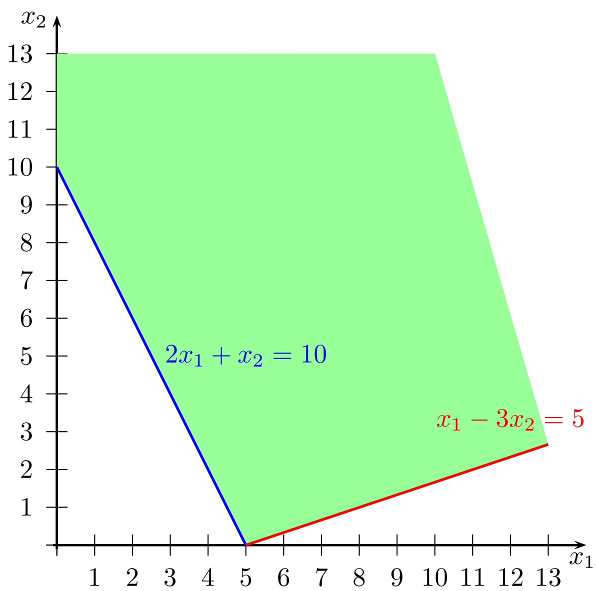
Řešení: Na začátku si musíme uvědomit, co znamenají podmínky nezápornosti. Obě proměnné musí být nezáporné, a proto je množina přípustných řešení omezena pouze na I. kvadrant.

Nejdříve sestrojíme přímku náležející k rovnici vzniklé z první nerovnice, a to $2x_1 + x_2 = 10$. Tato přímka je dána dvěma body. Každý z nich získáme zvolením libovolné hodnoty za jednu z proměnných a dosazením této hodnoty do rovnice dopočítáme hodnotu druhé proměnné. Například volbou $x_1 = 0$ dopočítáme $x_2 = 10$ a volbou $x_2 = 0$ dopočítáme $x_1 = 5$. Tedy daná přímka je dána dvěma body $[0, 10]$ a $[5, 0]$.

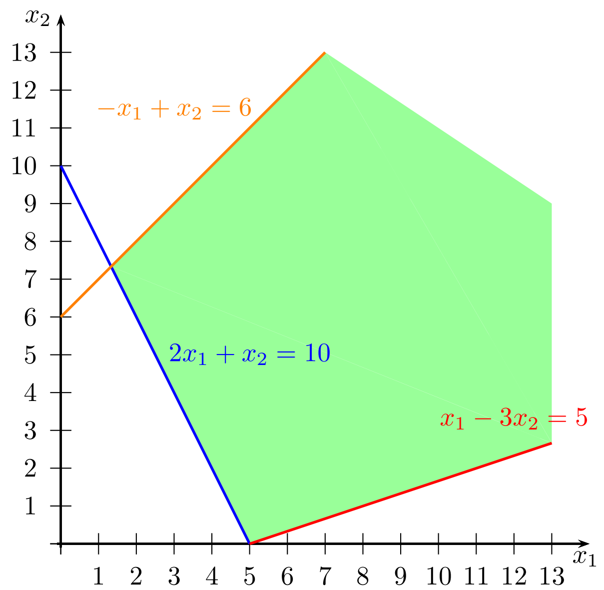
Dále zjistíme, která ze dvou polorovin vzniklých sestrojenou přímkou odpovídá zadané nerovnici. Toto provedeme tak, že zvolíme libovolný bod, který neleží na této přímce. Ověříme, zda je splněna zadaná nerovnice při dosazení souřadnic zvoleného bodu. Zvolíme-li bod $[0, 0]$ a dosadíme jeho souřadnice do nerovnice, dostáváme vztah $2 \cdot 0 + 0 < 10$. Zadaná nerovnice není splněna a nás bude zajímat polorovina neobsahující počátek.Vše je vidět na Obrázku 12.4. Obdobným způsobem sestrojíme i polorovinu náležející druhé nerovnici. Na Obrázku 12.5 je znázorněna situace po zapracování těchto prvních dvou nerovnic. Stejně sestrojíme i zbývající dvě nerovnice. Situace je postupně znázorněna na obrázcích 12.6 a 12.7. Nakonec zapracujeme i účelovou funkci. Uvědomme si, že pro různé hodnoty z předpis účelové funkce značí lineární



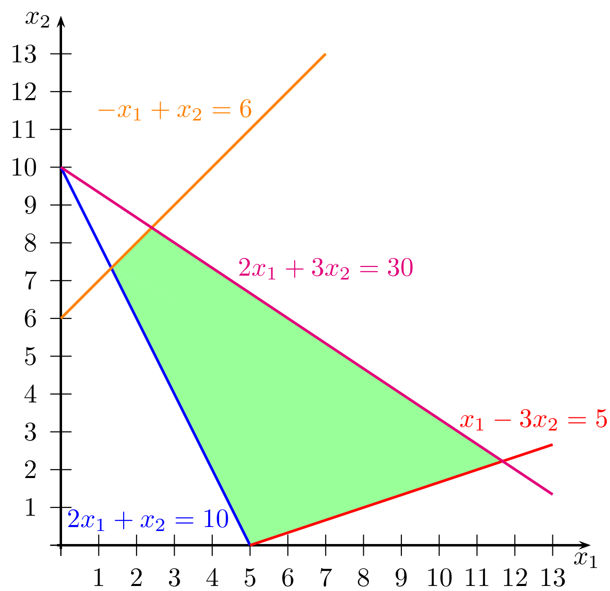
Obrázek 12.4: Polorovina odpovídající první nerovnici příkladu 12.5



Obrázek 12.5: Situace odpovídající prvním dvěma nerovnicím příkladu 12.5



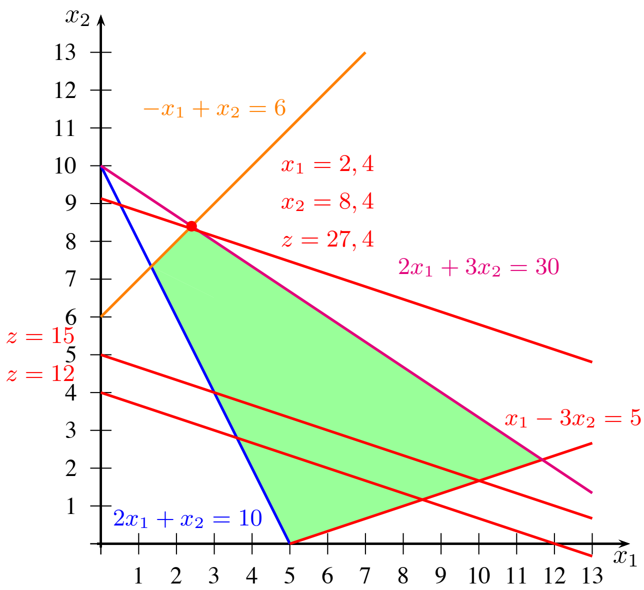
Obrázek 12.6: Situace odpovídající prvním třem nerovnicím příkladu 12.5



Obrázek 12.7: Množina všech přípustných řešení příkladu 12.5

rovnici o dvou neznámých, jejímž grafickým obrazem je přímka. Dále si uvědomme, že jednotlivé přímky pro různé hodnoty z jsou vzájemně rovnoběžné.

Můžeme si ověřit, že přímky se posouvají jedním směrem při vzrůstající hodnotě z a naopak druhým směrem se posouvají při klesající hodnotě z. Na Obrázku 12.8 jsou



Obrázek 12.8: Výsledné grafické řešení příkladu 12.5

přímky náležející k účelové funkci vyznačeny červeně.

Při hledání optimálního řešení zadané úlohy budeme posouvat přímkami ve směru rostoucího z tak dlouho, dokud bude průnik dané přímky a množiny všech přípustných řešení neprázdný. Z Obrázku 12.8 je vidět, že optimálním řešením je bod o souřadnicích $[2,4,\ 8,4]$, který je vyznačen červenýn puntíkem. Optimální hodnota účelové funkce je $27,4$.

Příklad 12.6

12.6. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná a optimální řešení následující úlohy LP

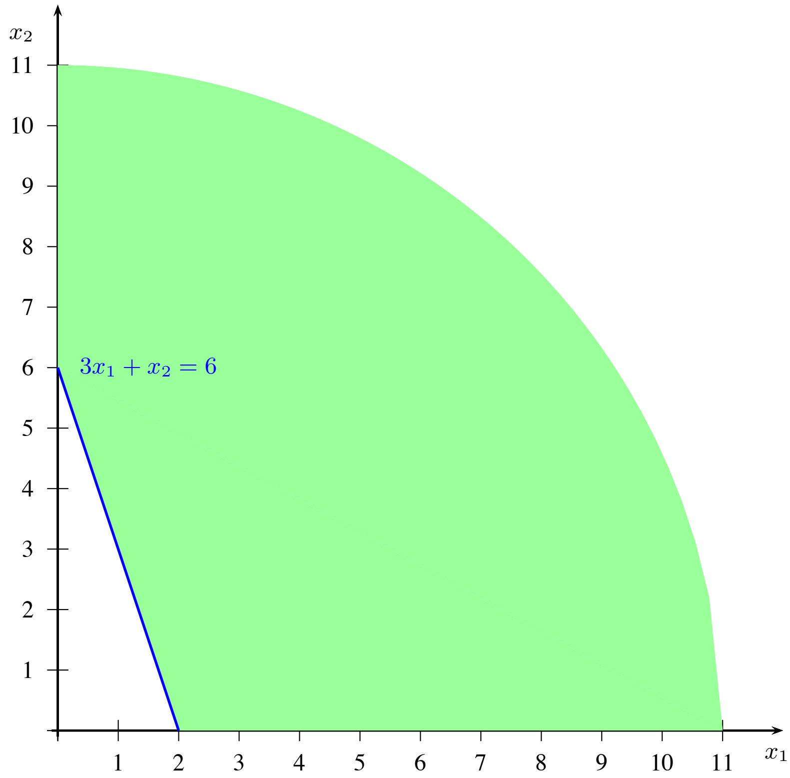
$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 2x_2 \ldots \max \\ 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Řešení: Opět si můžeme uvědomit, že podmínky nezápornosti znamenají, že je množina přípustných řešení omezena pouze na I. kvadrant.

Nejdříve sestrojíme přímku náležející k rovnici vzniklé z první nerovnice, a to $3x_1 + x_2 = 6$. Tato přímka je dána dvěma body. Každý z nich získáme zvolením libovolné hodnoty za jednu z proměnných a dosazením této hodnoty do rovnice dopočítáme hodnotu druhé proměnné. Například volbou $x_1 = 0$ dopočítáme $x_2 = 6$ a volbou $x_2 = 0$ dopočítáme $x_1 = 2$. Tedy daná přímka je dána dvěma body $[0,\ 6]$ a $[2,\ 0]$.

Dále zjistíme, která ze dvou polorovin vzniklých sestrojenou přímkou odpovídá zadané nerovnici. Toto provedeme tak, že zvolíme libovolný bod, který neleží na této přímce. Ověříme, zda je splněna zadaná nerovnice při dosazení souřadnic zvoleného bodu. Zvolíme-li bod $[0,\ 0]$ a dosadíme jeho souřadnice do nerovnice, dostáváme vztah

$3 \cdot 0 + 0 < 6$. Zadaná nerovnice není splněna a nás bude zajímat polorovina neobsahující počátek.Vše je vidět na Obrázku 12.9. Obdobným způsobem sestrojíme i polorovinu



Obrázek 12.9: Polorovina odpovídající první nerovnici příkladu 12.6

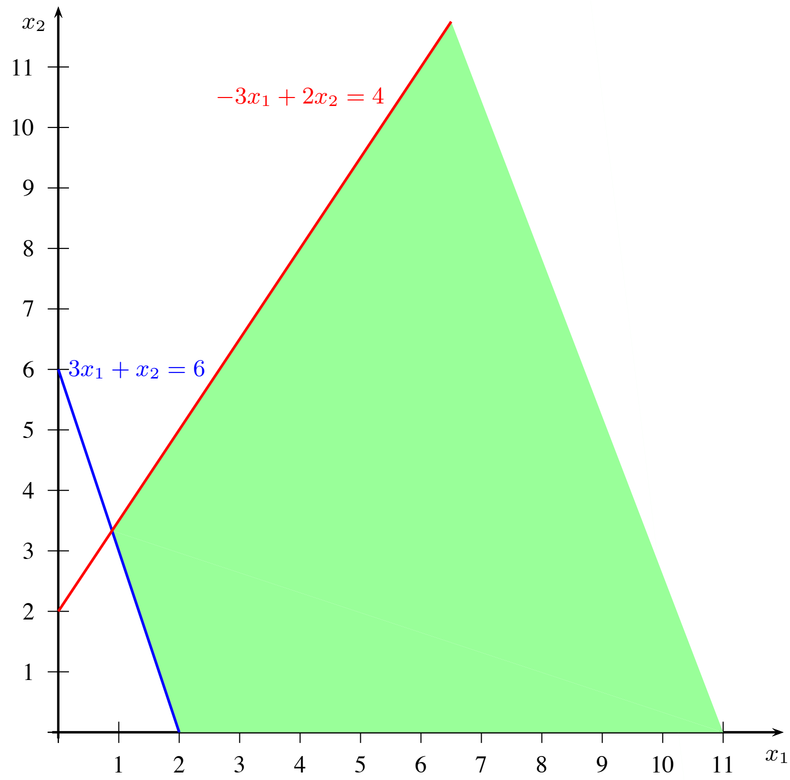
náležející druhé nerovnici. Na Obrázku 12.10 je znázorněna situace po zapracování těchto prvních dvou nerovnic. Stejně sestrojíme i zbývající dvě nerovnice. Situace je postupně znázorněna na Obrázcích 12.11 a 12.12. Nakonec zapracujeme i účelovou funkci. Na Obrázku 12.13 jsou přímky náležející k účelové funkci vyznačeny červeně. Šipkou je znázorněn směr vzrůstající hodnoty z. Při hledání optimálního řešení zadané úlohy posouváme přímkami ve směru rostoucího z stále, pokud je průnik dané přímky a množiny všech přípustných řešení neprázdný. Z Obrázku 12.13 je vidět, že můžeme přímkami posouvat stále dál a dál, což znamená, že optimální (tj. maximální) hodnotu nikdy nenalezneme, protože žádná taková neexistuje. Účelová funkce není na množině všech přípustných řešení shora omezená.

12.7. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná a optimální řešení následující úlohy LP **Příklad 12.7**

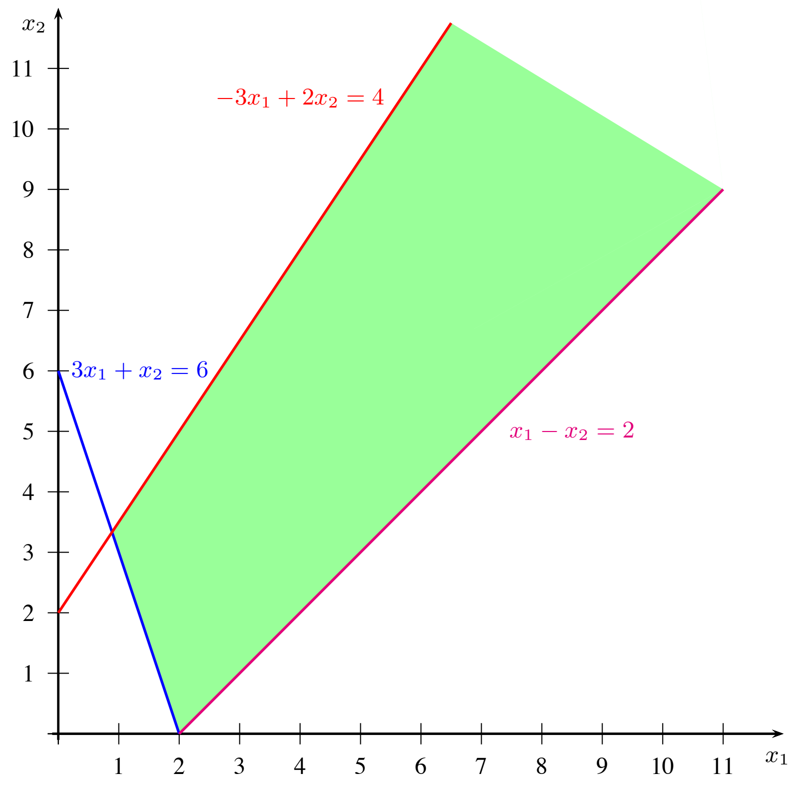
$$
\begin{aligned}
z &= 2x_1 - 2x_2 \ldots \text{min} \\
2x_1 + x_2 &\geq 10 \\
x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\
-x_1 + x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Řešení: Můžeme si všimnout, že vlastní podmínky této úlohy jsou totožné s vlastními podmínkami úlohy LP z Příkladu 12.5. Proto i množina všech přípustných řešení bude totožná (viz Obrázek 12.7).

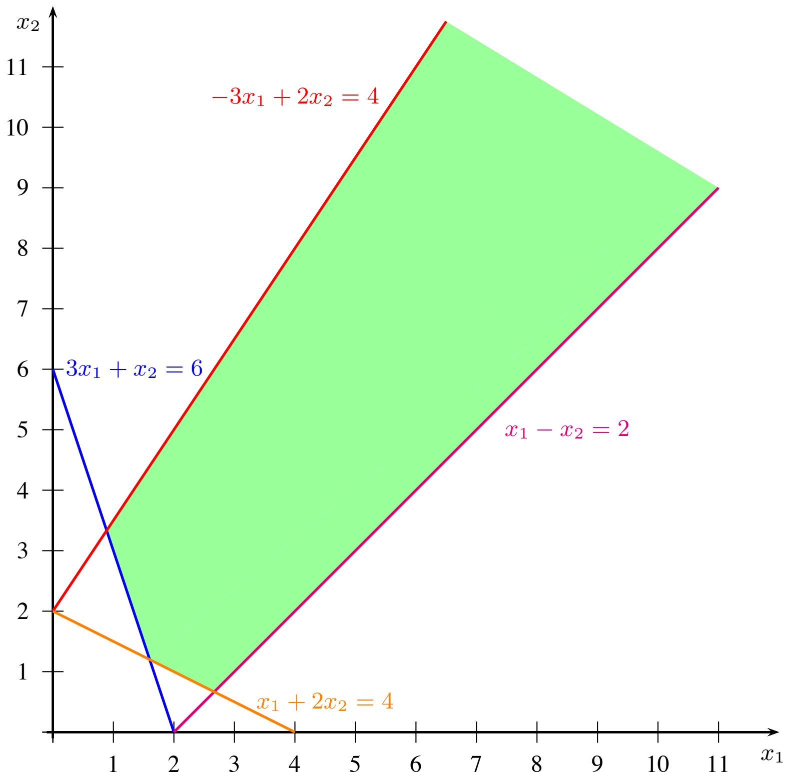
Stačí nám tedy sestrojit soustavu rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci. Přímka náležející hodnotě účelové funkce $z = 0$ je dána například body $[0, 0]$



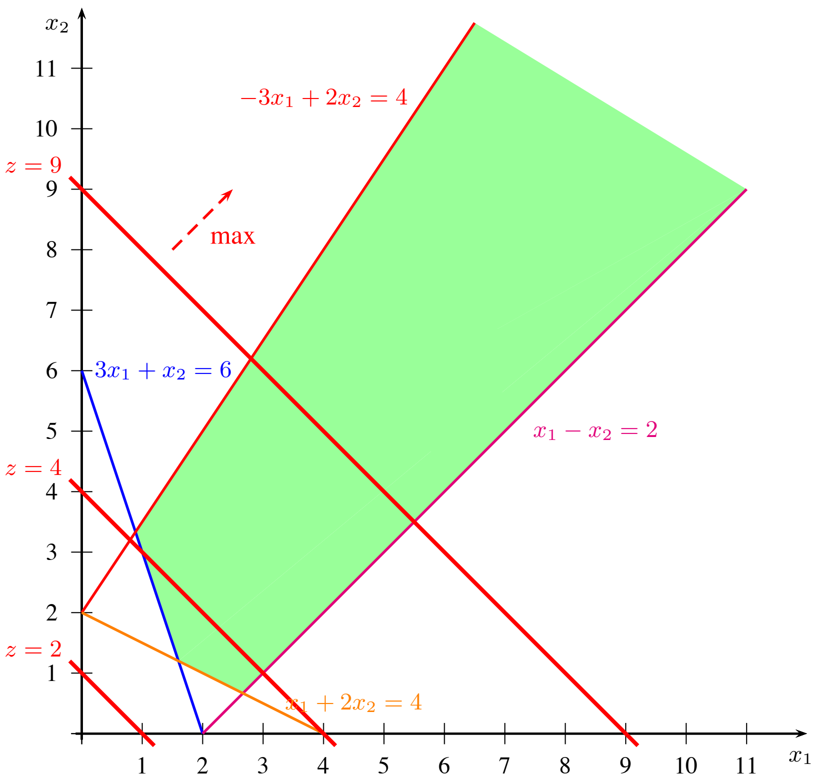
Obrázek 12.10: Situace odpovídající prvním dvěma nerovnicím příkladu 12.6



Obrázek 12.11: Situace odpovídající prvním třem nerovnicím příkladu 12.6

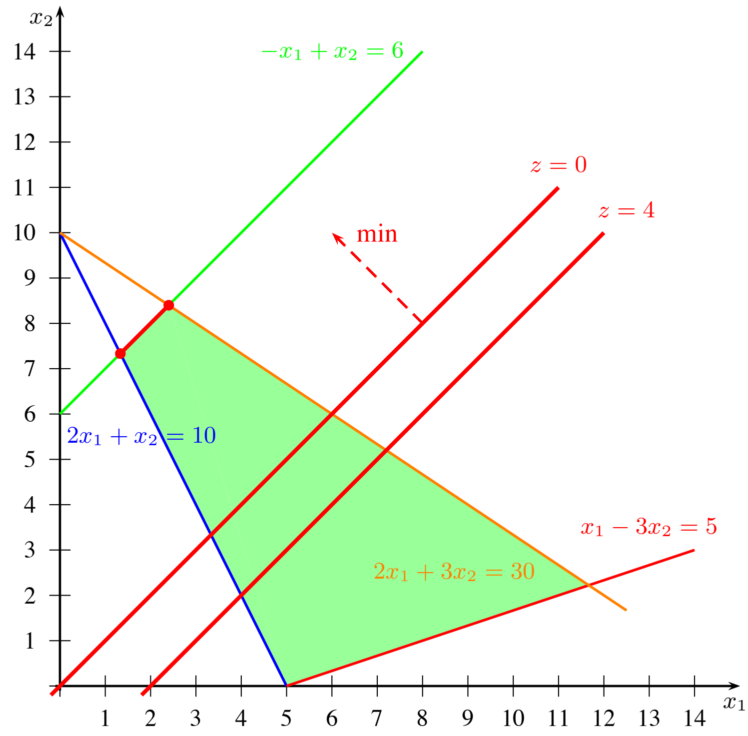


Obrázek 12.12: Množina všech přípustných řešení příkladu 12.6



Obrázek 12.13: Výsledné grafické řešení příkladu 12.6

a $[2,\ 2]$. Přímka náležející hodnotě účelové funkce $z = 4$ je dána například body $[2,\ 0]$ a $[4,\ 2]$. Na Obrázku 12.14 jsou přímky znázorněny červeně a směr optimalizace (tj. minimalizace) je vyznačen šipkou.



Obrázek 12.14: Výsledné grafické řešení příkladu 12.7

Vidíme, že přímkami náležejícími k účelové funkci můžeme posouvat směrem daným šipkou až do okamžiku, kdy bude jedna z těchto přímek obsahovat stranu AB čtyřúhelníku znázorňujícího množinu všech přípustných řešení. To znamená, že celá tato úsečka představuje množinu optimálních řešení dané úlohy LP. Tato úsečka obsahuje nekonečně mnoho bodů, což znamená, že daná úloha má nekonečně mnoho optimálních přípustných řešení. Ale součástí úsečky jsou dva krajové body, a to A a B. Tyto body představují optimální základní řešení. Souřadnice těchto bodů jsou $\mathrm{A} = \left[\frac{4}{3},\ \frac{22}{3}\right]$, $\mathrm{B} = [2{,}4,\ 8{,}4]$. Můžeme si lehce ověřit, že hodnota účelové funkce je v obou případech rovna -12.

Příklad 12.8

12.8. Pomocí grafického postupu nalezněte všechna přípustná, základní a optimální řešení úlohy LP popsané v Příkladu 12.1.

Řešení: Připomeňme si matematický tvar této úlohy

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 2x_2 \ldots \max \\ 3x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nyní si nejprve pro každé vlastní omezení sestrojíme přímku, která je grafickým obrazem příslušné rovnice. Víme, že přímka je dána dvěma body, proto každou z přímek sestrojíme tak, že si vypočítáme libovolné dva body přímky a ty poté spojíme.

V případě prvního vlastního omezení dostaneme při volbě $x_1 = 0$ rovnost $x_2 = 6 - 3 \cdot 0 = 6$, tím jsme získali bod o souřadnicích $[0,\ 6]$. Při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme $x_1 = \frac{6-1\cdot 0}{3} = 2$ a máme bod o souřadnicích $[2,\ 0]$.

V případě druhého vlastního omezení si při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme

$$x_1 = \frac{11 - 3 \cdot 0}{2} = 5,5$$

a máme bod o souřadnicích $[5,5,\ 0]$. Dále při volbě $x_1 = 1$ dopočítáme

$$x_2 = \frac{11 - 2 \cdot 1}{3} = 3$$

a máme bod o souřadnicích $[1,\ 3]$. Volba $x_1 = 0$ v tomto případě není příliš vhodná, protože po dosazení dostáváme

$$x_2 = \frac{11 - 2 \cdot 0}{3} = \frac{11}{3},$$

což je hodnota, která se graficky znázorňuje obtížně.

Poté si uvědomíme, která z takto vzniklých dvou polorovin odpovídá naší nerovnici. To zjistíme tak, že vybereme libovolný bod roviny, který neleží na zobrazené přímce a jeho souřadnice dosadíme do sledované nerovnice. Pokud je splněna daná nerovnost, vybereme polorovinu obsahující tento bod. Pokud daná nerovnost splněna není, vybereme polorovinu opačnou.

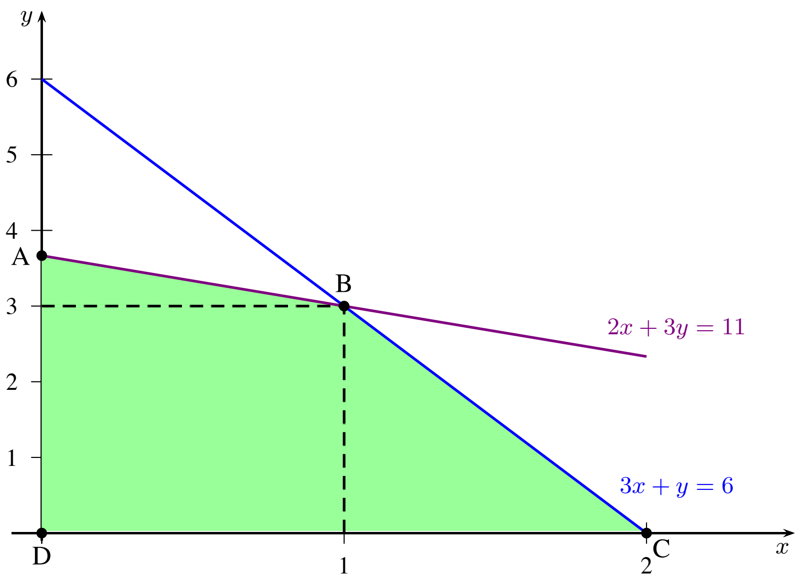
Z výpočetních důvodů je pohodlné, stejně jako v předchozích příkladech, volit za tento bod počátek souřadnic, tedy bod o souřadnicích $[0,\ 0]$, ovšem pouze v případě, pokud přímka neprochází počátkem.

V případě prvního vlastního omezení vidíme, že po dosazení $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ obdržíme nerovnost $3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 6$, která je zjevně splněna, proto vybereme polorovinu obsahující počátek.

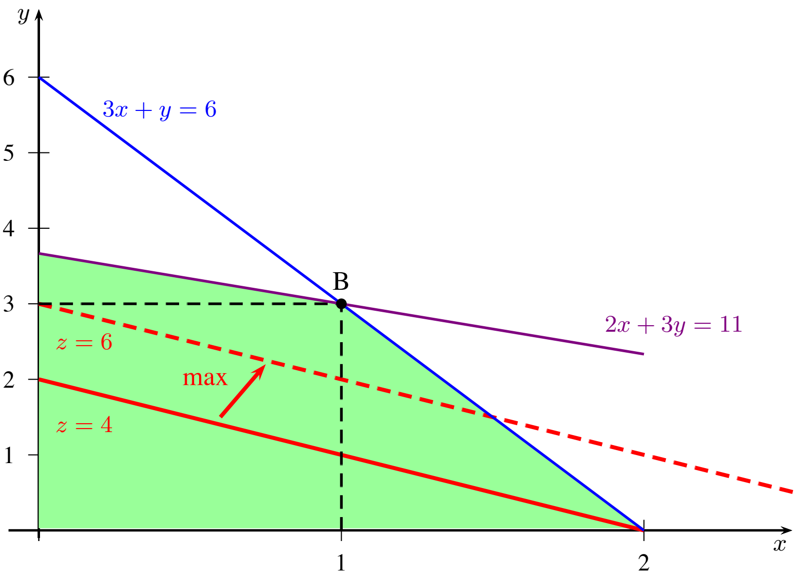
V případě druhého vlastního omezení vidíme, že po dosazení $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ obdržíme nerovnost $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 11$, která je zjevně splněna, proto opět vybereme polorovinu obsahující počátek.

Dále si musíme opět uvědomit, co znamenají podmínky nezápornosti. Obě proměnné musí být nezáporné, a proto je množina přípustných řešení omezena pouze na I. kvadrant.

Výsledek je zřejmý z Obrázku 12.15. Množina přípustných řešení je vybarvený čtyřúhelník ABCD. Množinou všech základních řešení je množina vrcholů tohoto čtyřúhelníku, tj. čtyřprvková množina $\{A, B, C, D\}$.



Obrázek 12.15: Množina přípustných řešení příkladu 12.1



Obrázek 12.16: Optimalizační proces v rámci příkladu 12.1

V dalším kroku vytvoříme soustavu rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci. K dobrému vyhodnocení postačí, pokud sestrojíme dvě takovéto přímky. Zvolíme tedy libovolně dvě různé hodnoty z a sestrojíme příslušné přímky.

Například pro volbu $z = 4$ obdržíme následující předpis pro přímku

$$4 = 2x_1 + 2x_2.$$

Tuto přímku sestrojíme obdobně jako předchozí přímky, a to volbou dvou bodů. V tomto případě při volbě $x_1 = 0$ dopočítáme

$$x_2 = \frac{4 - 2 \cdot 0}{2} = 2$$

a při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme

$$x_1 = \frac{4 - 2 \cdot 0}{2} = 2.$$

Máme tedy body $[0, 2]$ a $[2, 0]$ a ty spojíme.

Obdobně pro volbu $z = 6$ obdržíme následující předpis pro přímku

$$6 = 2x_1 + 2x_2.$$

I tuto přímku sestrojíme stejným postupem. V tomto případě při volbě $x_1 = 0$ dopočítáme

$$x_2 = \frac{6 - 2 \cdot 0}{2} = 3$$

a při volbě $x_2 = 0$ dopočítáme

$$x_1 = \frac{6 - 2 \cdot 0}{2} = 3.$$

Máme tedy body $[0, 3]$ a $[3, 0]$ a ty spojíme.

Výsledek je zřejmý z obrázku 12.16. Soustava rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci je znázorněna pomocí dvou červených přímek. Je zřejmé, že hodnota z narůstá zleva doprava. Na obrázku je toto znázorněno šipkou. Budeme posunovat rovnoběžky ve vyznačeném směru tak dlouho, dokud bude mít tato přímka nějaký společný bod s množinou všech přípustných řešení, tedy do doby, než se dostaneme na hranici této množiny. V našem případě se budeme posunovat tak dlouho, až se jedna z rovnoběžek dotkne bodu B. Tento bod je zároveň bodem množiny všech přípustných řešení a zároveň leží na jedné z rovnoběžných přímek představujících účelovou funkci, a to na té, která má dle možností největší hodnotu z. Proto bod $\mathrm{B} = [1,\, 3]$ odpovídá hledanému maximu, tedy $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$ jsou hodnoty našich neznámých, které odpovídají všem omezením úlohy a přitom maximalizují hodnotu účelové funkce. Maximální hodnotu účelové funkce dopočítáme dosazením obou proměnných do předpisu pro účelovou funkci $z = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$.

Zjistili jsme tedy, že pokud chceme maximalizovat tržby, musíme vyrobit jeden výrobek V1 a tři výrobky V2. Tržby v tomto případě budou 8 tisíc korun.

12.4 Simplexová metoda

Simplexová metoda (SM) je základní metodou používanou při řešení úloh lineárního programování. Její princip je postaven na Základní větě lineárního programování, neboli na faktu, že pokud úloha LP má nějaké optimální řešení, pak alespoň jedno z těchto řešení nalezneme i mezi řešeními základními. Proto SM může hledat optimální řešení pouze mezi základními.

Základních řešení, jak už jsme si uvedli, je konečně mnoho. Prochází-li SM pouze tato řešení, je jisté, že pokud nějaké optimální řešení existuje, pak jej metoda nalezne po konečně mnoha krocích.

Simplexová metoda se řadí mezi tzv. iterační algoritmy. To znamená, že v postupu nejprve nalezneme nějaké počáteční přípustné řešení, které se poté snažíme vylepšovat.

Pro postup je výchozím tvarem matematického modelu tzv. *kanonický tvar* úlohy. Řekneme, že matematický model úlohy LP se nachází v kanonickém tvaru, pokud platí následující podmínky

- vlastní omezení jsou vyjádřena jako soustava lineárních rovnic,
- pravé strany všech těchto rovnic jsou nezáporná čísla,
- matice soustavy obsahuje jednotkovou submatici řádu *m* (počtu rovnic),
- pro všechny proměnné úlohy jsou splněny podmínky nezápornosti,
- jedná se o maximalizační úlohu.

Nejjednodušší je převod na kanonický tvar u úloh LP, jejímž cílem je maximalizace účelové funkce, jsou splněny všechny podmínky nezápornosti a všechna vlastní omezení jsou nerovnice typu „$\leq$“.

V tomto případě totiž převodem nerovnic na rovnice vznikne jednotková submatice, neboť při převodu nerovnice na rovnici přidáváme speciální proměnnou, která představuje jakýsi „zbytek“. Tato proměnná se v ostatních rovnicích nevyskytuje, neboli jinými slovy se vyskytuje s koeficientem 0.

Tuto „ideální“ úlohu LP můžeme shrnout do následujícího matematického tvaru.

Nalézt maximum lineární funkce

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{12.10}$$

za splnění podmínek

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \tag{12.11}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \tag{12.12}$$

Úlohu tohoto typu převedeme na následující kanonický tvar

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \dots \text{max}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 1x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n+m$$

Někdy se do kanonického tvaru zapracovává i účelová funkce, a to úpravou na rovnici následujícího tvaru

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n = 0,$$

při označení $c_i = a_{0i}$ můžeme psát následovně

$$-a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - ... - a_{0n}x_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} + z = 0,$$

což při vědomí, že z je další z proměnných, stylem odpovídá zápisu podmínek vlastního omezení.

Kanonický tvar je mimo jiné výhodný pro nalezení počátečního základního řešení. Opět si uvědomíme, že základní řešení je takové přípustné řešení, které má přesně tolik nul, jako je rozdíl počtu neznámých a počtu (lineárně nezávislých) rovnic. V našem případě tedy budeme mít v základním řešení $(n+m)-m = n$ nul. Jedním ze základních řešení je i takové, ve kterém se za nuly zvolí všechny strukturální proměnné, tj. $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Po dosazení těchto nul do rovnic můžeme dopočítat hodnoty zbývajících proměnných, a to $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2$, ..., $x_{n+m} = b_m$. Zřejmě se jedná o přípustné řešení, protože odpovídá všem podmínkám vlastního omezení a všechny proměnné jsou nezáporné.

Příklad 12.9

12.9. Vytvořte kanonický tvar a nalezněte výchozí řešení následující úlohy LP.

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \dots \text{max}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq 5 \\
2x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 2 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6.
\end{aligned}$$

Řešení: Úloha je maximalizační, tedy jedna z podmínek kanonického tvaru je splněna automaticky. Pro splnění ostatních podmínek musíme všechny nerovnice upravit na rovnice, a to přidáním nových proměnných. V případě znaménka nerovnice $\leq$ tuto přidanou proměnnou budeme přičítat. Zároveň připíšeme do všech rovnic proměnné, které se v dané rovnici nevyskytují, s koeficientem 0. Dostaneme tedy následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 5 \\
2x_1 - 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 2 \\
3x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 &= 4 \\
1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 &= 6.
\end{aligned}$$

Nyní si můžeme všimnout, že matice této soustavy rovnic obsahuje jednotkovou submatici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakonec ještě můžeme přidat rovnici náležející účelové funkci, a to

$$-1z - 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 0.$$

Je zřejmé, že pro všechny uvedené proměnné platí podmínky nezápornosti, tedy

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

Tím jsme úlohu převedli do kanonického tvaru.
Při hledání výchozího řešení této úlohy položíme všechny nebazické proměnné, tj. proměnné, které nenáležejí k jednotkové submatici, rovny 0. Což znamená, že

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$$

Dosazením těchto hodnot do soustavy rovnic kanonického tvaru můžeme ověřit, že hodnoty zbývajících proměnných nabývají jednotlivých hodnot pravých stran rovnic

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 5 \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 2 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 &= 4 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 &= 6, \end{aligned}$$

a tedy

$$x_4 = 5, x_5 = 2, x_6 = 4, x_7 = 6.$$

Výchozím základním řešením je tedy vektor $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 5, 2, 4, 6)$.

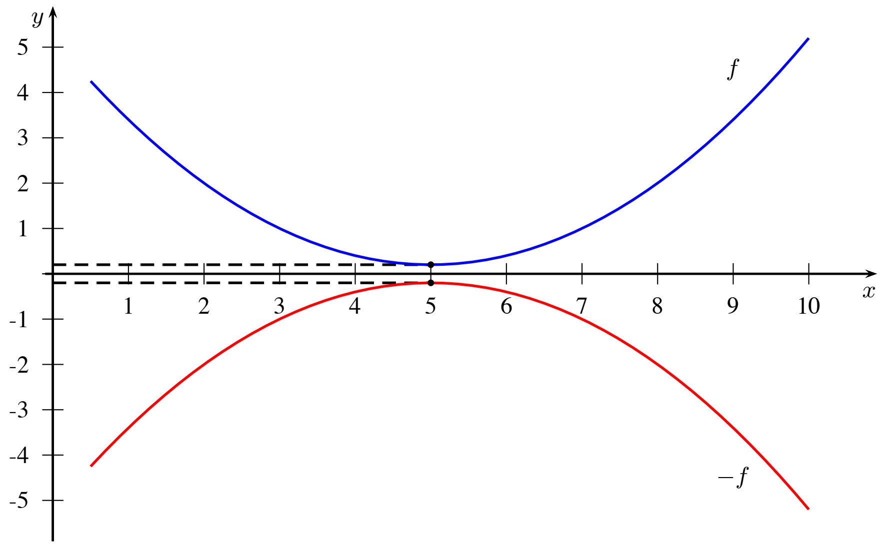
Pokud není úloha LP v uvedeném tvaru, který je ideální k převodu na kanonický tvar, budeme postupovat následovně:

- pokud není splněna podmínka, že se jedná se o maximalizační úlohu, ale o úlohu minimalizační, pak účelovou funkci vynásobíme (-1) a tím minimalizační úlohu převedeme na úlohu maximalizační. Je totiž zřejmé, že původní účelová funkce nabývá minima pro stejné hodnoty proměnných x, pro které nabývá maxima upravená účelová funkce. Dále platí, že výsledná optimální hodnota *z* obou funkcí je až na znaménko stejná. Vše je názorně vidět na Obrázku 12.17

- pokud není splněna podmínka, že pravé strany všech podmínek vlastního omezení jsou nezáporná čísla, pak danou rovnici či nerovnici vynásobíme (-1). Po této úpravě již bude pravá strana daného vlastního omezení zřejmě nezáporná

- pokud není splněna podmínka, že matice soustavy obsahuje jednotkovou submatici řádu *m* (počtu rovnic), pak do soustavy přidáme další proměnnou, jejíž koeficienty z jednotlivých rovnic vytváří takový vektor obsahující jednu jedničku a ostatní nuly, jaký sloupec chybí v jednotkové submatici

- pokud není splněna podmínka, že pro všechny proměnné úlohy jsou splněny podmínky nezápornosti, pak tu proměnnou, pro kterou podmínka nezápornosti splněna není, rozdělíme na dvě nezáporné proměnné, a to následujícím způsobem $x_i = x_i^+ - x_i^-$, přičemž pro proměnné x_i^+ a x_i^- platí následující
  - pokud $x_i \geq 0$, pak $x_i^+ = x_i$ a $x_i^- = 0$,
  - pokud $x_i < 0$, pak $x_i^+ = 0$ a $x_i^- = x_i$.



Obrázek 12.17: Převod hledání minima funkce na hledání maxima funkce

Definice 12.4.1. Proměnné, které do úlohy vstupují přímo ze slovního zadání a jež odpovídají skutečným činnostem, nazýváme *strukturálními* (či strukturními) *proměnnými*.

Definice 12.4.2. Proměnné, které do úlohy přidáváme při úpravě nerovnic na rovnice, nazýváme *přídatnými proměnnými*.

Tyto proměnné lze interpretovat. Ve většině úloh vyjadřují jakýsi zbytek, či naopak přebytek v jednotlivých podmínkách vlastního omezení.

Definice 12.4.3. Proměnné, které do úlohy přidáváme v případě chybějících sloupců jednotkové submatice, nazýváme *pomocnými proměnnými*.

Tyto proměnné nelze interpretovat, v úloze jsou „navíc“, je nutno je odstranit, jinými slovy řečeno vynulovat. Toto můžeme dělat dvěma způsoby.

Jedním z těchto způsobů je přiřazení „handicapových“ koeficientů těmto pomocným proměnným v účelové funkci. Pokud máme maximalizační úlohu, přiřadíme pomocným proměnným záporný koeficient, který má v absolutní hodnotě velkou hodnotu. Tím bude z hlediska maximalizace nevýhodné mít pomocnou proměnnou s jinou než nulovou hodnotou. Obdobně při minimalizační úloze přiřadíme pomocným proměnným hodně velký kladný koeficient. Jediným závažným nedostatkem tohoto způsobu je fakt, že nelze předem zcela bezpečně odhadnout, zda jsme zvolili koeficient „dostatečně handicapující“. Z tohoto důvodu při řešení neodlišíme případ, kdy daná úloha LP nemá žádné přípustné řešení, od případu, kdy jsme nevhodně zvolili handicapový koeficient.

Druhým způsobem je použití speciálního typu simplexové metody, tzv. dvoufázové simplexové metody, která nejprve v první fázi vynuluje všechny pomocné proměnné pomocí optimalizace speciální pomocné účelové funkce, v druhé fázi pak teprve hledá požadované optimum. Tento způsob bezpečně odhalí případ, kdy úloha LP nemá žádné přípustné řešení. Je to však způsob poněkud pracný. V tomto materiálu se touto metodou zabývat blíže nebudeme.

Strukturální proměnné se téměř vždy vyskytují v účelové funkci s nenulovými cenovými koeficienty, přídatné a pomocné proměnné se v účelové funkci nevyskytují, jinými slovy se v účelové funkci vyskytují s nulovými koeficienty.

Příklad 12.10

12.10. Vytvořte kanonický tvar, určete typy proměnných a nalezněte výchozí řešení následující úlohy LP

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \ldots \min$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq -6. \end{aligned}$$

Řešení: Úloha je minimalizační, proto musíme provést úpravu účelové funkce, a to vynásobením (-1). Upravená účelová funkce bude mít následující tvar

$$z' = -4x_1 - 7x_2 - 3x_3 \ldots \max.$$

Pro splnění ostatních podmínek si musíme nejdříve uvědomit, že v kanonickém tvaru musí být pravé strany podmínek všech vlastních omezení nezáporné. Toto není splněno u poslední podmínky. Proto tuto nerovnici musíme vynásobit (-1). A tím obdržíme následující nerovnici

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq 6.$$

Dále musíme všechny nerovnice upravit na rovnice, a to přidáním nových proměnných. V případě znaménka nerovnice $\leq$ tuto přidanou proměnnou budeme přičítat a v případě znaménka nerovnice $\geq$ tuto přidanou proměnnou budeme odečítat. Zároveň připíšeme do všech rovnic proměnné, které se v dané rovnici nevyskytují, s koeficientem 0. Dostaneme tedy následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 2 \\ 3x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 &= 4 \\ -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 &= 6. \end{aligned}$$

Pokud si vypíšeme matici této soustavy

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right),$$

můžeme si lehce všimnout, že z potřebné jednotkové submatice chybí dva sloupce, vektory

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že v uvedené soustavě rovnic chybí proměnná, která má ve druhé rovnici koeficient 1 a ve všech ostatních rovnicích koeficient 0. Obdobně chybí proměnná, která má ve třetí rovnici koeficient 1 a ve všech ostatních rovnicích koeficient 0. To znamená, že matice této soustavy by neobsahovala jednotkovou submatici. Proto je nutno přidat dvě další proměnné. Z důvodu, že tyto proměnné mají poněkud jiný charakter než ostatní proměnné v úloze, označíme je jiným písmenem. Výsledná soustava rovnic má tedy tvar

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1e_1 + 0e_2 &= 2 \\ 3x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0e_1 + 1e_2 &= 4 \\ -1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 6. \end{aligned}$$

Nakonec ještě můžeme přidat rovnici náležející účelové funkci, a to

$$-1z' + 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0e_1 + 0e_2 = 0.$$

Je zřejmé, že pro všechny uvedené proměnné platí podmínky nezápornosti, tedy

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, e_1, e_2 \geq 0.$$

Tím jsme úlohu převedli do kanonického tvaru. Nyní určíme typy jednotlivých proměnných. Proměnné x_1, x_2, x_3 byly v úloze již v úvodním matematickém modelu, v účelové funkci jsou obsaženy s nenulovými cenovými koeficienty, jedná se tedy o strukturální proměnné. Proměnné x_4, x_5, x_6 byly do úlohy přidány při převodu jednotlivých nerovnic na rovnice, jedná se tedy o proměnné přídatné. Proměnné e_1, e_2 byly do úlohy přidány z důvodu, že pro existenci jednotkové submatice chyběly sloupce, které mají ve všech řádcích nuly, pouze v druhém (respektive třetím) řádku obsahují jedničku. Jedná se tedy o pomocné proměnné.

Při hledání výchozího řešení této úlohy položíme všechny proměnné, které nenáležejí k jednotkové submatici, rovny 0. Tedy

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0.$$

Dosazením těchto hodnot do soustavy rovnic kanonického tvaru můžeme ověřit, že hodnoty zbývajících proměnných nabývají jednotlivých hodnot pravých stran rovnic

$$\begin{aligned}
1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 4\cdot 0 + 1x_4 + 0\cdot 0 + 0x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 5\\
2\cdot 0 - 4\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0x_4 + 0\cdot 0 + 0x_6 + 1e_1 + 0e_2 &= 2\\
3\cdot 0 + 1\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0x_4 - 1\cdot 0 + 0x_6 + 0e_1 + 1e_2 &= 4\\
-1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 1\cdot 0 + 0x_4 + 0\cdot 0 + 1x_6 + 0e_1 + 0e_2 &= 6,
\end{aligned}$$

a proto

$$x_4 = 5,\ x_6 = 6,\ e_1 = 2,\ e_2 = 4.$$

Tím jsme nalezli výchozí řešení.

12.5 Algoritmus simplexové metody

Pokud máme již úlohu převedenu do kanonického tvaru, vytvoříme tzv. simplexovou tabulku, a to způsobem obdobným pro vytváření matice soustavy.

Základ této tabulky bude tvořen koeficienty jednotlivých rovnic kanonického tvaru tabulky. Poslední řádek tabulky bude tvořen koeficienty doplňkové rovnice kanonického tvaru náležející účelové funkci. Před takto vytvořenou tabulku předřadíme ještě dva řádky. První z nich bude obsahovat cenové koeficienty všech proměnných a druhý označení všech proměnných. Dále před tabulku předřadíme dva sloupce, z nichž první bude obsahovat cenové koeficienty všech bazických proměnných a druhý označení těchto proměnných.

Vytvořme nyní simplexovou tabulku úlohy LP z Příkladu 12.9. Takto bude vypadat tabulka bez předřazených dvou sloupců.

4	7	3	0	0	0	0	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	2	−4	1	0	0	0	5
2	−4	1	0	1	0	0	2
3	1	−2	0	0	1	0	4
1	1	1	0	0	0	1	6
−4	−7	−3	0	0	0	0	0

V tabulce jsme pro lepší přehlednost oddělili jednoduchou čarou poslední sloupec obsahující pravé strany rovnic kanonického tvaru úlohy, poslední řádek obsahující informace o účelové funkci a dále předřazené řádky dvojitou čarou. Abychom mohli vyplnit předřazené sloupce, musíme určit všechny bazické proměnné, a tím proměnné, které budou přiřazeny k jednotlivým řádkům. Jak již víme, bazické proměnné jsou ty z proměnných, které náležejí k jednotlivým sloupcům jednotkové submatice. V našem případě jsou to proměnné x_4, x_5, x_6 a x_7. Jednotlivé bazické proměnné přiřadíme k tomu řádku, ve kterém se ve sloupci příslušném k této proměnné vyskytuje 1. Výsledná tabulka bude mít následující tvar.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	1	2	-4	1	0	0	0	5
0	x_5	2	-4	1	0	1	0	0	2
0	x_6	3	1	-2	0	0	1	0	4
0	x_7	1	1	1	0	0	0	1	6
		-4	-7	-3	0	0	0	0	0

Jakmile máme sestavenu výchozí simplexovou tabulku, můžeme přistoupit k vlastnímu zpracování.

Účelová funkce nabývá ve výchozím řešení (viz závěr příkladu 12.9) nulové hodnoty. Je pravděpodobné, že toto řešení není optimální. Ze základní věty LP víme, že můžeme hledat optimální řešení mezi základními řešeními. Budeme tedy hledat jiné základní řešení, pro které bude výsledná hodnota účelové funkce vyšší.

Hledáme proměnnou, která není v tomto okamžiku bazická, tj. je rovna nule, jejíž kladná hodnota by zvýšila hodnotu účelové funkce. Jak tuto proměnnou budeme hledat? Uvědomme si, jak vypadá účelová funkce

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

a jak vypadá řádek simplexové tabulky patřící účelové funkci

	-4	-7	-3	0	0	0	0	0

.

Uvědomme si dále, že proměnné x_4 až x_7 jsou bazické, čili kladné a proměnné, x_1,x_2 a x_3 jsou nebazické, čili nulové. A kdy bude odnulování dané nebazické proměnné výhodné z hlediska hledání maxima účelové funkce? Pouze v případě, že koeficient u dané proměnné bude kladný, proto hodnota v příslušném sloupci posledního řádku simplexové tabulky bude záporná.

Pokud shrneme své dosavadní poznatky, můžeme říci, že hodnotu účelové funkce můžeme vylepšit, pokud existuje v posledním řádku simplexové tabulky záporná hodnota.

Definice 12.5.1. Poslední, oddělený řádek simplexové tabulky obsahuje kritérium optimality aktuálního řešení úlohy LP, proto jej nazýváme *kriteriálním řádkem*.

Z předchozích úvah již tedy víme, jak poznáme, zda je či není dané řešení optimální. Ale jak se zachováme v případě, že víme, že aktuální řešení optimální není? Kterou z nebazických proměnných, kterým náleží v kriteriálním řádku záporná hodnota, máme vybrat?

Je pravděpodobné, že hodnota účelové funkce vzroste více, vybereme-li tu proměnnou, které náleží v kriteriálním řádku číslo, jež je v absolutní hodnotě vyšší. Proto pro další postup zvolíme tu z nebazických proměnných, která má číslo v kriteriálním řádku v absolutní hodnotě nejvyšší.

Definice 12.5.2. Sloupec simplexové tabulky, ve kterém je číslo v kriteriálním řádku záporné a absolutní hodnota tohoto čísla je maximální z absolutních hodnot všech záporných čísel v tomto řádku, nazveme *klíčovým sloupcem*.

Výběrem klíčového sloupce jsme vybrali nebazickou proměnnou, která se v následujícím postupu stane bazickou. To znamená, že původně nulová proměnná se stane kladnou. Je ale přesně dán počet bazických proměnných. Pokud se tedy některá z nebazických proměnných má stát bazickou, musí se i jedna z bazických proměnných stát nebazickou. To znamená, že se tato původně kladná proměnná vynuluje.

Jak vybereme tuto bazickou proměnnou? Jinými slovy, jak vybereme řádek simplexové tabulky, který náleží některé z bazických proměnných?

Připomeňme si, že hodnoty bazických proměnných aktuálního řešení vyčteme v posledním sloupci simplexové tabulky. Dále si připomeňme, že všechny proměnné přípustného řešení musí být nezáporné. Z těchto dvou faktů plyne, že nesmíme připustit, aby se v posledním sloupci simplexové tabulky vyskytly záporné hodnoty.

Pokud má jedna z nebazických proměnných v bazi vystřídat jednu z bazických, musí „podědit“ její sloupec z jednotkové submatice. Toto provedeme pomocí povolených operací Gaussovy metody pro řešení soustav lineárních rovnic (podrobněji bylo popsáno v kapitole o lineární algebře - řešení soustav rovnic). Tedy vybraný řádek, ve kterém má být hodnota 1, vydělíme číslem, které je v tomto řádku umístěno v klíčovém sloupci. Ostatní řádky, ve kterých mají být nuly, upravíme tak, že od nich odečteme vhodný násobek dříve vybraného řádku.

Při těchto úpravách však nesmí v posledním sloupci tabulky vzniknout záporné hodnoty. Jak to zařídíme? Vybereme ten řádek, který má nejmenší kladný podíl, který vznikne vydělením hodnoty v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci.

Definice 12.5.3. Řádek simplexové tabulky, ve kterém je nejmenší kladný podíl, jenž vznikne vydělením hodnoty v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci, nazveme *klíčovým řádkem*.

Jak tedy bude vypadat výběr klíčového sloupce a řádku v našem případu? Podíváme se do kriteriálního, tj. posledního (v tabulce vyznačen tučně) řádku, a vybereme to záporné číslo, které je v absolutní hodnotě maximální (v tabulce vyznačeno červeně).

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	1	2	-4	1	0	0	0	5
0	x_5	2	-4	1	0	1	0	0	2
0	x_6	3	1	-2	0	0	1	0	4
0	x_7	1	1	1	0	0	0	1	6
		-4	**-7**	**-3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Klíčovým sloupcem je tedy sloupec náležející proměnné x_2.

Pro hledání klíčového řádku musíme nejprve vypočítat v každém řádku podíl hodnoty ve sloupci pravých stran, tj. posledním pravém sloupci. Tyto podíly si poznamenáme do přidaného pomocného sloupce na pravý okraj tabulky.

		4	7	3	0	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	x_4	1	**2**	-4	1	0	0	0	5	$2,5$
0	x_5	2	-4	1	0	1	0	0	2	$-0,5$
0	x_6	3	1	-2	0	0	1	0	4	4
0	x_7	1	1	1	0	0	0	1	6	6
		-4	-7	-3	0	0	0	0	0	

Klíčovým řádkem bude první řádek náležející bazické proměnné x_4. Z výběru klíčového sloupce a řádku vyplývá, že v bázi vymění nebazická proměnná x_2 bazickou proměnnou x_4. Prakticky toto značí, že proměnná x_2, která v dosavadním řešení nabývala nulové hodnoty, bude mít v novém řešení nějakou kladnou hodnotu. Naopak proměnná x_4, která byla doposud nenulová, bude v novém řešení nulová. Nové řešení

zjistíme převedením tabulky do nového tvaru pomocí povolených operací.
V novém tvaru simplexové tabulky bude sloupec náležející proměnné x_2 obsahovat samé nuly, pouze na pozici klíčového řádku jedničku. Toto provedeme tak, že nejprve vydělíme celý klíčový řádek hodnotou klíčového prvku (tj. čísla, které se nachází na průniku klíčového sloupce a klíčového řádku), v našem případě budeme celý klíčový řádek dělit číslem 2.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$

K ostatním řádkům budeme vždy přičítat takový násobek klíčového řádku, aby výsledná hodnota na pozici upravovaného řádku a klíčového sloupce byla nulová. K druhému řádku přičteme dvojnásobek řádku klíčového.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12

Od třetího řádku odečteme polovinu klíčového řádku.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$

Od čtvrtého řádku opět odečteme polovinu klíčového řádku.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$

Nakonec upravíme i kriteriální řádek. Opět tak, aby na pozici klíčového sloupce byla v nově vzniklém kriteriálním řádku nula.

Při úpravě kriteriálního řádku si můžeme vybrat ze dvou způsobů.

1. Stejným způsobem jako předchozí řádky, tj. odečteme od něj vhodný násobek klíčového řádku.

2. Vypočítáme skalární součin vektoru cen bazických proměnných (tj. první předřazený sloupec) a vektoru umístěného v tom sloupci, v němž počítáme hodnotu v kriteriálním řádku. Od výsledné hodnoty následně odečteme hodnotu cenového koeficientu dané proměnné (tj. číslo uvedené v daném sloupci v prvním předřazeném řádku).

Pokud chceme využít první způsob, pak k dosavadnímu kriteriálnímu řádku připočteme $\frac{7}{2}$ násobek řádku klíčového.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	-7	2	1	0	0	12
	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$

K výpočtu druhým způsobem musíme nejprve vyplnit dva předřazené sloupce, tj. jednak musíme určit bazické proměnné a také musíme vypsat jejich cenové koeficienty. Víme, že v tomto kroku simplexové metody nebazická proměnná x_2 vyměnila bazickou proměnnou x_4. Tedy řádek, který doposud náležel proměnné x_4, bude nyní náležet proměnné x_2.

Správné přiřazení jednotlivých řádků jednotlivým bazickým proměnným si můžeme ověřit tak, že ve sloupci dané bazické proměnné je jednička právě v tom řádku, který je dané proměnné přiřazen. Cenové koeficienty již vypíšeme lehce.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$

Hodnotu v kriteriálním řádku ve sloupci náležejícím jednotlivým proměnným vypočteme následovně:
$x_1 \dots (7 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 4 + 0 \cdot \frac{5}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}) - 4 = -\frac{1}{2}$
$x_2 \dots (7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 7 = 0$
$x_3 \dots (7 \cdot (-2) + 0 \cdot (-7) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3) - 3 = -17$
$x_4 \dots (7 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot (-\frac{1}{2})) - 0 = \frac{7}{2}$
$x_5 \dots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_6 \dots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_7 \dots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0$,
sloupec pravých stran $\dots (7 \cdot \frac{5}{2} + 0 \cdot 12 + 0 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot \frac{7}{2}) - 0 = \frac{35}{2}$.

Vidíme, že jsme obdrželi stejný tvar kriteriálního řádku jako v případě předchozího způsobu, tedy

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$
		$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$

.

Z dané tabulky můžeme vyčíst následující závěry. Vidíme, že proměnné x_1, x_3 a x_4 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_2, x_5, x_6 a x_7 bazické jsou a jejich hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Okamžité řešení je tedy následující

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 & \qquad x_5 &= 12 \\
x_2 &= \frac{5}{2} & \qquad x_6 &= \frac{3}{2} \\
x_3 &= 0 & \qquad x_7 &= \frac{7}{2} \\
x_4 &= 0 & \qquad z &= \frac{35}{2}.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že v aktuální simplexové tabulce se v kriteriálním řádku vyskytují záporné hodnoty, což při maximalizační úloze znamená, že jsme ještě nedosáhli optimální hodnoty účelové funkce.

Proto musíme opět vybrat klíčový sloupec. Bude jím sloupec náležející proměnné x_3, protože ten obsahuje v kriteriálním řádku zápornou hodnotu, která je v absolutní hodnotě největší ze všech záporných hodnot v kriteriálním řádku. Tento výběr značí, že nebazická proměnná x_3 bude vstupovat do báze, což znamená, že byla doposud nulová a v dalším kroku simplexové metody se stane kladnou.

Dále musíme vybrat klíčový řádek. Ten vybereme pomocí pomocných podílů, ve kterých budeme dělit postupně jednotlivé hodnoty sloupce pravých stran jednotlivými hodnotami klíčového sloupce. Z těchto podílů vybereme nejmenší kladný. Ten bude určovat klíčový řádek.

		4	7	3	0	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	záporné
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12	záporné
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	nelze
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{6}$
		$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$	

Vidíme, že dva z podílů jsou záporné, v jednom by se dělilo nulou a zůstává pouze jediný podíl s kladnou hodnotou. To znamená, že je nejmenším kladným podílem. Tento podíl je v řádku, který je přiřazen bazické proměnné x_7. Tento řádek tedy bude vybrán jako klíčový řádek. To znamená, že nebazická proměnná x_3 v bázi vystřídá bazickou proměnnou x_7.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
0	x_5	4	0	-7	2	1	0	0	12
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$
0	x_7	$\frac{1}{2}$	0	**3**	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{7}{2}$
		$-\frac{1}{2}$	0	-17	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$\frac{35}{2}$

Nyní upravíme stávající simplexovou tabulku pomocí povolených úprav tak, aby v klíčovém sloupci byly samé nuly, pouze na pozici klíčového řádku byla v tomto sloupci jednička. Nejdříve upravíme klíčový řádek, a to tak, že jej celý vydělíme číslem, které leží na průniku klíčového řádku a sloupce, v našem případě číslem 3.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$

Nyní upravíme i zbývající tři řádky, a to tak, že ke každému z nich přičteme vhodný násobek klíčového řádku, respektive od každého z nich vhodný násobek odečteme.K prvnímu řádku přičteme $\frac{2}{3}$ násobek klíčového řádku, k druhému přičteme $\frac{7}{3}$ násobek a v třetím řádku je na pozici klíčového sloupce nula, proto jej upravovat nemusíme, stačí jej opsat.

	4	7	3	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{29}{6}$
	$\frac{31}{6}$	0	0	$\frac{10}{6}$	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{121}{6}$
	$\frac{5}{2}$	0	0	-2	0	1	0	$\frac{3}{2}$
	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$

Nyní ještě musíme vyplnit kriteriální řádek. K tomu nejprve vyplníme předřazené sloupce. Víme, že proměnná x_3 v bázi nahradila proměnnou x_7, tedy v poslední řádek nyní bude náležet této nové bazické proměnné.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{29}{6}$
0	x_5	$\frac{31}{6}$	0	0	$\frac{10}{6}$	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{121}{6}$
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	-2	0	1	0	$\frac{3}{2}$
3	x_3	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$

Hodnotu v kriteriálním řádku ve sloupci náležejícím jednotlivým proměnným vypočteme následovně.
$x_1 \ldots (7 \cdot \frac{5}{6} + 0 \cdot \frac{31}{6} + 0 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6}) - 4 = \frac{14}{6}$

$x_2 \ldots (7 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0) - 7 = 0$
$x_3 \ldots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1) - 3 = 0$
$x_4 \ldots (7 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{10}{6} + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot (-\frac{1}{6})) - 0 = \frac{4}{6}$
$x_5 \ldots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_6 \ldots (7 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0) - 0 = 0$
$x_7 \ldots (7 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{7}{3} + 0 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3}) - 0 = \frac{17}{3}$
sloupec pravých stran $\ldots (7 \cdot \frac{29}{6} + 0 \cdot \frac{121}{6} + 0 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{7}{6}) - 0 = \frac{224}{6}$

Přepočtená simplexová tabulka tedy bude vypadat následovně.

		4	7	3	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
7	x_2	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{29}{6}$
0	x_5	$\frac{31}{6}$	0	0	$\frac{10}{6}$	1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{121}{6}$
0	x_6	$\frac{5}{2}$	0	0	-2	0	1	0	$\frac{3}{2}$
3	x_3	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$
		$\frac{14}{6}$	0	0	$\frac{4}{6}$	0	0	$\frac{17}{3}$	$\frac{224}{6}$

Vidíme, že v kriteriálním řádku se již nevyskytují žádné záporné hodnoty, což při řešení maximalizační úlohy znamená, že jsme dosáhli optimální hodnoty účelové funkce.

Z tabulky tedy můžeme vyčíst tyto výsledky. Jednak vidíme, že proměnné x_1, x_4 a x_7 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_2, x_3, x_5 a x_6 bazické jsou a jejich hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Výsledné optimální řešení je tedy následující.

$$x_1 = 0 \qquad x_5 = \frac{121}{6}$$
$$x_2 = \frac{29}{6} \qquad x_6 = \frac{3}{2}$$
$$x_3 = \frac{7}{6} \qquad x_7 = 0$$
$$x_4 = 0 \qquad z = \frac{224}{6}$$

12.11. Vyřešte úlohu lineárního programování z Příkladu 12.2 **Příklad 12.11**

Řešení: Připomeňme si zadání. Podnik vyrábí dva druhy výrobků - V1 a V2. Ve sledovaném období máme k dispozici pouze 180 hodin práce potřebného odborníka, přičemž tohoto odborníka potřebujeme 2 hodiny při výrobě každého výrobků V1 a 1 hodinu na výrobu V2. Potřebujeme vyrobit výrobků V1 nejvýše o 5 více než je polovina počtu výrobků V2. Naopak výrobků V2 můžeme vyrobit maximálně o 30 více než výrobků V1. Jak máme naplánovat výrobu, pokud je naším cílem optimalizovat zisky a víme, že na každém výrobku V1 je zisk 300 Kč a na výrobku V2 zisk 400 Kč?

Již dříve jsme v příkladu 12.2 vytvořili matematický model úlohy. Můžeme zde shrnout výsledek. Máme dvě proměnné, a to

$x_1 \ldots$ počet výrobků V1
$x_2 \ldots$ počet výrobků V2.

Matematický model má podobu

$$
\begin{aligned}
z &= 300x_1 + 400x_2 \ldots \max \\
2x_1 + 1x_2 &\leq 180 \\
x_1 - \frac{1}{2}x_2 &\leq 5 \\
x_2 - x_1 &\leq 30 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Nyní celou úlohu převedeme do kanonického tvaru. Vidíme, že všechny tři nerovnice vlastního omezení jsou typu $\leq$, proto při převodu každé této nerovnice na rovnici přidáme jednu přídatnou proměnnou, kterou budeme přičítat. Dále již žádnou další úpravu dělat nemusíme. Tím obdržíme kanonický tvar

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 180 \\
x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 5 \\
-1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 30.
\end{aligned}
$$

Ke kanonickému tvaru můžeme ještě přidat řádek náležející účelové funkci v následujícím tvaru

$$z - 300x_1 - 400x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0.$$

V dalším fázi postupu vytvoříme na základě kanonického tvaru úlohy inicializační simplexovou tabulku.

		300 x_1	400 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	
0	x_3	2	1	1	0	0	180
0	x_4	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	5
0	x_5	-1	1	0	0	1	30
		-300	-400	0	0	0	0

Nyní si uvědomme, jaké počáteční řešení náleží k této inicializační tabulce. Víme, že všechny nebazické proměnné (tj. proměnné, které nenáleží k jednotlivým jednotkovým sloupcovým vektorům báze, a tedy nejsou vypsány v předřazeném sloupci) budou mít nulovou hodnotu, hodnoty bazických proměnných (tj. proměnných, které náležejí k jednotlivým jednotkovým sloupcovým vektorům báze, a tedy jsou vypsány v předřazeném sloupci) nalezneme vždy v daném řádku v pravém sloupci. Aktuální hodnotu účelové funkce nalezneme v posledním řádku v posledním sloupci tabulky.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 & x_4 &= 5 \\
x_2 &= 0 & x_5 &= 30 \\
x_3 &= 180 & z &= 0
\end{aligned}
$$

Co tento výsledek znamená? První dvě proměnné jsou rovny 0, což znamená, že nevyrábíme žádný výrobek. Třetí proměnná je rovna 180, což znamená, že nám zbylo 180 volných, nevyužitých hodin odborníka. Čtvrtá proměnná je rovna 5, což znamená, že ještě můžeme vyrobit 5 kusů výrobku V1, aniž bychom překročili omezení. Pátá proměnná je rovna 30, což znamená, že ještě můžeme vyrobit 30 kusů výrobku V2, aniž bychom překročili omezení. Aktuální hodnota účelové funkce je nulová, což znamená, že v tomto případě nemáme žádné zisky.

Toto řešení je viditelně přípustné, avšak zřejmě nikoliv optimální - jistě doufáme, že bychom nějaké zisky mohli získat. Proto přistoupíme k řešení úlohy simplexovou metodou.

V prvním kroku zpracování musíme vybrat klíčový sloupec. Protože se jedná o maximalizační úlohu, budeme si v kriteriálním řádku všímat záporných hodnot a vybereme ten sloupec, který má v kriteriálním řádku ze všech záporných hodnot tu, která je v absolutní hodnotě největší. V našem případě tedy vybereme sloupec, který má v kriteriálním řádku hodnotu -400.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	1	1	0	0	180
0	x_4	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	5
0	x_5	-1	1	0	0	1	30
		-300	-400	0	0	0	0

Nyní musíme nalézt klíčový řádek. Ten vyhledáme na základě pomocných podílů, kdy v každém řádku vydělíme hodnotu v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci. Klíčovým řádkem bude ten, který má tento podíl ze všech kladných podílů nejmenší.

		300	400	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	2	1	1	0	0	180	180
0	x_4	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	5	-10
0	x_5	-1	**1**	0	0	1	30	**30**
		-300	-400	0	0	0	0	

Nyní si musíme uvědomit, co znamená výběr klíčového sloupce a klíčového řádku. Klíčový sloupec náleží jedné z nebazických proměnných, v našem případě proměnné x_2. Tato proměnná bude vstupovat do báze. Naopak klíčový řádek náleží jedné z bazických proměnných, v našem případě proměnné x_5. Tato proměnná bude z báze vystupovat.

Prakticky to znamená, že začneme vyrábět nějaké výrobky V2 (neboť proměnná x_2 představující počet vyrobených výrobků V2 byla doposud nulová, ale vstupem do báze se její hodnota změní na nenulovou). Naopak zcela vyčerpáme omezení na počet výrobků V2 (neboť proměnná x_5 představující množství výrobků, které můžeme ještě vyrobit, aniž bychom překročili omezení, byla doposud nenulová, ale výstupem z báze se vynuluje).

V následujícím kroku přepočteme simplexovou tabulku tak, aby odpovídala stavu, že proměnná x_2 v bázi vystřídá proměnnou x_5. Nejprve upravíme klíčový řádek, a to tak, aby na pozici, kde se protíná klíčový řádek s klíčovým sloupcem, byla jednička. V našem případě vidíme, že na pozici již jednička je, řádek tedy upravovat nemusíme, stačí jej pouze opsat.

Po úpravě klíčového řádku postupně přistoupíme k úpravě všech ostatních řádků. Od každého z nich vždy odečteme vhodný násobek klíčového řádku tak, aby na pozici klíčového sloupce vznikla 0. To znamená, že od prvního řádku odečteme klíčový řádek (protože na pozicích klíčového sloupce jsou v obou těchto řádcích 1). Od druhého řádku odečteme $-\frac{1}{2}$ klíčového řádku, jinými slovy přičteme $\frac{1}{2}$ klíčového řádku. Takto upravené tělo tabulky bude vypadat následovně.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		3	0	1	0	-1	150
		$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20
		-1	1	0	0	1	30

Při vyplňování kriteriálního sloupce máme dvě možnosti postupu. Vždy si můžeme vybrat kteroukoliv z nich. Jedním z možných postupů je využití povolené operace Gaussovy eliminační metody tak, jak jsme již používali při úpravě jednotlivých neklíčových řádků simplexové tabulky. Opět si musíme uvědomit, že na pozici klíčového sloupce v kriteriálním řádku musí být 0. Úpravu tedy provedeme přičtením vhodného násobku klíčového sloupce (v našem případě čtyřsetnásobku) ke kriteriálnímu řádku. Výsledný kriteriální řádek tedy bude mít tvar

		-700	0	0	0	400	12000

.

Abychom mohli vyplnit kriteriální řádek druhým zmíněným způsobem, musíme si uvědomit, který z řádků náleží ke které bazické proměnné. To, jak už jsme si dříve řekli, poznáme z pozic jedniček ve sloupcích jednotkové submatice.

V naší tabulce vidíme, že v prvním řádku je jednička ve sloupci jednotkové matice, který náleží k proměnné x_3. Proto bude první řádek také náležet této proměnné. Ve druhém řádku je jednička ve sloupci jednotkové matice, který náleží k proměnné x_4, proto bude první řádek také náležet proměnné x_4. Ve třetím řádku je jednička ve sloupci jednotkové matice, který náleží k proměnné x_2, proto bude první řádek také náležet proměnné x_2. Můžeme tedy vyplnit předřazené sloupce.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	3	0	1	0	-1	150
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20
400	x_2	-1	1	0	0	1	30

Hodnotu v kriteriálním sloupci na pozici daného sloupce nyní vypočítáme jako skalární součin vektoru cen bazických proměnných (je obsažen v prvním předřazeném sloupci) a vektoru daného sloupce. Od výsledné hodnoty odečteme cenový koeficient umístěný v prvním předřazeném řádku v daném sloupci. Hodnotu na první pozici kriteriálního řádku vypočítáme jako skalární součin vektorů $(0, 0, 400)$ a $(3, \frac{1}{2}, -1)$ a následně odečteme hodnotu 300.

$$\begin{aligned}(0, 0, 400) \times (3, \frac{1}{2}, -1) &= -400\\ -400 - 300 &= -700\end{aligned}$$

Vidíme, že jsme obdrželi stejnou hodnotu, jaká je i na první pozici kriteriálního řádku vypočítaného prvním způsobem. Výpočty hodnot z následujících sloupců vypočítáme obdobně.

$$\begin{array}{ll}
(0, 0, 400) \times (0, 0, 1) = 400 & 400 - 400 = 0\\
(0, 0, 400) \times (1, 0, 0) = 0 & 0 - 0 = 0\\
(0, 0, 400) \times (0, 10, 0) = 0 & 0 - 0 = 0\\
(0, 0, 400) \times (-1, \frac{1}{2}, 1) = 400 & 400 - 0 = 400\\
(0, 0, 400) \times (150, 20, 30) = 12000 & 12000 - 0 = 12000
\end{array}$$

Vidíme, že nám vyšly zcela shodné hodnoty jako při prvním způsobu výpočtu. Celá upravená tabulka má tedy tvar

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	3	0	1	0	-1	150
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20
400	x_2	-1	1	0	0	1	30
		-700	0	0	0	400	12000

Z dané tabulky můžeme vyčíst následující závěry. Jednak vidíme, že se v kriteriálním řádku vyskytuje záporná hodnota, proto ještě nejsme v optimu. Dále vidíme, že proměnné x_1 a x_5 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_2, x_3 a x_4 bazické jsou a jejich hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Okamžité řešení je následující

$$x_1 = 0 \qquad x_4 = 20$$
$$x_2 = 30 \qquad x_5 = 0$$
$$x_3 = 150 \qquad z = 12000.$$

Víme tedy, že pokud vyrobíme 30 kusů výrobku V2, budeme mít zisky 12000 Kč, zbyde nám 150 volných hodin našeho specialisty a můžeme ještě vyrobit 20 kusů výrobku V1, aniž bychom překročily omezení. Naopak omezení na možný počet výrobků V2 je již zcela vyčerpán.

Jak jsme již řekli, z kriteriálního řádku je zřejmé, že jsme ještě nedosáhli optimální hodnoty, že současný stav ještě můžeme vylepšit. Budeme tedy opět aplikovat postup od výběru klíčového sloupce. Jelikož je v kriteriálním řádku pouze jediná záporná hodnota, a to -700, bude klíčovým slopcem první sloupec, který náleží nebazické proměnné x_1. Při hledání klíčového řádku musíme opět nejprve provést pomocné podíly.

		300 x_1	400 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5		
0	x_3	3	0	1	0	-1	150	50
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	20	40
400	x_2	-1	1	0	0	1	30	-30
		-700	0	0	0	400	12000	

Nejmenším kladným podílem je 40, proto zvolíme jako klíčový druhý řádek, který náleží bazické proměnné x_4. Další úpravy povedou ke vstupu proměnné x_1 do báze a zároveň k výstupu proměnné x_4 z báze.

Nejdříve upravíme klíčový řádek. Vydělíme jej klíčovým prvkem (tj. hodnotou, která se nalézá na průsečíku klíčového řádku a klíčového sloupce). V našem případě budeme dělit číslem $\frac{1}{2}$.

Následně upravíme první řádek tak, že od něj odečteme šestinásobek klíčového řádku (protože $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$). Nakonec upravíme i třetí řádek. Přičteme k němu třetinu klíčového řádku (protože odečítáme $\frac{-1}{3}$ násobek, což znamená že přičítáme $\frac{1}{3}$ násobek). Upravené tělo simplexové tabulky vypadá takto:

		300 x_1	400 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	
		0	0	1	-6	-4	30
		1	0	0	2	1	40
		0	1	0	2	2	70

Nyní vyplníme předřazené sloupce. Pro každý řádek zjistíme, ke které bazické proměnné náleží. V prvním řádku můžeme nalézt jedničku ve sloupci jednotkové matice náležejícím proměnné x_3. Proto v tomto řádku vyplníme do předsazených sloupců údaje 0 a x_3. Obdobnou úvahou můžeme zjistit, že v druhém řádku vyplníme údaje 300 a x_1 a ve třetím řádku 400 a x_4. Dostáváme se tedy k tabulce ve stavu:

		300 x_1	400 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	
0	x_3	0	0	1	-6	-4	30
300	x_1	1	0	0	2	1	40
400	x_2	0	1	0	2	2	70

Nakonec vyplníme kriteriální řádek. Víme, že ve sloupcích náležejících jednotkové submatici budou v kriteriálním řádku nuly. Proto vyplníme do prvních tří sloupců 0.

V ostatních sloupcích musíme hodnoty vypočítat.

$$
\begin{aligned}
&(0,300,400)\times(-6,2,2)=1400 && 1400-0=1400\\
&(0,300,400)\times(-4,1,2)=1100 && 1100-0=1100\\
&(0,300,400)\times(30,40,70)=40000 && 40000-0=40000
\end{aligned}
$$

Výsledná tabulka vypadá následovně.

		300	400	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-6	-4	30
300	x_1	1	0	0	2	1	40
400	x_2	0	1	0	2	2	70
		0	0	0	1400	1100	40000

Vidíme, že v kriteriálním řádku se již nevyskytuje žádná záporná hodnota. Našli jsme se tedy optimum. Zbývá nám již jen z výsledné simplexové tabulky určit optimální řešení zadané úlohy LP. Víme, že všechny nebazické proměnné nabývají nulových hodnot, a že hodnoty bazických proměnných nalezneme v příslušných řádcích v posledním odděleném sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. Výslednou optimální hodnotu účelové funkce vyčteme v kriteriálním řádku opět v posledním sloupci. Konečné optimální řešení je tedy následující

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 40 & x_4 &= 0\\
x_2 &= 70 & x_5 &= 0\\
x_3 &= 30 & z &= 40000.
\end{aligned}
$$

Na závěr shrneme získaný výpočet do slovní odpovědi. Z hlediska optimalizace zisků je pro náš podnik nejvýhodnější vyrobit 40 kusů výrobku V1 a 70 kusů výrobku V2. V tomto případě budeme mít zisk 40000 Kč. Zbyde nám 30 volných hodin odborníka, obě omezení na počty jednotlivých výrobků jsme plně využili.

Příklad 12.12

12.12. Vyřešte následující úlohu lineárního programování.

Na domácí párty jsme se rozhodli narychlo vytvořit speciální teplé nápoje - kávu s přídavkem kakaa. Budeme míchat dvě různé směsi - sladkou směs s cukrem a směs, kde je více kakaa. Do sladké směsi („s cukrem“) dáme 2 lžičky kávy, 2 lžičky kakaa a 1 kostku cukru, do směsi „bez cukru“ dáme 3 lžičky kakaa a 1 lžičku kávy. K dispozici máme 36 lžiček kakaa, 20 lžiček kávy a 8 kostek cukru. Jak máme uvařit nápoje, chceme-li dané suroviny co nejlépe využít a vytvořit co nejvíce nápojů?

Řešení: Nejdříve vytvoříme matematický model úlohy. Našimi proměnnými budou jednak x_1 představující množství nápojů prvního typu a jednak x_2 představující množství nápojů druhého typu. Obě proměnné tedy reprezentují určitá množství, to znamená, že nemohou nabývat záporných hodnot. Proto musí být splněny podmínky nezápornosti

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Dále vytvoříme účelovou funkci. Víme, že naším cílem je vytvořit co nejvíce nápojů, proto se bude jednat o maximalizační úlohu. Jak jsme před chvílí řekli, jednotlivé proměnné představují množství jednotlivých nápojů, celkové množství nápojů tedy získáme sečtením těchto dvou proměnných.

$$z = x_1 + x_2 \ldots \max$$

Nakonec sestavíme všechny nerovnice vyjadřující jednotlivé podmínky vlastního omezení. V textu zadání najdeme, čeho se jednotlivá omezení týkají a kolik jich bude. Vidíme, že první omezení se bude týkat informace, že máme k dispozici pouze 36 lžiček kakaa, druhé omezení se týká omezujícího množství 20 lžiček kávy a poslední omezení bude informovat o disponibilním množství 8 kostek cukru.

Dále si uvědomíme, kde a v jakém množství spotřebováváme jednotlivé suroviny. Vidíme, že na přípravu jednoho nápoje prvního typu potřebujeme 2 lžičky kakaa a na přípravu jednoho nápoje druhého typu potřebujeme 3 lžičky kakaa. Jelikož proměnná x_1 představuje množství nápojů prvního typu, pak celkovou spotřebu kakaa na všechny tyto nápoje můžeme vyjádřit vztahem $2x_1$. Obdobnou úvahou můžeme říci, že celková spotřeba kakaa na všechny nápoje druhého typu bude vyjádřena vztahem $3x_2$. Nyní již můžeme sestavit nerovnici vyjadřující první podmínku vlastního omezení

$$2x_1 + 3x_2 \leq 36.$$

Dále vidíme, že na přípravu jednoho nápoje prvního typu potřebujeme 2 lžičky kávy a na přípravu jednoho nápoje druhého typu potřebujeme 1 lžičku kávy. Jelikož proměnná x_1 představuje množství nápojů prvního typu, pak celkovou spotřebu kávy na všechny tyto nápoje můžeme vyjádřit vztahem $2x_1$. Obdobnou úvahou můžeme říci, že celková spotřeba kávy na všechny nápoje druhého typu bude vyjádřena vztahem $1x_2$. Nyní již můžeme sestavit nerovnici vyjadřující druhou podmínku vlastního omezení

$$2x_1 + 1x_2 \leq 20.$$

Při tvorbě nerovnice posledního vlastního omezení si musíme všimnout, že na přípravu jednoho nápoje prvního typu potřebujeme 1 kostku cukru a na přípravu jednoho nápoje druhého typu nepotřebujeme cukr vůbec. Jelikož proměnná x_1 představuje množství nápojů prvního typu, pak celkovou spotřebu cukru na všechny tyto nápoje můžeme vyjádřit vztahem $1x_1$. Obdobnou úvahou můžeme říci, že celková spotřeba cukru na všechny nápoje druhého typu bude vyjádřena vztahem $0x_2$. Nyní již můžeme sestavit nerovnici vyjadřující druhou podmínku vlastního omezení

$$1x_1 + 0x_2 \leq 8.$$

Nyní můžeme shrnout výslednou podobu matematického modelu.

$$\begin{aligned} z = x_1 + x_2 \ldots &\max \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 20 \\ 1x_1 + 0x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vytvořenou úlohu převedeme v dalším kroku do kanonického tvaru. Vidíme, že všechny tři nerovnice vlastního omezení jsou typu $\leq$, proto při převodu každé této nerovnice na rovnici přidáme jednu přídatnou proměnnou, kterou budeme přičítat. Dále již žádnou další úpravu dělat nemusíme. Tím obdržíme kanonický tvar

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 36 \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 20 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 8. \end{aligned}$$

Ke kanonickému tvaru můžeme ještě přidat řádek náležející účelové funkci v následujícím tvaru

$$z - 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0.$$

V dalším fázi postupu vytvoříme na základě kanonického tvaru úlohy inicializační simplexovou tabulku.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	3	1	0	0	36
0	x_4	2	1	0	1	0	20
0	x_5	1	0	0	0	1	8
		-1	-1	0	0	0	0

Počáteční řešení náleží k této inicializační tabulce je následující

$$x_1 = 0 \qquad x_4 = 20$$
$$x_2 = 0 \qquad x_5 = 8$$
$$x_3 = 36 \qquad z = 0.$$

Co tento výsledek znamená? První dvě proměnné jsou rovny 0, což znamená, že nevyrábíme žádný z nápojů. Třetí proměnná je rovna 36, což znamená, že nám zbylo 36 lžiček kakaa. Čtvrtá proměnná je rovna 20, což znamená, že nám zbylo 20 lžiček kávy. Pátá proměnná je rovna 8, což znamená, že máme ještě 8 kostek cukru. Aktuální hodnota účelové funkce je nulová, což znamená, že v tomto případě nemáme uvařené žádné nápoje.

Nyní přistoupíme k řešení úlohy simplexovou metodou. V prvním kroku zpracování musíme vybrat klíčový sloupec. Protože se jedná o maximalizační úlohu, budeme si v kriteriálním řádku všímat záporných hodnot a vybereme ten sloupec, který má v kriteriálním řádku ze všech záporných hodnot tu, která je v absolutní hodnotě největší. V našem případě vidíme, že v kriteriálním řádku se dvakrát vyskytuje hodnota -1. Je jedno, kterou z nich vybereme, například tedy první.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	3	1	0	0	36
0	x_4	2	1	0	1	0	20
0	x_5	1	0	0	0	1	8
		-1	-1	0	0	0	0

Nyní musíme nalézt klíčový řádek. Ten vyhledáme na základě pomocných podílů, kdy v každém řádku vydělíme hodnotu v posledním sloupci hodnotou v klíčovém sloupci. Klíčovým řádkem bude ten, který má tento podíl ze všech kladných podílů nejmenší.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	2	3	1	0	0	36	18
0	x_4	2	1	0	1	0	20	10
0	x_5	**1**	0	0	0	1	8	**8**
		-1	-1	0	0	0	0	

Klíčový sloupec náleží jedné z nebazických proměnných, v našem případě proměnné x_1. Tato proměnná bude vstupovat do báze. Naopak klíčový řádek náleží jedné z bazických proměnných, v našem případě proměnné x_5. Tato proměnná bude z báze vystupovat. Prakticky to znamená, že začneme vařit nějaké sladké nápoje (neboť proměnná x_1 představující počet těchto nápojů byla doposud nulová, ale vstupem do báze se její hodnota změní na nenulovou). Naopak zcela vyčerpáme cukr (neboť proměnná x_5 představující počet kostek cukru, byla doposud nenulová, ale výstupem z báze se vynuluje).

V následujícím kroku přepočteme simplexovou tabulku tak, aby odpovídala stavu, že proměnná x_1 v bázi vystřídá proměnnou x_5. Nejprve upravíme klíčový řádek, a to tak, aby na pozici, kde se protíná klíčový řádek s klíčovým sloupcem, byla jednička. V našem případě vidíme, že na pozici již jednička je, tedy řádek upravovat nemusíme, stačí jej pouze opsat. Po úpravě klíčového řádku postupně přistoupíme k úpravě všech ostatních řádků. Od každého z nich vždy odečteme vhodný násobek klíčového řádku tak, aby na pozici klíčového sloupce vznikla 0. To znamená, že od prvního i od druhého řádku odečteme dvojnásobek klíčového řádku (protože na pozicích klíčového sloupce jsou v obou těchto sloupcích 2). Zároveň určíme bazické proměnné, tedy proměnné, kterým náležejí jednotlivé řádky tabulky. Budeme se řídit pozicí jedniček v rámci jednotkové submatice.

Takto upravené tělo tabulky bude vypadat následovně:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	3	1	0	-2	20
0	x_4	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8

Nyní ještě vyplníme poslední, kriteriální řádek. V tomto případě bude výhodnější využít postupů Gaussovy metody, protože si můžeme všimnout, že v klíčovém řádku je na pozici klíčového sloupce 1 a v kriteriálním řádku -1. Můžeme tedy provést jednoduchou úpravu, a to přičtení klíčového řádku ke kriteriálnímu. Pak dostáváme celou upravenou tabulku:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	3	1	0	-2	20
0	x_4	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8
		0	-1	0	0	1	8

Z dané tabulky můžeme vyčíst následující závěry. Vidíme, že se v kriteriálním řádku vyskytuje záporná hodnota, proto ještě nejsme v optimu. Dále vidíme, že proměnné x_2 a x_5 nejsou bazické, proto je jejich hodnota v tomto okamžiku nulová. Naopak proměnné x_1, x_3 a x_4 bazické jsou a jejich hodnoty můžeme vyčíst v posledním sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. V posledním sloupci v kriteriálním řádku můžeme vyčíst aktuální hodnotu účelové funkce. Okamžité řešení je tedy následující

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 8 & x_4 &= 4 \\
x_2 &= 0 & x_5 &= 0 \\
x_3 &= 20 & z &= 8.
\end{aligned}
$$

Víme tedy, že pokud uvaříme 8 sladkých nápojů a žádný nesladký, budeme mít celkem osm nápojů. Zbyde nám 20 lžiček kakaa, 4 lžičky kávy a žádný cukr.
Uvědomili jsme si, že jsme ještě nedosáhli optimální hodnoty. Budeme tedy opět aplikovat postup od výběru klíčového sloupce. Jelikož je v kriteriálním řádku pouze jediná záporná hodnota, a to -1, bude klíčovým sloupcem druhý sloupec, který náleží nebazické proměnné x_2. Při hledání klíčového řádku musíme opět nejprve provést pomocné podíly.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	3	1	0	-2	20	$\frac{20}{3}$
0	x_4	0	1	0	1	-2	4	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8	nelze
		0	-1	0	0	1	8	

Nejmenším kladným podílem je 4, proto zvolíme jako klíčový druhý řádek, který náleží bazické proměnné x_4.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	3	1	0	-2	20	$\frac{20}{3}$
0	x_4	0	**1**	0	1	-2	4	**4**
1	x_1	1	0	0	0	1	8	nelze
		0	-1	0	0	1	8	

Další úpravy povedou ke vstupu proměnné x_2 do báze a zároveň k výstupu proměnné x_4 z báze. Vidíme, že klíčový řádek má na místě klíčového prvku jedničku. Proto jej nemusíme upravovat, stačí jej opsat do nové tabulky.

Následně upravíme první řádek tak, že od něj odečteme trojnásobek klíčového řádku (protože $\frac{3}{1} = 3$). Nakonec si můžeme všimnout, že třetí řádek má na pozici klíčového sloupce 0, to znamená, že jej nemusíme nijak upravovat, ale stačí jej opsat. Upravené tělo simplexové tabulky vypadá takto:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	0	1	-3	4	8
		0	1	0	1	-2	4
		1	0	0	0	1	8

Nyní vyplníme předřazené sloupce. Pro každý řádek zjistíme, ke které bazické proměnné náleží. V prvním řádku můžeme nalézt jedničku ve sloupci jednotkové matice náležejícím proměnné x_3. Proto v tomto řádku vyplníme do předsazených sloupců údaje 0 a x_3. Obdobnou úvahou můžeme zjistit, že v druhém řádku vyplníme údaje 1 a x_2 a ve třetím řádku 1 a x_1. Dostáváme se tedy k tabulce ve stavu:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-3	4	8
1	x_2	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8

Nakonec vyplníme kriteriální řádek. Víme, že ve sloupcích náležejících jednotkové submatici budou v kriteriálním řádku nuly. Proto vyplníme do prvních tří sloupců 0. V ostatních sloupcích musíme hodnoty vypočítat.

$$
\begin{aligned}
&(0,1,1) \times (-3,1,0) = 1 && 1 - 0 = 1\\
&(0,1,1) \times (4,-2,1) = -1 && -1 - 0 = -1\\
&(0,1,1) \times (8,4,8) = 12 && 12 - 0 = 12
\end{aligned}
$$

Výsledná tabulka vypadá následovně:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-3	4	8
1	x_2	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8
		0	0	0	1	-1	12

V kriteriálním řádku se vyskytuje jedna záporná hodnota, proto víme, že jsme ještě nedosáhli optima. Nejdříve ale můžeme z naposledy vypočítané simplexové tabulky určit aktuální řešení zadané úlohy LP. Víme, že všechny nebazické proměnné nabývají nulových hodnot a že hodnoty bazických proměnných nalezneme v příslušných řádcích v posledním odděleném sloupci, tj. ve sloupci pravých stran. Výslednou optimální hodnotu účelové funkce vyčteme v kriteriálním řádku opět v posledním sloupci. Aktuální řešení je tedy následující

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 8 && x_4 = 0\\
&x_2 = 4 && x_5 = 0\\
&x_3 = 8 && z = 12.
\end{aligned}
$$

Nyní shrneme získaný výpočet do slovní odpovědi. Pokud uvaříme 8 sladkých nápojů a 4 nesladké, budeme mít celkem 12 nápojů. Zbyde nám 8 lžiček kakaa a žádná káva ani cukr. Vidíme, že se celkový počet vyrobených nápojů zvýšil, což bylo naším cílem.

Jak už jsme si ale uvědomili, nedosáhli jsme ještě optima, tedy že můžeme při jiném rozložení uvařit celkově větší množství nápojů. Musíme tedy postupovat dalším krokem výpočtu.

Opět začneme hledáním klíčového sloupce. Bude to sloupec obsahující v kriteriálním řádku hodnotu -1, což je sloupec náležející proměnné x_5. Jedná se o jednu z nebazických proměnných, která tímto krokem vstoupí do báze. To znamená, že z původně nulové hodnoty nabude hodnoty kladné. Uvedeme si tabulku s vyznačeným klíčovým sloupcem.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	-3	4	8
1	x_2	0	1	0	1	-2	4
1	x_1	1	0	0	0	1	8
		0	0	0	1	-1	12

Pro nalezení klíčového řádku musíme vypočítat pomocné podíly, a to následovně.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	0	1	-3	4	8	2
1	x_2	0	1	0	1	-2	4	záporné
1	x_1	1	0	0	0	1	8	8
		0	0	0	1	-1	12	

Nejmenší kladný podíl je v prvním řádku - bude vybrán za klíčový řádek. Tento řádek náleží bazické proměnné x_3, tedy tato proměnná bude vystupovat z báze. Znamená to, že tato doposud nenulová proměnná se stane nulovou.

		1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	0	0	1	-3	**4**	8	2
1	x_2	0	1	0	1	-2	4	záporné
1	x_1	1	0	0	0	1	8	8
		0	0	0	1	-1	12	

Nyní přistoupíme k úpravě tabulky. Nejprve upravíme klíčový řádek, a to tak, že jej celý vydělíme klíčovým prvkem, tedy hodnotou 4. Po úpravě klíčového řádku přistoupíme k úpravě i ostatních řádků. Druhý řádek upravíme tak, že od něj odečteme $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ násobek klíčového řádku. Tento fakt můžeme vyjádřit i jiným způsobem, a to tak, že přičteme $\frac{1}{2}$ násobek klíčového řádku. Třetí řádek upravíme tak, že od něj odečteme $\frac{1}{4}$ násobek klíčového řádku.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
		0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	8
		1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	6

Nyní určíme, který řádek náleží které bazické proměnné. Toto provádíme hledáním jedniček v daném řádku.

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_5	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	8
1	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	6

Následně upravíme i kriteriální řádek a to tak, že ve sloupcích náležejících jednotkové submatici budou v kriteriálním řádku nuly. V ostatních sloupcích musíme hodnoty vypočítat.

$$
\begin{array}{ll}
(0,1,1)\times(\frac{1}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4})=\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-0=\frac{1}{4} \\
(0,1,1)\times(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2},\frac{3}{4})=\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-0=\frac{1}{4} \\
(0,1,1)\times(2,8,6)=14 & 14-0=14
\end{array}
$$

Takto upravená tabulka vypadá následovně:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_5	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	8
1	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	6
		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	14

V kriteriálním řádku se nyní vyskytují pouze nezáporné hodnoty, proto víme, že jsme dosáhli optima. Z výsledné tabulky tedy vyčteme výsledné hodnoty jednotlivých proměnných, a to dle toho, zda se jedná o bazické, či nebazické proměnné.

$$
\begin{array}{ll}
x_1=6 & x_4=0 \\
x_2=8 & x_5=2 \\
x_3=0 & z=14
\end{array}
$$

Nyní shrneme získaný výpočet do slovní odpovědi.
Optimální je uvařit 6 sladkých a 8 nesladkých nápojů. Budeme tedy mít celkem 14 nápojů. Zbydou pouze 2 kostky cukru, nezbyde nám žádná káva ani žádné kakao.

Příklad 12.13

12.13. Předchozí úlohu LP vyřešte graficky.

Řešení: Pro grafické řešení si připomeňme matematický model úlohy, který jsme vytvořili při řešení předchozího příkladu, a to

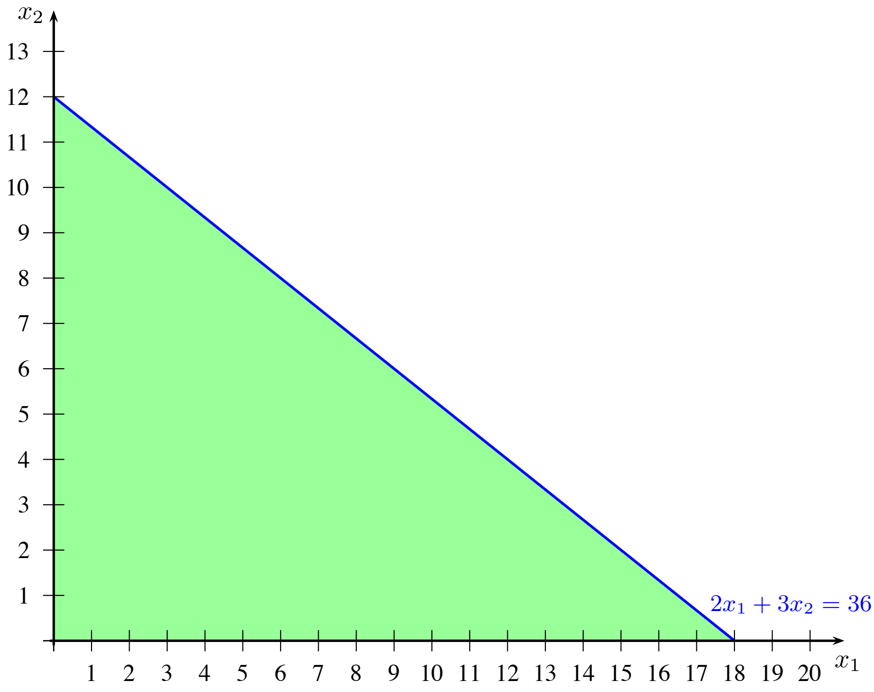
$$
\begin{aligned}
z = \quad & x_1+x_2\ldots \text{ max} \\
2x_1+3x_2 &\le 36 \\
2x_1+1x_2 &\le 20 \\
1x_1+0x_2 &\le 8 \\
x_1 &\ge 0 \\
x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Poslední dvě nerovnice matematického modelu (tj. podmínky nezápornosti) nám říkají, že hledaná řešení se budou nacházet pouze v prvním kvadrantu.

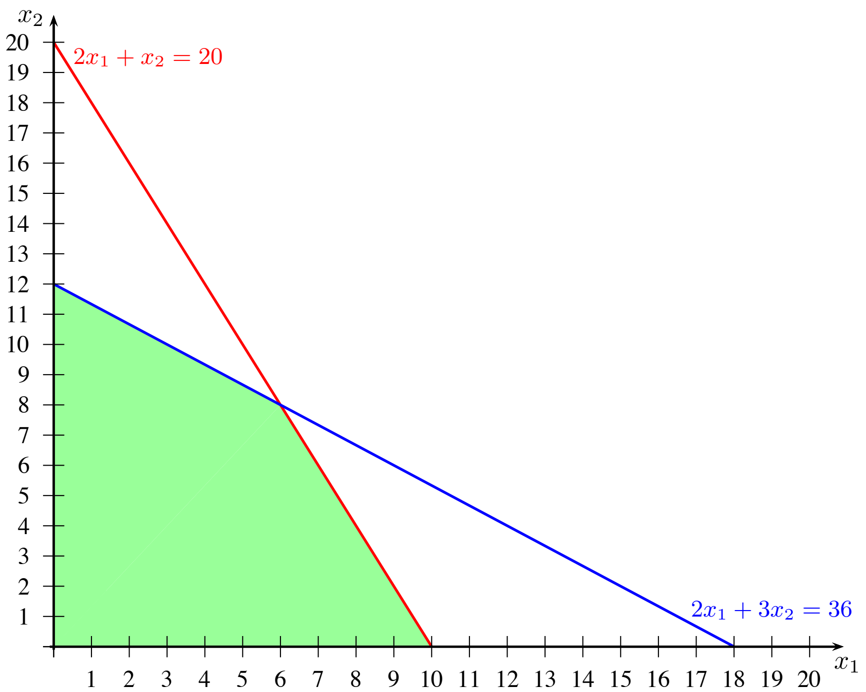
Pro každou z ostatních nerovnic sestrojíme polorovinu, která je grafickým obrazem dané nerovnice. Připomeňme si, že ke konstrukci poloroviny je nutno nejdříve sestrojit přímku náležející k příslušné rovnici. Dále si musíme uvědomit, že každá přímka je dána dvěma body. Souřadnice těchto bodů musí splňovat příslušnou rovnici. Přímka příslušející rovnicí $2x_1 + 3x_2 = 36$ je dána například body $[6, 8]$ a $[9, 6]$. Tato přímka je znázorněna na obrázku 12.18.

Nyní musíme určit, která z polorovin vzniklých rozdělením celé roviny sestrojenou přímkou, náleží k dané nerovnici. To zjistíme například tak, že do nerovnice dosadíme souřadnice počátku, tj. $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$. Vidíme, že nerovnice je splněna, tj. platí $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \le 36$. Proto vyznačíme tu polorovinu od přímky, která obsahuje počátek. Opět znázorněno na obrázku 12.18.

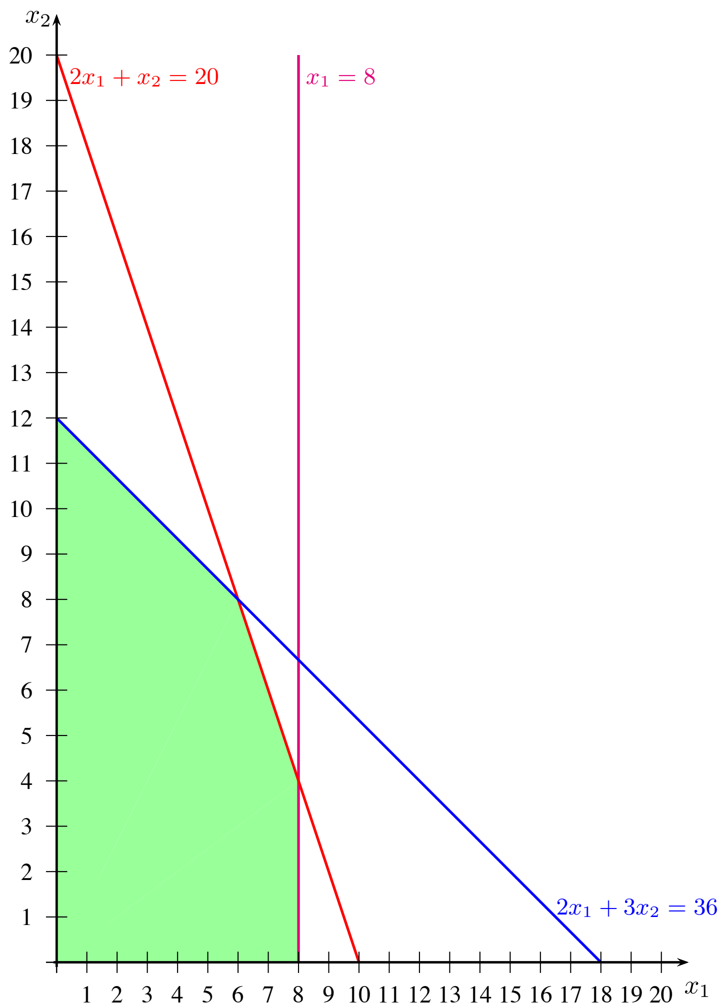
Stejným způsobem zakreslíme i polorovinu náležející druhé nerovnosti. Na Obrázku 12.19 je znázorněn stav po zapracování prvních dvou nerovnic. Nakonec narýsujeme i poslední polorovinu náležející třetí nerovnici, viz Obrázek 12.20.



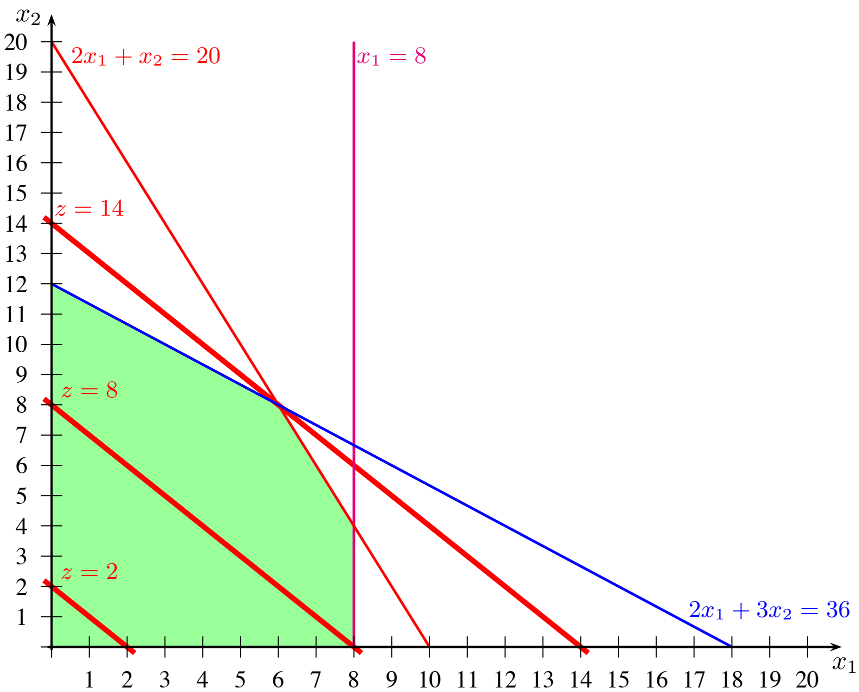
Obrázek 12.18: Polorovina náležející k první nerovnici v rámci Příkladu 12.13



Obrázek 12.19: Poloroviny náležející k první a druhé nerovnici v rámci Příkladu 12.13



Obrázek 12.20: Poloroviny náležející k všem třem nerovnicím v rámci Příkladu 12.13



Obrázek 12.21: Soustava přímek znázorňující účelovou funkci v Příkladu 12.13

Po znázornění všech polorovin náležejících všem nerovnicím musíme ještě narýsovat soustavu přímek představujících účelovou funkci. K tomu zvolíme za z různé hodnoty a pro každou z těchto hodnot sestrojíme jednu přímku.

Po dosazení $z = 2$ do předpisu účelové funkce $z = x_1 + x_2$ dostáváme rovnici $2 = x_1 + x_2$. Této rovnici odpovídá přímka procházející body o souřadnicích $[2, 0]$ a $[0, 2]$.

Obdobně po dosazení $z = 8$ do předpisu účelové funkce $z = x_1 + x_2$ dostáváme rovnici $8 = x_1 + x_2$. Této rovnici odpovídá přímka procházející body o souřadnicích $[8, 0]$ a $[0, 8]$.

Na Obrázku 12.21 můžeme vidět, že budeme-li posunovat vodorovné přímky ve směru vzrůstajícího z až na hranici množiny všech přípustných řešení, dostáváme se k přímce s předpisem $14 = x_1 + x_2$, která prochází krajním bodem množiny všech přípustných řešení o souřadnicích $[6, 8]$. Tento bod je tedy přípustným řešením, pro které nabývá účelová funkce maximální hodnoty, a to hodnoty 14. Optimálním řešením je tedy $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $z = 14$. Vyšlo nám tedy stejné optimální řešení jako při výpočtu pomocí simplexové metody.

12.6 Cvičení

12.6.1. Sestavte matematický model následující úlohy LP. Vyrábíme a prodáváme dva produkty - P1 a P2, přičemž P1 prodáváme za 60 Kč a P2 za 20 Kč. Na výrobu každého produktu P1 potřebujeme dva kusy dalšího produktu - P3 a dvě hodiny strojového času. Při výrobě P2 vzniká produkt P3 jako vedlejší produkt, a to z každého P2 vzniknou tři kusy P3. Na výrobu každého P2 potřebujeme jednu hodinu strojového času. Jak máme naplánovat výrobu, pokud chceme optimalizovat tržby a přitom víme, že ve sledovaném období disponujeme 100 hodinami strojového času a potřebujeme, aby na konci tohoto období zůstalo alespoň 60 kusů P3?

12.6.2. Sestavte matematický model následující úlohy LP. Při výrobě pracujeme se dvěma polotovary - P1 a P2, přičemž výrobní náklady na P1 jsou 60 Kč a na P2 jsou 20 Kč. Na výrobu každého polotovaru P1 potřebujeme dva kusy dalšího polotovaru - P3. Z polotovaru P1 můžeme získat dva kusy polotovaru P4. Z polotovaru P2 vznikají tři kusy polotovaru P3 a jeden kus polotovaru P4. Jak máme naplánovat výrobu, pokud chceme optimalizovat výrobní náklady výrobního procesu a přitom potřebujeme, aby na konci tohoto období zůstalo nejvýše 60 kusů P3 a alespoň 100 kusů P4?

12.6.3. Graficky vyřešte následující úlohu LP.

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 9x_2 \ldots \text{ max}\\
-2x_1 + x_2 &\leq 2\\
2x_1 + 3x_2 &\geq 20\\
4x_1 + 3x_2 &\leq 36\\
x_1 - 4x_2 &\leq 0\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

12.6.4. Graficky vyřešte úlohy LP, jejichž podmínky vlastního omezení a podmínky nezápornosti jsou

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\geq 8\\
x_1 + x_2 &\geq 6\\
-2x_1 + 7x_2 &\geq 14\\
4x_1 - x_2 &\geq 0\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a jejichž účelové funkce jsou

a) $z = 4x_1 + 3x_2 \ldots$ min

b) $z = -3x_1 + x_2 \ldots$ min

12.6.5. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP. Vyrábíme dva druhy krmných směsí, přičemž první směs prodáváme za 500 Kč za balík a druhou za 800 Kč za balík. Do obou směsí přidáváme kukuřici. Do každého balíku první směsi přidáváme 1 kg kukuřice a do druhé 6 kg kukuřice. Výrobní náklady jsou 100 Kč za balík první směsi a 200 Kč za balík druhé směsi. Jak máme naplánovat výrobu, pokud chceme optimalizovat tržby a máme na účtu jen 1 400 Kč a na skladu 3 600 kg kukuřice a víme, že neprodáme více než 1 100 balíků obou směsí dohromady?

12.6.6. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP. Balírny pražírny kávy plánují výrobu dvou směsí kávy Super a Extra. Pro výrobu obou směsí mají k dispozici 2 druhy kávových bobů K1 a K2. Na skladu mají 36 tun kávových bobů K1 a 14 tun kávových bobů K2. Na výrobu jedné várky kávy Super je třeba 1 tuna bobů K1 a 1 tuna bobů K2. Na výrobu jedné várky kávy Extra je třeba 6 tun bobů K1 a 2 tuny bobů K2. Na základě přímých a nepřímých nákladů souvisejících s výrobou a vzhledem k předpokládané ceně obou směsí byl vykalkulován zisk, který činí 80 000 Kč za jednu várku směsi Super a 50 000 Kč za jednu várku směsi Extra. Management firmy chce naplánovat produkci firmy tak, aby optimalizoval její celkový zisk, přičemž ví, že prodá celkem maximálně 11 várek kávy.

12.6.7. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP. Výrobce instantních nápojů má k dispozici 2850 g čokolády a 1380 g sušené smetany. Má možnost vyrábět dva druhy instantních nápojů, a to čistý čokoládový nápoj nebo smetanový kakaový nápoj, kde je čokoláda a smetana v poměru 3:2. Nápoje se prodávají plněné do sáčků po 10 g . Čistého čokoládového nápoje se prodá maximálně 100 sáčků. Zisk z jednoho sáčku čistého čokoládového nápoje je 2 Kč a z jednoho sáčku smetanového kakaového nápoje 3 Kč. Kolik sáčků každého druhu má výrobce vyrobit, aby zisk byl maximální?

12.6.8. Sestrojte matematický model a vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP. Je třeba určit optimální výrobní program, jestliže známe následující údaje. Podnik je schopen vyrábět 2 druhy výrobků (A, B). Je omezen využitelným fondem pracovní doby v rozsahu 1 000 hodin a disponibilním množstvím suroviny ve výši 1 600 kg. Norma spotřeby práce je 2 hodiny na kus výrobku A a 4 hodiny na kus výrobku B. Norma spotřeby suroviny je 4 kg na kus výrobku A a 2 kg na kus výrobku B. Zisk z výrobku A je 20 Kč/kus, z výrobku B 60 Kč/kus.

Výsledky cvičení

12.6.1

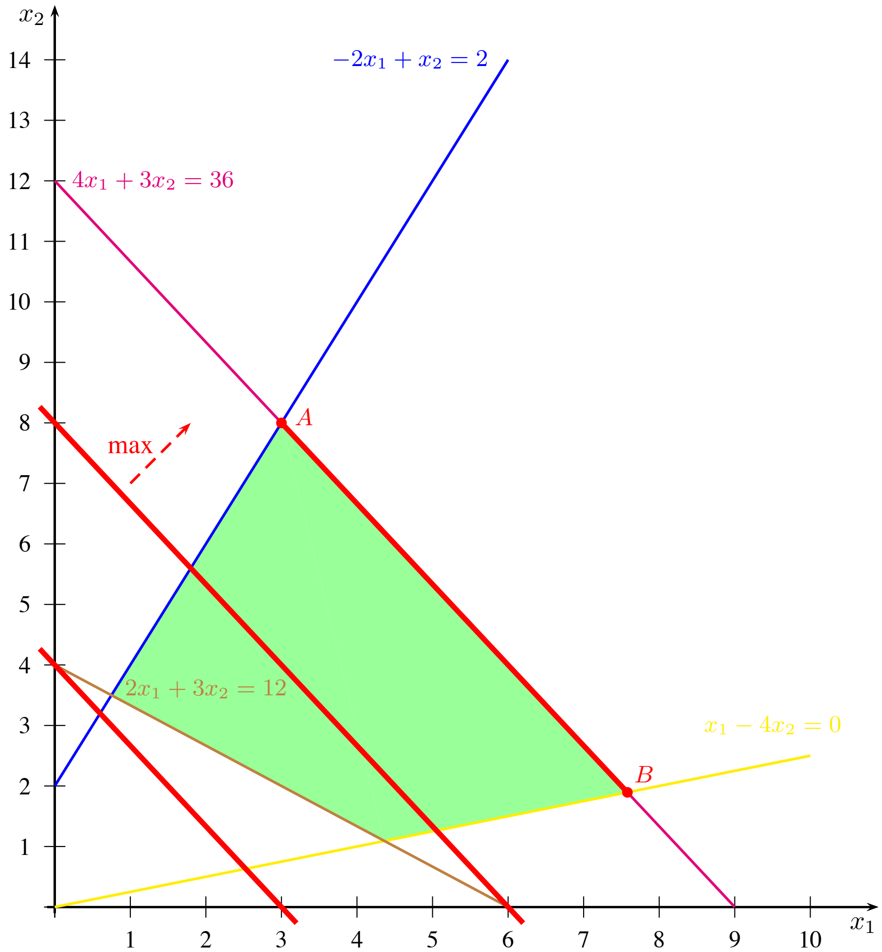
$$\begin{aligned} z = 60x_1 + 20x_2 \ldots \text{max} \\ -2x_1 + 3x_2 &\geq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

12.6.2

$$\begin{aligned} z = 60x_1 + 20x_2 \ldots \text{min} \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + 1x_2 &\geq 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

12.6.3 Grafické řešení je znázorněno na Obrázku 12.22, výslednou množinou optimálních řešení je úsečka AB.

12.6.4



Obrázek 12.22: Grafické řešení úlohy LP v rámci Příkladu 12.6.3

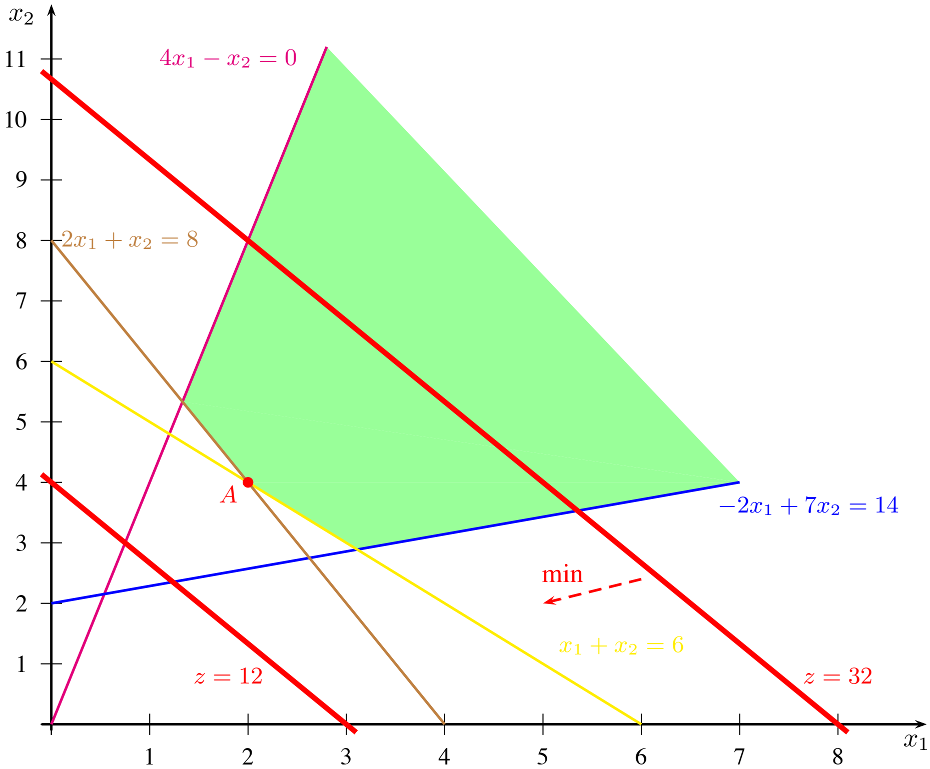
a) Grafické řešení je znázorněno na obrázku 12.23, výsledným jediným optimálním řešením je bod A.

b) Grafické řešení je znázorněno na Obrázku 12.24, je vidět, že množina všech přípustných řešení je neomezená a účelová funkce klesá na této množině neomezeně. To znamená, že žádné optimální řešení neexistuje.

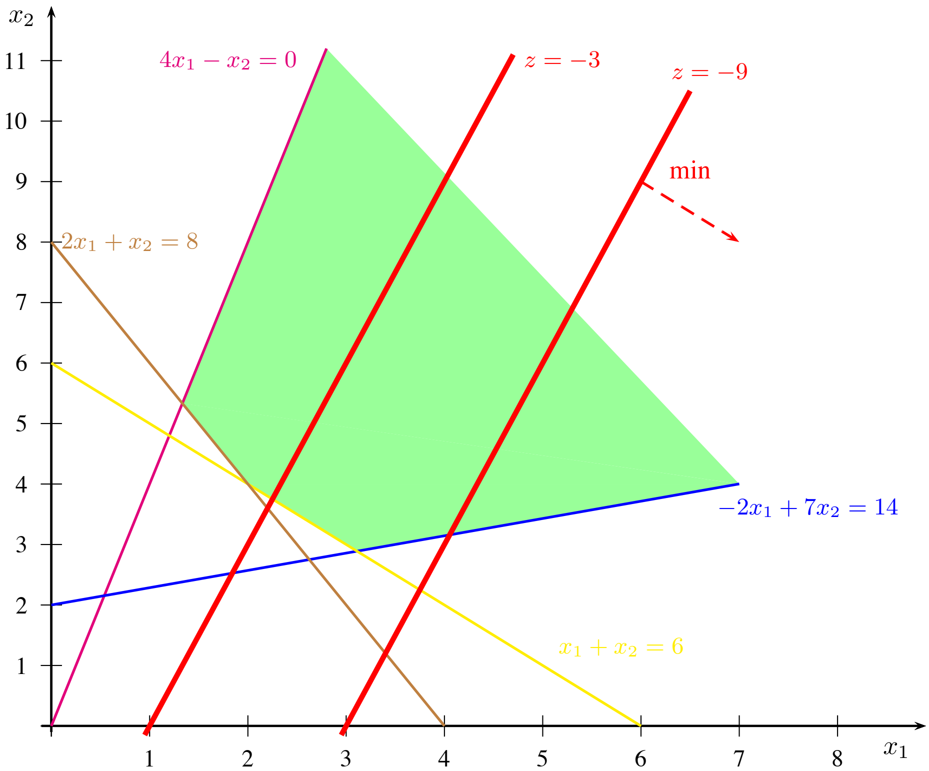
12.6.5

$$
\begin{aligned}
z = 500x_1 + 800x_2 \ldots \max \\
1x_1 + 6x_2 &\leq 3600 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 1100 \\
100x_1 + 200x_2 &\leq 1400 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Vyplatí se nám vyrábět pouze první směs, a to 14 balíků. Druhou směs se nám nevyplatí vyrábět vůbec. Na skladě nám zbyde 3 586 kg kukuřice, do limitu maximálního povoleného množství vyrobených balíků nám zbývá 1 086 balíků. Vyčerpáme veškeré



Obrázek 12.23: Grafické řešení úlohy LP v rámci Příkladu 12.6.4a)



Obrázek 12.24: Grafické řešení úlohy LP v rámci Příkladu 12.6.4b)

finance na účtu. V tomto případě utržíme 7 000 Kč.

12.6.6

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 5x_2 \ldots \text{max} \\ 1x_1 + 6x_2 \le 36 \\ 1x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 11 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Balírně se nejvíce vyplatí vyrobit 11 várek kávy Extra, žádnou várku kávy Super. Celkem tedy utrží 880 000 Kč. Zbyde 25 tun bobů K1 a 3 tuny bobů K2.

12.6.7

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 3x_2 \ldots \text{max} \\ x_1 \le 100 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 2850 \\ 4x_2 \le 1380 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Výrobci se vyplatí vyrobit 78 sáčků čistého čokoládového nápoje a 345 sáčků smetanového kakaového nápoje. Vyrobí se tak o 22 kusů méně, než je maximální povolený limit. Spotřebuje se všechna smetana i všechna čokoláda. Díky tomuto optimálnímu výrobnímu plánu získáme 1 191 Kč.

12.6.8

$$\begin{aligned} z = 20x_1 + 60x_2 \ldots \text{max} \\ 2x_1 + 4x_2 \le 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 1600 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Vyplatí se vyrábět pouze výrobek B, a to v počtu 250 kusů. Vyčerpá se tím celý volný fond pracovní doby, zbyde 1 100 kg sledované suroviny a vyděláme 15 000 Kč.

Kapitola 13

Input-output analýza

V této kapitole ukážeme, jak slouží maticový zápis meziodvětvových vztahů ekonomiky a použití metod lineární algebry k předpovídání dopadu změn v jednotlivých odvětvích hospodářství na ostatní odvětví. Uvidíme použití inverzní matice a řešení soustavy rovnic.

Poznamenejme, že za odvození input-output modelu pro popis ekomiky byla v roce 1973 udělena Nobelova cena za ekonomii, kterou získal americký vědec ruského původu WASSILY LEONTIEF (1905-1999).

13.1 Otevřený Leontiefův systém

Input-output analýza je metoda, pomocí níž se mohou kvantifikovat vztahy mezi jednotlivými odvětvími nebo jednotlivými sektory ekonomiky. V této metodě předpokládáme, že vztahy mezi výrobní spotřebou a výrobou jsou lineární. Každé odvětví vyrábí produkty, které jsou spotřebovávány bud' na trhu, nebo v jiných odvětvích ekonomiky. Dále předpokládáme rovnováhu nabídky a poptávky. Existují dva typy input-output modelů. Otevřený Leontiefův systém a uzavřený Leontifův systém. V uzavřeném Leontiefově systému předpokládáme, že veškerá produkce z jistého odvětví (sektoru) je spotřebována jako meziprodukt v jiných odvětvích (sektorech). V otevřeném Leontiefově systému naproti tomu předpokládáme, že vyrábíme nejen pro mezispotřebu, ale i pro vnější poptávku.

Nejprve se budeme věnovat otevřenému Leontiefovu systému. Problematiku si ukážeme na velmi jednoduchém příkladu.

Motivační úvaha

Předpokládejme, že máme ekonomiku pouze se dvěma sektory. Označme je S_1 a S_2. Každý z těchto sektorů produkuje jiné výrobky. Pro možnost porovnání jsou tyto produkty měřeny v jejich dolarových hodnotách. Jednou jednotkou produktu míníme jednodolarovou hodnotu tohoto produktu. Dále máme kvantifikovány mezisektorové toky.

Například k produkci jedné jednotky (jednodolarové hodnoty) výrobku prvního sektoru je třeba výrobků z prvního sektoru v hodnotě 50 centů a výrobků ze druhého sektoru v hodnotě 30 centů. Na výrobu jedné jednotky výrobků druhého sektoru je třeba výrobků z prvního sektoru v hodnotě 25 centů a výrobků ze druhého sektoru v hodnotě 35 centů.

Navíc předpokládejme, že v příštím období (čtvrtletí, rok atd.) je očekávána vnější poptávka po výrobcích z prvního sektoru v hodnotě 6 000 dolarových jednotek a poptávka po výrobcích z druhého sektoru v hodnotě 10 000 dolarových jednotek.

Rádi bychom dostali odpověd' na otázku: Jaké množství (v dolarech) by měly oba sektory v příštím období vyrobit, aby byla uspokojena jednak vnější poptávka, jednak poptávka po výrobcích v obou sektorech? Vycházíme z rovnosti

$$\text{celková nabídka} = \text{celková poptávka}.$$

Neznámé v našem případě budou objemy výroby (dolarová množství), která se mají vyrobit v jednotlivých sektorech. Celkovou produkci (nabídku) prvního sektoru označme x_1 a celkovou produkci (nabídku) druhého sektoru označme x_2. Pro oba sektory musí platit:

celková nabídka prvního sektoru = celková poptávka po výrobcích prvního sektoru,
celková nabídka druhého sektoru = celková poptávka po výrobcích druhého sektoru.

Pokud pravou stranu obou rovností rozepíšeme, dostaneme

celková nabídka S_1 = poptávka S_1 po výrobcích S_1+poptávka S_2 po výrobcích S_1 +
vnější poptávka po výrobcích sektoru S_1

a

celková nabídka S_2 = poptávka S_1 po výrobcích S_2+poptávka S_2 po výrobcích S_2 +
vnější poptávka po výrobcích sektoru S_2.

Každý sektor pro svou výrobu potřebuje jak výrobky vlastní, tak výrobky druhého sektoru. Jak můžeme vyjádřit poptávku sektoru S_1 po výrobcích sektoru S_1? Víme, že k produkci jedné jednotky (jednodolarové hodnoty) výrobku prvního sektoru je třeba výrobků z prvního sektoru v hodnotě 50 centů. Pokud převedeme vše na dolarové jednotky, můžeme pro celkovou produkci x_1 dolarových jednotek psát odpověď na naši otázku. Poptávku sektoru S_1 po výrobcích sektoru S_1 vyjadřuje vztah $0,5x_1$. Vyjádříme dále poptávku sektoru S_2 po výrobcích sektoru S_1. Ze zadání víme, že na výrobu jedné jednotky výrobků druhého sektoru je zapotřebí výrobků z prvního sektoru v hodnotě 25 centů. Po převedení na dolarové jednotky můžeme pro celkovou produkci x_2 dolarových jednotek celkové produkce sektoru S_2 psát $0,25x_2$. Podobně pro vyjádření poptávky S_1 po výrobcích S_2, dostaneme $0,30x_1$ a pro vyjádření poptávky S_2 po výrobcích S_2, dostaneme $0,35x_2$. Celkově můžeme tyto vztahy pro oba sektory vyjádřit následující soustavou rovnic.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,5x_1 + 0,25x_2 + 6\,000 \\
x_2 &= 0,3x_1 + 0,35x_2 + 10\,000
\end{aligned}
$$

Najít dolarová množství obou sektorů znamená vyřešit tuto soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Pokud označíme $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, vnější poptávku $d = \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$ a matici $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,3 & 0,35 \end{pmatrix}$, můžeme soustavu rovnic přepsat do tvaru

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}.$$

Takto popsanou situaci ekonomiky, kdy jednotlivé sektory ekonomiky vyrábí pro mezispotřebu i vnější poptávku, nazýváme *otevřený Leontiefův systém*. Matici koeficientů mezispotřeby A nazýváme *technologická matice*.

Zamysleme se nyní nad vlastnostmi této matice. Počet řádků této matice je dán počtem sektorů, jejichž výrobky jsou dodávány do mezispotřeby. Počet sloupců technologické matice je dán počtem sektorů, do nichž jsou výrobky z příslušných sektorů dodávány. Technologická matice je vždy čtvercová matice.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \textit{výstup} \\
 & & \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\
vstup & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Nyní se zamysleme nad jednotlivými prvky a_{ij} technologické matice, kde a_{ij} odpovídá množství jednotek ze sektoru S_i potřebné k produkci jedné jednotky sektoru S_j.

Věta 13.1.1 (Vlastnosti technologické matice v otevřeném Leontiefově modelu). *Pro technologickou matici v otevřeném Leontiefově modelu platí*

1. $0 \leq a_{ij} < 1$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$

Každý z těchto prvků matice A musí být nezáporné hodnoty menší než jedna. V opačném případě by výroba byla ztrátová, na výrobu jedné jednotky sektoru S_j by se spotřebovalo zboží v hodnotě větší než jedna jednodolarová jednotka. Druhá vlastnost říká, že pro otevřený Leotiefův systém součet prvků matice A v libovolném sloupci musí být menší než jedna. Při $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} > 1$ by v sektoru S_j byla výroba ztrátová. Neboli, pro výrobu jednodolarové hodnoty výrobku sektoru S_j by bylo zapotřebí výrobků z jiných sektorů v hodnotě vyšší než jedna jednotka.

Otevřený Leontiefův systém je tedy popsán maticovou rovnicí $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$. Tuto soustavu rovnic budeme řešit pomocí inverzní matice následovně.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A\mathbf{x} + \mathbf{d} \\ \mathbf{x} - A\mathbf{x} &= \mathbf{d} \\ (I - A)\mathbf{x} &= \mathbf{d} \\ \mathbf{x} &= (I - A)^{-1}\mathbf{d} \end{aligned}$$

Celkovou produkci na příští období dostaneme tak, že od jednotkové matice odpovídajícího řádu odečteme technologickou matici. K takto vzniklé matici najdeme inverzní matici a touto inverzní maticí zleva vynásobíme matici vnější poptávky. Ukažme výpočet na našem příkladu pro dva sektory S_1 a S_2.

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,3 & 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,3 & 0,65 \end{pmatrix}$$

K této matici nyní musíme najít inverzní matici. Metody na výpočet inverzní matice jsme si v kapitole o maticích a o determinantech matic uvedli dvě. Jedna z metod uvádí, že za matici zapíšeme za čáru jednotkovou matici a provádíme povolené úpravy na řádky tak, aby matice před čarou byla jednotková. Matice za čarou je inverzní matice k původní matici. Druhá metoda pro výpočet inverzní matice je metoda za pomoci adjungované matice. Totiž

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\mathrm{Adj}\, A)^T .$$

Adjungovaná matice $\mathrm{Adj}\, A = (a_{ij}^*)_{i,j=1}^n$ je matice algebraických doplňků a_{ij}^* prvků a_{ij}. Algebraický doplněk a_{ij}^* prvku a_{ij} je číslo $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$, kde matice A_{ij} je matice, která vznikne z matice A vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce. My pro nalezení inverzní matice k matici $I - A$ v našem příkladu zvolme tuto metodu. Nejprve vypočteme determinant matice $I - A$. Protože se jedná o matici řádu dva, příslušný determinant vypočteme pomocí křížového pravidla.

$$\det(I - A) = \begin{vmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,3 & 0,65 \end{vmatrix} = 0,5 \cdot 0,65 - (-0,3) \cdot (-0,25) = 0,25$$

Nyní vypočteme adjungovanou matici.

$$\mathrm{Adj}\,(I - A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}|0,65| & (-1)^{1+2}|-0,3| \\ (-1)^{2+1}|-0,25| & (-1)^{2+2}|0,5| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,3 \\ 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k matici $I - A$ je matice

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,25} \begin{pmatrix} 0,65 & 0,3 \\ 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2,6 & 1 \\ 1,2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dále touto inverzní maticí vynásobíme zleva matici d. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 & 1 \\ 1,2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\,600 \\ 27\,200 \end{pmatrix}.$$

Vypočetli jsme, že pro uspokojení vnější poptávky d_1 i mezispotřeby je nutno v příštím období v sektoru S_1 vyrobit zboží v hodnotě $x_1 = 25\,600$ jednotek. Pro uspokojení vnější poptávky d_2 v sektoru S_2 i mezispotřeby je třeba v příštím období v tomto sektoru množství celkové produkce $x_2 = 27\,200$ dolarových jednotek.

Poznamenejme ještě jeden způsob, jak lze v těchto úlohách vypočítat inverzní matici $(I-A)^{-1}$. Platí vztah

$$(I-A)(I + A + A^2 + A^3 + ... + A^n) = I - A^{n+1}.$$

V našem případě je A technologická matice, pro jejíž prvky platí vztahy $0 \leq a_{ij} < 1$ a $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$. Pak se bude pro $n \to \infty$ matice A^{n+1} blížit nulové matici. (Platí totiž, že součin prvků menších než jedna je prvek menší než jedna.) Pro velká n se pak matice $I - A$ bude jen málo lišit od jednotkové matice I, neboli $I - A^{n+1} \to I$. Označíme-li $(I + A + A^2 + A^3 + ... + A^n) = B$, můžeme pro $n \to \infty$ psát rovnost $(I-A)B = I$. Odtud dostáváme $B = (I-A)^{-1} \cdot I$, respektive $B = (I-A)^{-1}$. Jinými slovy, pro velká n bude součet matic $I + A + A^2 + A^3 + ... + A^n$ matice blízká matici $(I-A)^{-1}$.

V našem řešeném příkladě vezměme například $n = 8$, pak dostáváme

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,3 & 0,35 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0,325 & 0,2125 \\ 0,255 & 0,1975 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0,226 & 0,156 \\ 0,187 & 0,133 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0,160 & 0,111 \\ 0,133 & 0,093 \end{pmatrix}$$
$$A^5 = \begin{pmatrix} 0,113 & 0,079 \\ 0,095 & 0,066 \end{pmatrix} \qquad A^6 = \begin{pmatrix} 0,08 & 0,056 \\ 0,067 & 0,048 \end{pmatrix}$$
$$A^7 = \begin{pmatrix} 0,057 & 0,04 \\ 0,048 & 0,033 \end{pmatrix} \qquad A^8 = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,028 \\ 0,034 & 0,023 \end{pmatrix}$$

Matici $(I-A)^{-1}$ pak můžeme odhadnout součtem $I + A + A^2 + A^3 + ... + A^8$.

$$\begin{aligned}
(I-A)^{-1} &\approx I + A + A^2 + A^3 + ... + A^8 \\
&\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,3 & 0,35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,325 & 0,2125 \\ 0,255 & 0,1975 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0,226 & 0,156 \\ 0,187 & 0,133 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,160 & 0,111 \\ 0,133 & 0,093 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0,113 & 0,079 \\ 0,095 & 0,066 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,08 & 0,056 \\ 0,067 & 0,047 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0,057 & 0,04 \\ 0,048 & 0,033 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,04 & 0,028 \\ 0,034 & 0,023 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 2,501 & 0,9325 \\ 1,118 & 1,9425 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tato matice se ještě liší od inverzní matice $(I-A)^{-1}$ počítané pomocí adjungované matice. Odlišnosti jsou však jen na desetinných místech. Ještě větší shody výsledků bychom docílili zařazením vyšších mocnin do součtu, tedy pro $n > 8$.

Pokračujme v našich úvahách. Předpokládejme, že máme informace pro dané období o technologické matici A, o vnější poptávce d a celkové produkci x. Víme, že platí $\mathbf{x} = (I-A)^{-1}\mathbf{d}$. Dále předpokládejme, že pro další období známe změnu vnější poptávky Δd. Máme za úkol zjistit hodnoty celkové produkce v příštím období v každém sektoru S_1, S_2. Hodnoty celkové produkce v příštím období můžeme označit $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, kde $\Delta\mathbf{x}$ je změna celkové produkce pro příští období. Pak bude platit $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = (I - A)^{-1}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$. Tuto rovnici následně upravíme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} &= (I - A)^{-1}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}) \\
\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} &= (I - A)^{-1}\mathbf{d} + (I - A)^{-1}\Delta\mathbf{d} \\
\underbrace{\mathbf{x} - (I - A)^{-1}\mathbf{d}}_{0} + \Delta\mathbf{x} &= (I - A)^{-1}\Delta\mathbf{d} \\
+ \Delta\mathbf{x} &= (I - A)^{-1}\Delta\mathbf{d} \\
\Delta\mathbf{x} &= (I - A)^{-1}\Delta\mathbf{d}.
\end{aligned}$$

Dostali jsme vztah mezi změnou produkce pro příští období a změnou vnější poptávky pro příští období.

Zamysleme se nad interpretací prvků matice $(I - A)^{-1}$. Označme tyto prvky a^*_{ij}. Prvek a^*_{ij} udává, o kolik jednotek se musí zvýšit celková produkce v sektoru S_i, aby se vnější poptávka v sektoru S_j zvýšila o jednu jednotku. Tyto prvky udávají tedy jistou elasticitu vztahu mezi vnější poptávkou a celkovou produkcí. Připomeňme, že elasticita funkce $f(x)$ je číslo, které udává míru schopnosti závisle proměnné reagovat na změny nezávisle proměnné x. Matice $(I - A)^{-1}$ se nazývá matice koeficientů komplexní spotřeby. Sloupcové součty v matici $(I - A)^{-1}$ udávají, jak velký dopad má zvýšení vnější poptávky jednoho sektoru na produkci všech sektorů v příslušné ekonomice. Sektor s nejvyšší hodnotou sloupcového součtu je odvětvím s největším dopadem změny ve vnější poptávce na celkovou produkci. Řádkové součty v matici $(I - A)^{-1}$ měří sílu jednotlivých sektorů ve vztahu ke svým odběratelským sektorům. Čím větší řádkový součet tím větší dopad bude mít zvýšení cen v tomto sektoru na cenovou hladinu v ekonomice.

Již víme, jak zjistit objem celkové produkce v každém ze sektorů, pokud máme dané prvky technologické matice a hodnoty vnější poptávky v každém ze sektorů. Kde se ale berou prvky technologické matice? Odpověď na tuto otázku se dozvíme v další kapitole.

13.2 Input-output tabulky

K zachycení mezisektorových toků v ekonomice slouží soustava input-output tabulek, která zahrnuje:

1. tabulky dodávek a užití,

2. tabulky spojující tabulky dodávek a užití se sektorovými účty,

3. symetrické input-output tabulky.

My se zmíníme o symetrických input-output tabulkách, a to v jejich velmi zjednodušené podobě. Pro popis našeho matematického problému to však bude plně postačující. Ze symetrických input-output tabulek se čerpají data pro kvantifikaci mezisektorových vazeb mezi jednotlivými sektory v ekonomice. Jedná se o analytický nástroj, který umožňuje zkoumat mezisektorové vazby a měřit dopad vnějších vlivů na ekonomiku.

Jádro symetrické input-output tabulky tvoří čtvercová matice. Tato matice zachycuje odběratelsko-dodavatelské vztahy mezi výrobními sektory. Prvek matice t_{ij} udává dodávku (ve formě dolarového množství) ze sektoru i do sektoru j. Poslední řádek tvoří hodnoty celkové produkce. Uveďme zjednodušenou input-output tabulku pro ekonomiku obecně s n sektory.

		Kam			
Sektory		S_1	S_2	$\dots$	S_n
Odkud	S_1	t_{11}	t_{12}	$\dots$	t_{1n}
	S_2	t_{21}	t_{22}	$\dots$	t_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	S_n	t_{n1}	t_{n2}	$\dots$	t_{nn}
celková produkce		x_1	x_2	$\dots$	x_n

Poslední řádek není součtem předchozích řádků. V naší zjednodušené formě input-output tabulky nejsou obsaženy informace o daních, složkách přidané hodnoty a dovozu (platby za práci a kapitál, čisté nepřímé daně a zisky), ani o vnější poptávce.

Věta 13.2.1 (Vyjádření prvků technologické matice pomocí hodnot input-output tabulky)**.** *Pro prvky a_{ij} technologické matice platí*

$$a_{ij} = \frac{t_{ij}}{x_j},$$

kde t_{ij} a x_j, $i, j = 1, ..., n$ jsou hodnoty input-output tabulky.

Příklad 13.1

13.1. Uvažujme ekomomiku pouze se dvěma sektory, sektorem zpracování ropy a sektorem výroby elektrické energie. Hodnoty mezisektorových toků (v miliónech dolarů) za dané období jsou uloženy v následující input-output tabulce.

		Kam	
Sektory		**ropa**	**el. energie**
Odkud	**ropa**	14 000	5 000
	el. energie	20 000	3 000
celková produkce		80 000	140 000

Určete výši celkové produkce v obou sektorech pro příští období, víte-li, že pro sektor zpracování ropy vzroste o 5 000 miliónů dolarů a v sektoru výroby elektrické energie vnější poptávka poklesne o 500 miliónů dolarů.

Řešení: Z input-output tabulky určíme nejprve technologickou matici.

$$\begin{array}{ll} & \qquad\qquad\qquad \textit{Kam} \\ & \qquad S_1 \qquad\qquad\qquad S_2 \\ \textit{Odkud} \quad \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} = \frac{14\,000}{80\,000} & a_{12} = \frac{5\,000}{140\,000} \\ a_{21} = \frac{20\,000}{80\,000} & a_{22} = \frac{3\,000}{140\,000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,175 & 0,036 \\ 0,25 & 0,021 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Pro určení výše celkové produkce v obou sektorech v příštím období můžeme využít vztahu $\Delta\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\Delta\mathbf{d}$. V našem případě $\Delta\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5\,000 \\ -500 \end{pmatrix}$. Hodnota ve druhém řádku je záporná, protože se jedná o pokles. Dále musíme spočítat matici $I - A$ a k ní pak najít matici inverzní.

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,175 & 0,036 \\ 0,25 & 0,021 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,825 & -0,036 \\ -0,25 & 0,979 \end{pmatrix}$$

Inverzní matici k této matici budeme hledat pomocí adjungované matice.

$$(\mathrm{Adj}\,(I - A))^T = \begin{pmatrix} 0,979 & 0,036 \\ 0,25 & 0,825 \end{pmatrix}$$

Zbývá ještě spočítat determinant matice $I - A$. Ten spočítáme křížovým pravidlem.

$$\det\,(I - A) = 0,825 \cdot 0,979 - (-0,25) \cdot (-0,036) = 0,799$$

Inverzní matice pak bude

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0,799}\begin{pmatrix} 0,979 & 0,036 \\ 0,25 & 0,825 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,045 \\ 0,313 & 1,033 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do vztahu $\Delta\mathbf{x} = (I-A)^{-1}\Delta\mathbf{d}$, vypočteme změnu celkové produkce v příštím sledovaném období.

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,045 \\ 0,313 & 1,033 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\,000 \\ -500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,127,5 \\ 1\,048,5 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že v důsledku změn vnější poptávky v příštím sledovaném období musí celková produkce v sektoru zpracování ropy vzrůst o $6\,127,5$ miliónů dolarů a v sektoru výroby elektrické energie vzrůst o $1\,048,5$ miliónů dolarů.

Výše celkové produkce v příštím období v sektoru zpracování ropy bude v hodnotě $80\,000 + 6\,127,5 = 86\,127,5$ miliónů dolarů a v sektoru výroby elektrické energie $140\,000 + 1\,048,5 = 141\,048,5$ miliónů dolarů.

Ukažme si ještě jeden podobný příklad, tentokrát se třísektorovou ekonomikou. Ukážeme na tomto příkladu dva způsoby řešení.

Příklad 13.2

13.2. Uvažujme ekomomiku se třemi sektory, S_1 sektorem zemědělství, S_2 sektorem stavebnictví a S_3 sektorem dřevozpracujícího průmyslu. Hodnoty mezisektorových toků (v jednotkách miliónů dolarů) za dané období jsou uloženy v následující input-output tabulce.

		Kam		
Sektory		**zemědělství**	**stavebnictví**	**zpracování dřeva**
Odkud	**zemědělství**	5 000	2 000	3 000
	stavebnictví	10 000	8 000	12 000
	zpracování dřeva	20 000	25 000	10 000
celková produkce		180 000	200 000	160 000

Víme, že pro sektor zemědělství vzroste vnější poptávka o 7 000 miliónů dolarů, v sektoru stavebnictví vzroste vnější poptávka o 10 000 miliónů dolarů. V sektoru zpracování dřeva naopak poklesne vnější poptávka o 15 000 miliónů dolarů. Určete úroveň celkové produkce ve všech sektorech pro příští období.

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladu nejprve vyjádříme technologickou matici.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{5\,000}{180\,000} & \frac{2\,000}{200\,000} & \frac{3\,000}{160\,000} \\ \frac{10\,000}{180\,000} & \frac{8\,000}{200\,000} & \frac{12\,000}{160\,000} \\ \frac{20\,000}{180\,000} & \frac{25\,000}{200\,000} & \frac{10\,000}{160\,000} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0,028 & 0,01 & 0,019 \\ 0,056 & 0,04 & 0,075 \\ 0,111 & 0,125 & 0,063 \end{pmatrix} = A$$

Matice $I - A$ pak bude následující

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,028 & 0,01 & 0,019 \\ 0,056 & 0,04 & 0,075 \\ 0,111 & 0,125 & 0,063 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,972 & -0,01 & -0,019 \\ -0,056 & 0,96 & -0,075 \\ -0,111 & -0,125 & 0,937 \end{pmatrix}.$$

K této matici musíme nalézt inverzní matici. K tomu využijeme opět adjungovanou matici.

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0,96 & -0,075 \\ -0,125 & 0,937 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0,056 & -0,075 \\ -0,111 & 0,937 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0,056 & 0,96 \\ -0,111 & -0,125 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0,01 & -0,019 \\ -0,125 & 0,937 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,972 & -0,019 \\ -0,111 & 0,937 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,972 & -0,01 \\ -0,111 & -0,125 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0,01 & -0,019 \\ 0,96 & -0,075 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,972 & -0,019 \\ -0,056 & -0,075 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,972 & -0,01 \\ -0,056 & 0,96 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}\,(I - A) = \begin{pmatrix} 0,8901 & 0,0607 & 0,1136 \\ 0,0117 & 0,9087 & 0,1226 \\ 0,019 & 0,0740 & 0,9326 \end{pmatrix}$$

Každý prvek adjungované matice $\mathrm{Adj}\,(I - A)$ je determinant řádu dva a ten jsme vypočítali křížovým pravidlem. Ještě zbývá spočítat determinant matice $I - A$. Protože matice $I - A$ je matice řádu 3, můžeme její determinant spočítat Sarrusovým pravidlem.

$$\begin{aligned} \det(I - A) = {} & 0,972 \cdot 0,96 \cdot 0,937 + (-0,056) \cdot (-0,125) \cdot (-0,019) \\ & + (-0,111) \cdot (-0,01) \cdot (-0,075) - (-0,111) \cdot 0,96 \cdot (-0,019) \\ & - 0,972 \cdot (-0,125) \cdot (-0,075) - (-0,056) \cdot (-0,01) \cdot 0,937 \\ = {} & 0,8625 \end{aligned}$$

Nyní už můžeme psát inverzní matici k matici $I - A$.

$$\begin{aligned} (I - A)^{-1} &= \frac{1}{0,8625} \begin{pmatrix} 0,8901 & 0,0607 & 0,1136 \\ 0,0117 & 0,9087 & 0,1226 \\ 0,019 & 0,0740 & 0,9326 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1,032 & 0,0137 & 0,0220 \\ 0,0705 & 1,0536 & 0,0858 \\ 0,1317 & 0,1421 & 1,0813 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Změna vnější poptávky v jednotlivých sektorech je vyjádřena maticí

$$\Delta\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 7\,000 \\ 10\,000 \\ -15\,000 \end{pmatrix}.$$

Pak změnu celkové produkce dostaneme z rovnice

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &= (I - A)^{-1} \Delta\mathbf{d} \\ &= \begin{pmatrix} 1,032 & 0,0137 & 0,0220 \\ 0,0705 & 1,0536 & 0,0858 \\ 0,1317 & 0,1421 & 1,0813 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7\,000 \\ 10\,000 \\ -15\,000 \end{pmatrix} \\ \Delta\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 7\,031\;9\,743 \\ -13\,876 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Celkovou produkci ve všech třech sektorech v příštím období vypočteme jako součet současné celkové produkce a vypočtené změny produkce.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 180\,000 \\ 200\,000 \\ 160\,000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\,031 \\ 9\,743 \\ -13\,876 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 187\,031 \\ 209\,743 \\ 166\,124 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že úroveň produkce v příštím období v sektoru zemědělství bude dosahovat $167\,031$ dolarových jednotek, v sektoru stavebnictví bude $209\,743$ dolarových jednotek a v sektoru zpracování dřeva klesne na $166\,124$ dolarových jednotek.

Ukažme ještě jiný způsob řešení této úlohy. Ze vstupních informací můžeme vypočítat současné hodnoty vnější poptávky v jednotlivých sektorech. Dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= (I-A)\mathbf{x}\\ &= \begin{pmatrix} 0,972 & -0,01 & -0,019\\ -0,056 & 0,96 & -0,075\\ -0,111 & -0,125 & 0,937\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}180\,000\\200\,000\\160\,000\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}150\,100\\169\,540\\125\,900\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nyní vypočteme vnější poptávku v příštím období.

$$\begin{pmatrix}150\,100\\169\,540\\125\,900\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\,000\\10\,000\\-15\,000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}157\,100\\179\,540\\110\,900\end{pmatrix}$$

Celkovou produkci v příštím období vypočteme ze vztahu $\mathbf{x} = (I-A)^{-1}\mathbf{d}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1,032 & 0,0137 & 0,0220\\ 0,0705 & 1,0536 & 0,0858\\ 0,1317 & 0,1421 & 1,0813\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}157\,100\\179\,540\\110\,900\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}167\,030\\209\,740\\166\,119\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Drobná odlišnost výsledku s výsledkem předchozího postupu je způsobena zaokrouhlovací chybou.

13.3 Uzavřený Leontiefův model

Uzavřený Leontiefův model popisuje ekonomiku, která je rozdělena do sektorů a každý z těchto sektorů je dodavatelem i spotřebitelem. Mezi těmito sektory existují mezisektorové vztahy (vnitřní poptávka) a nic se nevyrábí pro vnější poptávku. Z ekonomiky nejsou žádné výstupy. Model opět vychází z předpokladu, že celková nabídka je rovna celkové poptávce. Mezisektorové vztahy jsou zachyceny v technologické matici. Technologickou matici označíme opět A.

Věta 13.3.1 (Vlastnosti technologické matice v uzavřeném Leontiefově modelu)**.** *Pro technologickou matici v uzavřeném Leontiefově modelu platí*

1. $0 \leq a_{ij} < 1$,

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Každý prvek technologické matice musí být nezáporný a menší než jedna, aby výroba nebyla ztrátová. Druhá vlastnost vyjadřuje uzavřenost systému. Vše, co je sektory ekonomiky vyrobeno, je těmito sektory i spotřebováno. Neexistuje vnější poptávka.

Pokud označíme produkční vektor $\mathbf{x}$, model je vyjádřen rovnicí $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Tuto rovnici odečtením $A\mathbf{x}$ a vytknutím $\mathbf{x}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - A\mathbf{x} &= \mathbf{o}\\ (I-A)\mathbf{x} &= \mathbf{o},\end{aligned}$$

kde $\mathbf{o}$ označuje nulový vektor. Uzavřený Leontiefův model je popsán homogenní soustavou rovnic. Víme, že homogenní soustava lineárních rovnic má jediné, a to triviální řešení v případě regulární matice soustavy. V případě, že je matice soustavy singulární, má soustava lineárních rovnic s touto maticí nekonečně mnoho řešení. V tomto modelu je matice $I - A$ právě díky vlastnostem technologické matice singulární. Součet prvků každého jejího sloupce je totiž nula, neboli jeden řádek je roven mínus jednanásobku součtu ostatních řádků. Jeden řádek je tedy lineární kombinací ostatních řádků.

V uzavřeném Leontiefově modelu existuje tedy nekonečně mnoho řešení. Toto řešení můžeme vyjádřit pomocí reálného parametru. K vyřešení této soustavy rovnic nemůžeme použít inverzní matici jako v případě otevřeného Leontiefova modelu. Řešení nalezneme pomocí Gaussovy metody. Ukažme si uzavřený Leontiefův model na příkladu.

Příklad 13.3

13.3. Předpokládejme stát s třísektorovou ekonomikou, sektorem zemědělství, sektorem průmyslu a sektorem služeb. Bylo zjištěno, že na produkci jedné dolarové jednotky v sektoru zemědělství je třeba výrobků ze sektoru zemědělství v hodnotě 30 centů, výrobků ze sektoru průmyslu v hodnotě 45 centů a výrobků ze sektoru služeb v hodnotě 25 centů. Sektor průmyslu potřebuje svou produkci v hodnotě 45 centů, produkci sektoru zemědělství v hodnotě 20 centů a produkci sektoru služeb v hodnotě 35 centů na produkci svých výrobků v hodnotě jednoho dolaru. Na produkci jednodolarové hodnoty ze sektoru služeb je třeba 30 centů ze sektoru zemědělství, 40 centů ze sektoru průmyslu a výrobků v hodnotě 30 centů ze sektoru služeb. Určete celkovou produkci v každém ze tří sektorů pro příští období.

Řešení: Nejprve musíme sestavit technologickou matici. Vycházíme opět z rovnosti, že celková nabídka je rovna celkové poptávce. Označíme si celkovou produkci v sektoru zemědělství x_1, celkovou produkci v sektoru průmyslu x_2 a celkovou produkci v sektoru služeb x_3. Celková nabídka sektoru zemědělství je rovna poptávce po výrobcích tohoto sektoru ve všech třech sektorech. Po převodu na dolarové jednotky poptávka ze sektoru zemědělství je $0,3x_1$ dolarových jednotek, poptávka ze sektoru průmyslu je $0,2x_2$ dolarových jednotek a poptávka ze sektoru služeb je $0,3x_3$ dolarových jednotek. Stejně tak celková nabídka sektoru průmyslu je rovna poptávce po výrobcích tohoto sektoru v sektoru zemědělství $0,45x_1$, v sektoru průmyslu $0,45x_2$ a v sektoru služeb $0,4x_3$. Stejnou úvahou dostaneme, že celková nabídka sektoru služeb musí pokrývat poptávku ze sektoru zemědělství $0,25x_1$, ze sektoru průmyslu $0,35x_2$ a ze sektoru služeb $0,3x_3$. Celou situaci můžeme popsat následující soustavou rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 \\ x_2 &= 0,45x_1 + 0,45x_2 + 0,4x_3 \\ x_3 &= 0,25x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme technologickou matici.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,45 & 0,45 & 0,4 \\ 0,25 & 0,35 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Technologická matice popisuje uzavřený Leontiefův systém. Sloupcové součty jsou rovny jedné. Pro vyřešení našeho problému vypočteme dále matici $I - A$.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,45 & 0,55 & -0,4 \\ -0,25 & -0,35 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Nyní musíme vyřešit homogenní soustavu rovnic $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ Gaussovou eliminační metodou. Matici soustavy $I - A$ budeme převádět na horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,45 & 0,55 & -0,4 \\ -0,25 & -0,35 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 0,45 \quad \cdot 0,25 \\ | \cdot 0,7 \ + \\ | \cdot 0,7 \ + \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ 0 & 0,295 & -0,415 \\ 0 & -0,295 & 0,415 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ 0 & 0,295 & -0,415 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentní soustava rovnic má následující tvar

$$\begin{aligned} 0,7x_1 - 0,2x_2 - 0,3x_3 &= 0 \\ 0,295x_2 - 0,415x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jednu ze složek řešení zvolíme jako libovolný reálný parametr. Například položíme $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Pak z druhé rovnice dostaneme $x_2 = \frac{0,415}{0,295}t \doteq 1,41t$. Dosadíme-li tento vztah do první rovnice, dostáváme vyjádření pro x_1 v závislosti na pamametru t. Máme $x_1 = \frac{0,2\cdot 1,41t+0,3t}{0,7} \doteq 0,83t$. Všech nekonečně mnoho řešení lze zapsat pomocí parametru do vektoru $(0,83t; 1,41t; t)$.

Měli jsme určit celkovou produkci v každém ze tří sektorů pro příští období. Naše řešení máme ve tvaru, ve kterém třetí složku volíme libovolně a další dvě složky máme vyjádřeny v závislosti na třetí složce. Jestliže v našem případě zvolíme celkovou produkci pro příští období v sektoru služeb na 100 000 dolarů, pak celková produkce pro příští období v sektoru průmyslu bude 1 410 000 dolarů a v sektoru zemědělství bude celková produkce ve výši 83 000 dolarů.

13.4 Cvičení

13.4.1. Rozhodněte, zda daná matice může být technologická matice, a pokud ano, zda se jedná o technologickou matici otevřeného nebo uzavřeného Leontiefova modelu.

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,26 & 0,42 \\ 0,33 & 0,45 & 0,15 \\ 0,18 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

13.4.2. Rozhodněte, zda daná matice může být technologická matice, a pokud ano, zda se jedná o technologickou matici otevřeného nebo uzavřeného Leontiefova modelu.

$$\begin{pmatrix} 0,15 & 0,2 & 0,22 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,15 & 0,32 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

13.4.3. Následující matice je technologická matice třísektorové ekonomiky se sektory: zpracování dřeva S_1, papírenského průmyslu S_2 a stavebnictví S_3.

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,35 & 0,15 & 0 \\ 0,3 & 0,12 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Interpretujte prvky a_{12} a a_{23}.

13.4.4. Následující input-output tabulka třísektorové ekonomiky se sektory: zpracování dřeva S_1, papírenského průmyslu S_2 a stavebnictví S_3.

	zpracování dřeva	papírenský průmysl	stavebnictví
zpracování dřeva	20 000	50 000	50 000
papírenský průmysl	10 000	20 000	10 000
stavebnictví	32 000	15 000	50 000
celková produkce	200 000	100 000	250 000

Určete technologickou matici, vypočítejte $(I-A)^{-1}$ a interpretujte její prvek ve druhém řádku a třetím sloupci.

13.4.5. Ekonomika malého ostrovního státu je založena na dvou sektorech, zemědělství a turistickém ruchu. Na produkci jednodolarové hodnoty sektoru zemědělství je třeba produktu zemědělství v hodnotě 20 centů a produktu turistického ruchu v hodnotě 15 centů. Na produkci jednodolarové hodnoty sektoru turistického ruchu je třeba produktu zemědělství v hodnotě 40 centů a produktu turistického v hodnotě 30 centů. Nalezněte hodnotu celkové produkce každého sektoru v příštím roce, pokud předpokládáme, že vnější poptávka po produktech sektoru zemědělství bude v hodnotě 60 miliónů dolarů a vnější poptávka po produktech sektoru turistického ruchu bude v hodnotě 80 miliónů dolarů.

13.4.6. Ekonomika malého státu je založena na dvou sektorech, zemědělství a ropném průmyslu. Na produkci jednodolarové hodnoty sektoru zemědělství je třeba produktu zemědělství v hodnotě 40 centů a produktu ropného průmyslu v hodnotě 35 centů. Na produkci jednodolarové hodnoty sektoru ropného průmyslu je třeba produktu zemědělství v hodnotě 20 centů a produktu ropného průmyslu v hodnotě 5 centů. Nalezněte hodnotu celkové produkce každého sektoru v příštím roce, pokud předpokládáme, že vnější poptávka po produktech sektoru zemědělství bude v hodnotě 40 miliónů dolarů a vnější poptávka po produktech sektoru ropného průmyslu bude v hodnotě 250 miliónů dolarů.

13.4.7. Dva sektory ekonomiky jistého státu jsou audio, video a komunikační vybavení (AVKV) a elektronické součástky a doplňky (ESD). Input-output tabulka zahrnující tyto dva sektory je následující (vše je uvedeno v miliónech dolarů).

	AVKV	ESD
AVKV	6 000	500
ESD	24 000	30 000
celková produkce	90 000	140 000

Určete produkční úroveň těchto dvou sektorů, jestliže vnější poptávka v prvním sektoru se očekává 80 000 miliónů dolarů a ve druhém sektoru 90 000 miliónů dolarů.

13.4.8. Dva sektory ekonomiky jistého státu jsou (1) důlní průmysl a (2) stavebnictví. Input-output tabulka zahrnující tyto dva sektory je následující (vše je uvedeno v miliónech dolarů).

	důlní průmysl	stavebnictví
důlní průmysl	10 000	0
stavebnictví	40 000	15 000
celková produkce	120 000	150 000

Určete produkční úroveň těchto dvou sektorů, jestliže vnější poptávka v prvním sektoru se očekává 80 000 miliónů dolarů a ve druhém sektoru 90 000 miliónů dolarů.

13.4.9. Dva sektory ekonomiky jistého státu jsou (1) hutní průmysl a (2) strojírenský průmysl. Následující input-output tabulka zahrnující tyto dva sektory je následující (vše je uvedeno v miliónech dolarů).

	hutní průmysl	strojírenský průmysl
hutní průmysl	20 000	50 000
strojírenský průmysl	12 000	15 000
celková produkce	200 000	100 000

Určete produkční úroveň těchto dvou sektorů, jestliže se očekává, že vnější poptávka v prvním sektoru klesne o 10 000 miliónů dolarů a ve druhém sektoru stoupne o 80 000 miliónů dolarů.

13.4.10. Dva sektory ekonomiky jistého státu jsou (1) chemický průmysl a (2) papírenský průmysl. Input-output tabulka zahrnující tyto dva sektory je následující (vše je uvedeno v miliónech dolarů).

	chemický průmysl	papírenský průmysl
chemický průmysl	20 000	50 000
papírenský průmysl	2 000	5 000
celková produkce	200 000	110 000

Určete produkční úroveň těchto dvou sektorů, jestliže se očekává, že vnější poptávka v prvním sektoru klesne o 20 000 miliónů dolarů a ve druhém sektoru stoupne o 70 000 miliónů dolarů.

13.4.11. Třísektorová ekonomika se sektory S_1 stavebnictví, S_2 dopravy a S_3 je sektor těžebního průmyslu je popsána technologickou maticí

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Určete produkční úroveň těchto tří sektorů.

Výsledky cvičení

13.4.1 Jedná se o technologickou matici třísektorové ekonomiky, protože všechny prvky čtvercové matice řádu jsou nezáporné a menší než jedna. Všechny sloupcové součty jsou menší než jedna, proto se jedná o technologickou matici otevřeného Leontiefova modelu.

13.4.2 Nejedná se o technologickou matici, matice není čtvercová.

13.4.3 Prvek a_{12} má hodnotu $0,1$. Tato hodnota značí, že na výrobu jedné dolarové jednotky produktů sektoru papírenského průmyslu je zapotřebí výrobků sektoru zpracování dřeva v hodnotě $0,1$ dolarové jednotky. Prvek $a_{23} = 0$ zachycuje situaci, která znamená, že na výrobu jedné dolarové jednotky produktů sektoru stavebnictví není zapotřebí výrobků sektoru papírenského průmyslu.

13.4.4 Technologická matice $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,05 & 0,2 & 0,04 \\ 0,16 & 0,15 & 0,2 \end{pmatrix}$. Matice je řazena následovně. První řádek a první sloupec: sektor zpracování dřeva, druhý řádek a druhý sloupec: sektor papírenského průmyslu, třetí řádek a třetí sloupec: sektor stavebnictví. Pak inverzní matice $(I - A)^{-1}$ je $\begin{pmatrix} 1,22 & 0,83 & 0,35 \\ 0,09 & 1,32 & 0,09 \\ 0,26 & 0,41 & 1,34 \end{pmatrix}$. Prvek ve druhém řádku a třetím sloupci má hodnotu $0,09$. Pokud se vnější poptávka v sektoru stavebnictví zvedne o jednu jednotku, musí se počet produkovaných jednotek v sektoru papírenského průmyslu zvednout o $0,09$ dolarových jednotek.

13.4.5 Technologická matice $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,15 & 0,3 \end{pmatrix}$ (první řádek a první sloupec: sektor zemědělství, druhý řádek a druhý sloupec: sektor turistického ruchu). Pak inverzní matice $(I - A)^{-1}$ je $\begin{pmatrix} 1,4 & 0,8 \\ 0,3 & 1,6 \end{pmatrix}$ a očekávaná celková produkce v příštím roce $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 148 \\ 146 \end{pmatrix}$, v sektoru zemědělství 148 miliónů dolarů, v sektoru turistického ruchu 146 miliónů dolarů.

13.4.6 Technologická matice $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,35 & 0,05 \end{pmatrix}$ (první řádek a první sloupec: sektor zemědělství, druhý řádek a druhý sloupec: sektor ropného průmyslu). Pak inverzní matice $(I - A)^{-1}$ je $\begin{pmatrix} 1,9 & 0,4 \\ 0,7 & 1,2 \end{pmatrix}$ a očekávaná celková produkce v příštím roce $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 176 \\ 328 \end{pmatrix}$, v sektoru zemědělství 176 miliónů dolarů, v sektoru ropného průmyslu 328 miliónů dolarů.

13.4.7 Technologická matice $A = \begin{pmatrix} 0,0667 & 0,2857 \\ 0,2667 & 0,1071 \end{pmatrix}$ (první řádek a první sloupec: sektor AVKV, druhý řádek a druhý sloupec: sektor ESD). Pak inverzní matice $(I - A)^{-1}$ je $\begin{pmatrix} 1,1793 & 0,3773 \\ 0,3522 & 1,2327 \end{pmatrix}$ a očekávaná celková produkce v příštím roce

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 128\,300 \\ 139\,120 \end{pmatrix}$, v sektoru AVKV 128 300 miliónů dolarů, v sektoru ESD 139 120 miliónů dolarů.

13.4.8 Technologická matice $A = \begin{pmatrix} 0,0833 & 0 \\ 0,3333 & 0,1 \end{pmatrix}$ (první řádek a první sloupec: sektor důlního průmyslu, druhý řádek a druhý sloupec: sektor stavebnictví). Pak inverzní matice $(I - A)^{-1}$ je $\begin{pmatrix} 1,0909 & 0 \\ 0,4040 & 1,1111 \end{pmatrix}$ a očekávaná celková produkce v příštím roce $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 130\,900 \\ 215\,140 \end{pmatrix}$, v sektoru důlního průmyslu 130 900 miliónů dolarů, v sektoru stavebnictví 215 140 miliónů dolarů.

13.4.9 Technologická matice $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,06 & 0,15 \end{pmatrix}$ (první řádek a první sloupec: sektor hutního průmyslu, druhý řádek a druhý sloupec: sektor strojírenství). Pak inverzní matice $(I - A)^{-1}$ je $\begin{pmatrix} 1,1565 & 0,6803 \\ 0,0816 & 1,2245 \end{pmatrix}$ a očekávaná změna celkové produkce v příštím roce $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 42\,857 \\ 97\,143 \end{pmatrix}$, očekávaná celková produkce v příštím roce je $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 242\,857 \\ 197\,143 \end{pmatrix}$, v sektoru hutního průmyslu 242 857 miliónů dolarů, v sektoru strojírenství 197 143 miliónů dolarů.

13.4.10 Technologická matice $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,45 \\ 0,01 & 0,045 \end{pmatrix}$ (první řádek a první sloupec: sektor chemického průmyslu, druhý řádek a druhý sloupec: sektor papírenského průmyslu). Pak inverzní matice $(I - A)^{-1}$ je $\begin{pmatrix} 1,1170 & 0,5263 \\ 0,0117 & 1,0526 \end{pmatrix}$ a očekávaná změna celkové produkce v příštím roce $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 14\,503 \\ 73\,450 \end{pmatrix}$, očekávaná celková produkce v příštím roce je $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 214\,503 \\ 183\,450 \end{pmatrix}$, v sektoru chemického průmyslu 214 503 miliónů dolarů, v sektoru papírenského průmyslu 183 450 miliónů dolarů.

13.4.11 Řešíme homogenní soustavu rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 0,6 & -0,5 & -0,1 \\ -0,3 & 0,8 & -0,4 \\ -0,3 & -0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$. Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, $(\frac{28}{33}t, \frac{9}{11}t, t)$, tedy pokud produkční úroveň ve třetím sektoru bude 33 000 dolarových jednotek, pak ve druhém sektoru bude musí produkce být 27 000 dolarových jednotek a v prvním sektoru 28 000 dolarových jednotek.

Kapitola 14

Teorie her

V této kapitole si ukážeme, jak mohou matice posloužit k přehlednému zápisu výplat v konfliktních situacích. Teorie her jako vědní odvětví matematiky není tak stará, nicméně úvahami o tom, jak postupovat v nějaké stolní hře, abych vyhrál, se lidstvo zabývá od nepaměti. Již v kapitole o maticích jsme se zmiňovali o schopnosti matematiky odhlížet od konkrétna a popsat problém obecněji. Také zde uvidíme, že hrou již nebudeme myslet jen například stolní hry, ale hru budeme chápat obecněji. Bude to pro nás jistá konfliktní situace, ve které bude určitý počet účastníků, kteří mají zájem vyřešit konflinktní situaci tak, aby z ní vyšli co nejvíce úspěšně.

V takové situaci každý účastník nemůže myslet „jen na sebe" a podle toho se rozhodovat. Každý musí brát v úvahu i to, jak se mohou zachovat ostatní účastníci konflinktu, protože jejich chování může ovlivňovat výši zisku daného účastníka. Jak se rozhodnout v konfliktní situaci nám může poradit teorie her.

Před studiem této kapitoly doporučujeme čtenářům seznámit se nejprve s pojmy matice a funkce více proměnných.

Motivační úvaha I.

Uvažujme jednoduchou hru dvou hráčů. Každý z hráčů, Petr a Pavel, má v ruce dvě karty. Petr má křížovou osmičku a srdcovou trojku, Pavel má pikovou osmičku a srdcovou desítku. Na povel každý ukáže jednu ze svých karet. Hraje se o žetony. V případě shody barev, platí Petr Pavlovi tolik žetonů, kolik je rozdíl v hodnotě karet. V případě shody hodnoty karet platí Pavel Petrovi hodnotu karet. V případě rozdílnosti hodnot karet i barev neplatí nikdo nikomu kromě situace, kdy má některý hráč zároveň vyšší kartu i barvu. V takovém případě dostává od druhého hráče prémii jeden žeton (nejnižší barva jsou kříže, vyšší barva jsou srdce a nejvyšší barva jsou piky.)

Předpokládejme, že oba hráči vědí, s jakými kartami se hraje, tzn. každý hráč zná karty nejen své, ale i protihráče. Otázkou je, jakou kartu má každý z hráčů ukázat? Samozřejmě, každý chce uhrát co nejvíce žetonů. Kdyby se Petr rozhodoval jen podle sebe, ukázal by křížovou osmičku, protože i protihráč má osmičku a při shodě hodnot karet by Petr získal osm žetonů. Kdyby se Pavel rozhodoval jen podle sebe, hrál by srdce, protože i protihráč má srdce a v takovém případě by Pavel inkasoval žetony v hodnotě rozdílu hodnot srdcových karet. A protože Pavel má desítku a Petr trojku, získal by Pavel sedm žetonů. Ale v případě, že by Petr ukázal křížovou osmičku a Pavel srdcovou desítku, tedy karty různých barev i hodnot, platil by Petr Pavlovi prémii jeden žeton, protože Pavel má jak vyšší barvu, tak kartu. Žádný z nich by tedy nezískal, co předpokládal.

Na této jednoduché hře vidíme, že se v konfliktní situaci nikdy nemůžeme rozhodovat jen z pohledu jednoho hráče, ale musíme mít při výběru vhodné strategie na mysli, že i protihráči chtějí vyhrát a navíc vědí, že i já chci vyhrát. Budeme vybírat tedy takovou strategii, která bude nejlepší pro každého z hráčů zároveň. Také uvidíme, jak zápis možných výher u takovéhoto typu hry do matice hledání vhodné strategie velmi zpřehlední.

Motivační úvaha II.

Mějme na trhu dvě firmy s určitým výrobkem, které chtějí ve třech městech, označme je A, B, C, proniknout na trh, a proto chtějí provést reklamní kampaň.

Ve městě A lze očekávat zisk 66 miliónů korun, ve městě B 96 miliónů korun a ve městě C 39 miliónů korun. První firma má finanční prostředky na provedení velké reklamní kampaně v jednom z měst, nebo na provedení menších reklamních kampaní ve dvou městech. Druhá firma má finanční prostředky jen na malou reklamní kampaň v jednom z měst. Firmy navzájem znají své finanční možnosti. Předpokládejme, že zisk je mezi firmy rozdělen podle následujících pravidel:

- Jestliže v jednom městě povede kampaň (malou nebo velkou) jen jedna firma, získá celý zisk z tohoto města.
- Povedou-li v jednom městě obě firmy malou kampaň, zisk si rozdělí stejným dílem.
- Povede-li v jednom městě první firma velkou kampaň a druhá malou kampaň, získá první firma $\frac{2}{3}$ zisku z tohoto města a druhá firma zbytek.
- Neprovádí-li v daném městě kampaň žádná firma, pak také žádná z firem z tohoto města nezíská žádný zisk.

Jak se každá z firem má zachovat, aby její zisky byly co nejvyšší?

Pokud by každá z firem uvažovala jen sama za sebe, pak první firma by dělala malou reklamu ve městě A a B, tak může získat nejvíce. A druhá firma, kdyby vůbec nebrala v úvahu, jak se zachová první firma, by dělala reklamu ve městě B. Pak by se ale firmy potkaly na trhu města B a zisky z tohoto trhu by byly pro každou z firem poloviční. Vidíme tedy, že při vyšetřování optimálního chování v konfliktní situaci, kterou v tomto případě byl boj o trh, musíme brát v úvahu, jak se protihráči mohou zachovat. A v tomto případě všichni účastníci popsané konfliktní situace měli zájem jednat v konfliktní situaci tak, aby jejich zisk byl maximální.

Motivační úvaha III.

Dalším příkladem konfliktní situace je oligopol. Každý z oligopolistů chce nastavit svůj objem produkce tak, aby maximalizoval své tržby. Pokud si každý oligopolista stanoví objem výroby bez úvahy, jak se zachovají ostatní oligopolisté, stane se, že celková produkce na trhu bude větší. A protože cena výrobku je závislá na objemu produkce dodávané na trh, cena výrobku se sníží, a tím klesnou tržby každého z oligopolistů. Pokud tedy chce oligopolista stanovit objem výroby, musí uvažovat i chování dalších oligopolistů. Samozřejmě tady bude hrát roli, jaké postavení má oligopolista na trhu, zda mají oligopolisté rovnocenné postavení, či jeden z nich má postavení silnější.

Motivační úvaha IV.

Poslední konfliktní situace, kterou budeme uvažovat, bude následující. Uvažujme situaci, kdy se pan T. rozhoduje, jaké zvolit penzijní připojištění. Vybírá ze dvou penzijních fondů. Jeden z nich, označme ho fond A, je fond, ve kterém jsou zisky 2% výše vkladu, a to za jakékoli ekonomické situace. Fond B udává výnosy 3% v případě příznivé ekonomické situace, $1,2\%$ v případě méně příznivé ekonomické situace a 0% v případě nepříznivé ekonomické situace. Jak se má pan T. rozhodnout?

Pan T. stojí před rozhodnutím, je v konfliktní situaci. Kdo je dalším účastníkem konfliktu? Ekonomika státu, ve kterém se chce pan T. připojistit na penzi. Oproti ostatním třem předchozím úlohám je tento protihráč pana T. poněkud jiný. Jiný ve způsobu vybírání svých možných strategií, svých stavů. Tento protihráč nebude jednat v konfliktní situaci tak, aby maximalizoval svůj zisk. Umíme si představit situaci, kdy se odborníci pokusí alespoň předpovědět, s jakými pravděpodobnostmi mohou nastat jednotlivé uvažované stavy ekonomiky. A jak se potom rozhodnout? A co když se pan T.

se žádnými pravděpodobnostmi možného vývoje ekonomiky vůbec neseznámí? Existují nějaké obecné „návody“, které by pana T. v rozhodování alespoň částečně vedly?

V dalším textu se postupně dozvíme, jak je možné jednotlivé motivační úlohy řešit pomocí teorie her. Můžeme se pustit do seznámení se s novými pojmy.

14.1 Základní pojmy teorie her

Definice 14.1.1. Základní pojmy

- *Hrou* v teorii her budeme rozumět každou konfliktní situaci.
- *Hráči* budou účastníci konfliktu.
- *Strategie* jednotlivých hráčů jsou alternativy (možnosti) chování hráče při řešení konfliktu.

Hra může být konečná a nekonečná podle velikosti prostoru strategií. Hráčů může být dva a více. Počet hráčů může být konečný i nekonečný. Hráči se budou lišit podle vztahu k výsledku konfliktu.

Definice 14.1.2. Typy hráčů

- *Inteligentní hráč* - chová se racionálně, snaží se maximalizovat svůj zisk.
- *Neinteligentní hráč* (náhodný mechanismus) - nechová se racionálně, své strategie nevybírá tak, aby maximalizoval svůj zisk. Velmi často vybírá své strategie náhodně.
- *P-inteligentní hráč* - v p % případů se rozhoduje jako inteligentní hráč a v $(1-p)$ % případů se chová jako náhodný mechanismus.

Z motivačních příkladů jsme viděli, že výše výplaty závisela nejen na zvolené strategii daného hráče, ale i na zvolených strategiích ostatních hráčů.

Definice 14.1.3. *Výplatní funkce* hráče je předpis pro výplatu v závislosti na zvolených strategiích všech hráčů. V případě konečného počtu hráčů (N hráčů) bude výplatní funkce i-tého hráče funkcí n proměnných $f_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Záporná hodnota značí prohru, kladná hodnota výhru.

Výplatní funkce může nabývat hodnot v různých jednotkách. Výplata může být vyjádřena v peněžní měně, ale také například v procentech zisku. My nebudeme jednotky nijak blíže specifikovat a budeme obecně uvádět výplatní jednotky. Podle vztahu hráčů dělíme hry na antagonistické hry a neantagonistické hry.

Definice 14.1.4. Typy her

- *Antagonistická hra* - součet výplatních funkcí je roven nule (hra s nulovým součtem). Co jeden hráč získává, ostatní ztrácí.
- *Neantagonistická hra* - vítězství jednoho hráče neznamená nutně prohru ostatních hráčů
  - kooperativní hry - hráči mohou vytvářet koalice, spolupracují.
  - nekooperativní hry - hráči se na svých zvolených strategiích nedomlouvají.

Definice 14.1.5. *Hra v normálním tvaru* je určena třemi množinami:

- Množinou hráčů (seznam účastníků konfliktu) $\{1, 2, \ldots, N\}$.
- Množinou prostoru strategií-$\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$.
- Množinou výplatních funkcí $\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$.

Předpokládáme inteligentní hráče a předpokládáme, že hráči mají dokonalé informace, tzn. znají všichni všechny tři množiny (hráčů, strategií a výplatních funkcí).

V další kapitole se zaměříme na antagonistické hry. Budeme uvažovat jen hry dvou hráčů.

14.2 Maticové hry - antagonistické hry dvou hráčů

Výplatní funkce každého ze dvou hráčů označíme $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$. Za proměnnou x můžeme dosadit jakoukoli strategii prvního hráče, za proměnnou y můžeme dosadit jakoukoli strategii druhého hráče. V antagonistické hře platí: co jeden hráč ztrácí, to druhý vyhrává. Výhra znamená kladnou hodnotu výplatní funkce, prohra zápornou hodnotu. Pro antagonistickou hru dvou hráčů tedy bude platit

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = 0.$$

Takové antagonistické hry budeme také nazývat hry s nulovým součtem. Z toho plyne

$$f_2(x, y) = -f_1(x, y).$$

Vidíme tedy, že výplatní funkce v antagonistické hře dvou hráčů se liší jen znaménkem. Nemusíme si pamatovat dvě funkce, stačí si pamatovat jen výplatní funkci prvního hráče. Dále se budeme zabývat optimálními strategiemi jednotlivých hráčů. Optimální strategií jednotlivých hráčů myslíme strategii, při které se maximalizuje zisk jednotlivých hráčů.

Definice 14.2.1. Označme optimální strategii prvního hráče $\widetilde{x}$ a optimální strategii druhého hráče $\widetilde{y}$. Pak *optimální strategií* prvního hráče nazveme takovou strategii $\widetilde{x} \in S_1$, ke které existuje optimální strategie druhého hráče $\widetilde{y} \in S_2$ tak, že pro výplatní funkce hráčů platí

$$\begin{aligned} f_1(x, \widetilde{y}) &\leq f_1(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \\ f_2(\widetilde{x}, y) &\leq f_2(\widetilde{x}, \widetilde{y}). \end{aligned}$$

Označíme-li $f_1(x, y) = f(x, y)$ a využijeme-li vztahu $f_2(x, y) = -f_1(x, y)$, můžeme nerovnice z předchozí definice přepsat.

$$\begin{aligned} f(x, \widetilde{y}) &\leq f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \\ -f(\widetilde{x}, y) &\leq -f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \end{aligned}$$

Vynásobíme-li druhou rovnici číslem -1 dostaneme

$$f(\widetilde{x}, y) \geq f(\widetilde{x}, \widetilde{y}).$$

Zapíšeme-li obě nerovnice do jedné, máme

$$f(x, \widetilde{y}) \leq f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq f(\widetilde{x}, y).$$

Definice 14.2.2. Nerovnost

$$f(x, \widetilde{y}) \leq f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq f(\widetilde{x}, y)$$

se nazývá *Nashovo rovnovážné řešení*.

V případě antagonistické hry dvou hráčů a v případě konečných prostorů strategií, můžeme výplatní funkci prvního hráče $f(x, y)$ zapsat pomocí výplatní matice prvního hráče. Tato matice bude mít tolik řádků, kolik strategií má první hráč, a tolik sloupců, kolik strategií má druhý hráč. Jednotlivé prvky matice a_{ij} jsou výplaty prvního hráče v případě, že první hráč volí svou *i*-tou strategii a druhý hráč hraje svou *j*-tou strategii.

2. hr.

$$\text{1. } hr. \quad \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \ldots. & t_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} f(s_1,t_1) & f(s_1,t_2) & \ldots & f(s_1,t_n) \\ f(s_2,t_1) & f(s_2,t_2) & \ldots & f(s_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(s_m,t_1) & f(s_m,t_2) & \ldots & f(s_m,t_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

Neboli

2.hr.

$$1.hr. \quad \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \ldots. & t_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Situace, která znamená pro prvního hráče výhru, bude prvek s kladnou hodnotou, prohrou je záporná hodnota prvku matice. Výplatní matice druhého hráče by byla stejná, jen s opačným znaménkem. Není potřeba si tuto druhou matici pamatovat. Ve výplatní matici prvního hráče je kladný prvek výše prohry druhého hráče a záporný prvek je výše výhry druhého hráče.

Když budeme hledat optimální strategie, musíme mít na mysli, že v našem typu hry je výhra jednoho hráče prohrou druhého hráče. Každý hráč bude hrát takovou strategii, aby pro sebe uhrál co nejvíce, ale zároveň musí mít na mysli, že tak se chová i jeho protihráč. Tedy, že každý hráč svou výhrou poškozuje druhého. Pokud by první hráč vybral svou první strategii, pak by volil tu nejnižší výhru. A stejně by se zachoval i v případě volby svých dalších strategií. Choval by se tedy tak, že ve výplatní matici by vybral minimum (pro sebe nejhorší možnost) v každém řádku výplatní matice. Ale protože se zároveň snaží maximalizovat svůj zisk, volí z těchto řádkových minim tu nejlepší možnost, tedy maximální hodnotu. Pokud druhý hráč zvolí svou první strategii, bude mít na mysli, že pro prvního hráče bude nejpřijatelnější nejnižší výhra druhého hráče. A protože pracujeme pouze s výplatní maticí prvního hráče, ve které je pro druhého nejhorší nejvyšší hodnota prvku, bude druhý hráč vybírat v každém sloupci maximální prvek. Protože i druhý hráč je racionální hráč, bude z těchto svých nejhorších možností vybírat tu nejlepší, tedy minimum z těchto sloupcových maxim. Schematicky můžeme chování každého z hráčů znázornit takto:

1. hráč: $\max_i \min_j a_{ij}$

2. hráč: $\min_j \max_i a_{ij}$

Zřejmě platí, že $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$. V některých případech může nastat rovnost. Takové prvky výplatní matice prvního hráče budou prvky, které jsou maximální ve sloupci a zároveň minimální v řádku. Takové prvky budeme nazývat sedlovými prvky výplatní matice.

Definice 14.2.3. *Dolní cena hry* je hodnota

$$\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij},$$

horní cena hry je hodnota

$$\overline{a} = \min_j \max_i a_{ij},$$

pokud

$$\underline{a} = \overline{a},$$

pak $a^* = \underline{a} = \overline{a}$ nazýváme *cenou hry*. Pokud $a^* = 0$, pak nazýváme hru *spravedlivou hrou*.

Definice 14.2.4. *Nashova rovnováha v ryzích strategiích*
Jestliže prvek a_{ij} je sedlový prvek výplatní matice, neboli cena hry, pak i-tá strategie (s_i) prvního hráče a j-tá strategie (t_j) druhého hráče jsou optimální strategie hráčů v dané maticové hře.

Mohou nastat tři různé případy:

- Existuje jedno řešení v ryzích strategiích. (Jeden sedlový prvek výplatní matice.)
- Existuje více řešení v ryzích strategiích. (Více sedlových prvků výplatní matice.)
- Neexistuje žádné řešení v ryzích strategiích. (Žádný sedlový prvek výplatní matice.)

Tyto možnosti si ukážeme v následujících maticích.

Příklad 14.1

14.1. Nalezněte řešení v ryzích strategiích (pokud existují) v následujících třech výplatních maticích antagonistických her $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Matice A je typu 3×4, tedy první hráč má tři možné strategie, druhý hráč má čtyři možné strategie.

$$\begin{array}{cc} & \min_i a_{ij} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -4 \\ \color{red}{-1} \\ -3 \end{array} \\ \max_j a_{ij}: \quad 5 \quad \color{red}{-1} \quad 2 \quad 4 & \end{array}$$

Červeně vyznačená hodnota pod výplatní maticí je minimum ze sloupcových maxim a červeně vyznačené hodnota ve sloupci napravo od výplatní matice je maximum z řádkových minim. Horní cena hry je $\min_i \max_j a_{ij} = -1$, dolní cena hry je $\max_j \min_i a_{ij} = -1$. Existuje tedy řešení v ryzích strategiích. Pokud první hráč bude hrát svou druhou strategii a druhý hráč také svou druhou strategii, pak cena hry bude -1. Tedy první hráč ztratí „jen " jednu výplatní jednotku a druhý hráč získá jednu výplatní jednotku. V této antagonistické hře existovalo jedno řešení v ryzích strategiích.

V antagonistické hře dvou hráčů dané výplatní maticí B vidíme, že první hráč má čtyři strategie a druhý hráč má tři strategie. Řešení v ryzích strategiích (sedlové prvky) budeme hledat nyní přímo v matici. Maxima ve sloupci označíme závorkou [.], minima v řádcích označíme závorkou (.) .

$$\begin{pmatrix} (-4) & 2 & -3 \\ ([0]) & [5] & ([0]) \\ (-3) & -1 & -1 \\ ([0]) & 3 & ([0]) \end{pmatrix}$$

V této matici existují celkem čtyři sedlové prvky. Existuje řešení v ryzích strategiích. Optimální strategie prvního hráče jsou dvě: druhá a čtvrtá, optimální strategie druhého hráče jsou také dvě: první a třetí.

V antagonistické hře s výplatní maticí C má první hráč dvě možné strategie, druhý hráč má tři možné strategie. Stejně jako u matice B budeme přímo v matici C označovat řádková minima a sloupcová maxima.

$$\begin{pmatrix} [1] & (-5) & [2] \\ (-3) & [4] & -2 \end{pmatrix}$$

V tomto případě neexistuje žádný sedlový prvek výplatní matice. Neexistuje řešení v ryzích strategiích.

Podívejme se na příklad v motivační úloze I.

Příklad 14.2

14.2. Každý z hráčů, Petr a Pavel, má v ruce dvě karty. Petr má křížovou osmičku a srdcovou trojku, Pavel má pikovou osmičku a srdcovou desítku. Na povel každý ukáže jednu ze svých karet. Hraje se o žetony. V případě shody barev platí Petr Pavlovi tolik žetonů, kolik je rozdíl v hodnotě karet. V případě shody hodnoty karet platí Pavel Petrovi hodnotu karet. V případě rozdílnosti hodnot karet i barev neplatí nikdo nikomu kromě situace, kdy má některý hráč zároveň vyšší kartu i barvu. V takovém případě dostává od druhého hráče prémii jeden žeton. (Nejnižší barva jsou kříže, vyšší barva jsou srdce a nejvyšší barva jsou piky.) Nalezněte optimální strategie obou hráčů.

Řešení: V tomto příkladu musíme nejprve sestavit výplatní matici. Tato matice bude typu 2×2. Každý z hráčů má dvě strategie (dvě karty, které může ukázat).

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Pavel} \\ & & \begin{array}{cc} \spadesuit 8 & \heartsuit 10 \end{array} \\ \textit{Petr} & \begin{array}{c} \clubsuit 8 \\ \heartsuit 3 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Prvek a_{11} výplatní matice je výplata v případě, že oba volí kříže. Jedná se tedy o shodu hodnot karet. V takovém případě platí Pavel Petrovi hodnotu karet. Petr získává 8 žetonů, $a_{11} = 8$. Prvek a_{12} výplatní matice je výplata v případě, kdy se neshodují ani barvy, ani hodnoty karet. Protože ale Pavel má jak vyšší barvu, tak hodnotu karty, dostane od Petra jeden žeton. Protože hledaná matice je výplatní matice Petra, Petr ztrácí a tedy $a_{12} = -1$.

V případě, že Petr zvolí srdcovou trojku a Pavel křížovou osmičku, neshoduje se ani barva, ani hodnota karet a navíc žádný nemá zároveň vyšší i barvu i hodnotu karty. Pak je $a_{21} = 0$. A poslední případ je, když oba ukáží srdce. Shoduje se barva. V případě shody barev, platí Petr Pavlovi tolik žetonů, kolik je rozdíl v hodnotě karet. Tedy je $a_{22} = -7$. Máme sestavenu výplatní matici, můžeme hledat sedlové prvky.

$$\begin{pmatrix} [8] & ([-1]) \\ 0 & (-7) \end{pmatrix}$$

Existuje jeden sedlový prvek. Optimální strategie jsou: Petr ukáže křížovou osmičku, Pavel srdcovou desítku. V takovém případě Pavel vyhrává jeden žeton.

Podívejme se ještě jednou na matici $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ z Příkladu 14.1.

Zaměříme se na první dvě strategie prvního hráče a jeho možné výhry zapsané v prvních dvou řádcích matice B. Ať druhý hráč zvolí jakoukoli ze svých možných třech strategií, výplaty prvního hráče budou vždy větší v případě jeho druhé strategie. První hráč tedy svou první strategii nikdy nebude volit, protože jeho druhá strategie je pro něj při jakékoli volbě druhého hráče lepší. V tomto případě budeme říkat, že druhá strategie prvního hráče je dominující a první strategie je dominovaná. Stejně tak to bude i v případě třetí a čtvrté strategie. V této hře je druhá strategie prvního hráče dominující a všechny ostatní strategie jsou dominované. Takové řádky můžeme ve výplatní matici vyškrtnout.

Nyní uvažujme ve výplatní matici B stejně, ale z pozice druhého hráče. Pro něj je v matici dominující strategie ta, která má při jakékoli volbě strategie prvního hráče menší hodnoty ve sloupci. A to je v našem případě první strategie. Druhá a třetí strategie jsou dominované první strategii. I v tomto případě můžeme druhou a třetí strategii druhého hráče (druhý a třetí sloupec) vyškrtnout.

Definice 14.2.5. Pokud platí $a_{ij} \geq a_{kj}$, pro všechna $j = 1, \ldots, n$ a nějaké $i, k = 1, \ldots, m$, $k \neq i$, pak k-tý řádek výplatní matice můžeme vyškrtnout a řekneme, že k-tá strategie prvního hráče je *dominovaná* i-tou strategií, neboli i-tá strategie prvního hráče je *dominující*.
Pokud platí $a_{ij} \leq a_{il}$, pro všechna $i = 1, \ldots, m$ a nějaké $j, l = 1, \ldots, n$, $l \neq j$, pak l-tý sloupec výplatní matice můžeme vyškrtnout a řekneme, že l-tá strategie druhého hráče je *dominovaná* j-tou strategií, neboli j-tá strategie druhého hráče je *dominující*.

Příklad 14.3

14.3. V následující matici nalezněte dominované strategie obou hráčů, pokud existují.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: První hráč ve své páté strategii nic neprohraje. Ověříme, zda jeho pátá strategie dominuje některou z ostatních čtyř strategií. Porovnáme-li prvky prvního a pátého řádku, vidíme, že první čtyři prvky jsou větší v pátém řádku, ale u pátých prvků těchto řádků je to naopak. Pátý řádek tedy nedominuje prvnímu řádku. Také ve druhém řádku nejsou všechny prvky menší než v pátém řádku. Ani ve třetím řádku nejsou všechny prvky menší než v pátém řádku. Ale prvky čtvrtého řádku nejsou větší než odpovídající prvky pátého řádku. Tedy čtvrtý řádek je dominovaný pátým řádkem.

Pro druhého hráče je dominující ta strategie, ten sloupec, který má každý prvek menší než odpovídající prvky jiných řádků. Lehce ověříme, že žádný takový řádek není. Druhý hráč nemá dominované strategie. Výplatní matici můžeme zjednodušit na matici

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Co znamená situace, kdy neexistuje řešení v ryzích strategiích, jako například u matice $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ z předešlého příkladu? Můžeme použít takzvané smíšené rozšíření maticové hry. Každé strategii přiřadíme ještě pravděpodobnost, s jakou má daný hráč vybírat své jednotlivé strategie. Prostor strategií prvního hráče pak je

$$S_1 = \{\mathbf{p}; \mathbf{p}^T = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \sum_{i=1}^{m} = 1, p_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Prostor strategií druhého hráče je

$$S_2 = \{\mathbf{q}; \mathbf{q}^T = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \sum_{i=1}^{n} = 1, q_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Hodnota výplatní funkce bude udávat očekávanou střední hodnotu výhry. Výplatní funkce prvního hráče má tvar

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \mathbf{p}^T A \mathbf{q}.$$

Věta 14.2.6 (Základní věta maticových her)**.** *Každá maticová hra má Nashovo rovnovážné řešení ve smíšených strategiích.*

Nashovo řešení v ryzích strategiích je speciální případ řešení ve smíšených strategiích. V takovém případě jedna pravděpodobnost je rovna jedné a ostatní jsou nulové.

V maticové hře s výplatní maticí, která má dva řádky, tedy matice typu $2 \times n$, můžeme najít řešení ve smíšených strategiích graficky.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & .... & q_n \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hledáme vektor pravděpodobností prvního hráče $(p, 1-p)$ a vektor pravděpodobností druhého hráče $(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Střední hodnoty výhry prvního hráče při ryzích strategiích druhého hráče budou funkce proměnné p.

$$h_j(p) = pa_{1j} + (1-p)a_{2j} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Toto jsou lineární funkce a jejich grafem jsou přímky. Z těchto funkcí vytvoříme funkci $\varphi(p) = min_{j=1,2,\dots,n} h_j(p)$. Tato funkce je po částech lineární funkce. Hledané řešení p^* je hodnota, pro kterou funkce $\varphi(p)$ nabývá svého maxima. Tedy platí

$$v = \varphi(p^*) = \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \varphi(p).$$

.

Navíc hodnota v je potom hledaná cena hry. Zbývá určit vektor pravděpodobností druhého hráče. Pokud maximum funkce $\varphi(p)$ je průsečík grafů funkcí $h_j(p)$ a $h_k(p)$, víme, že všechny složky vektoru $(q_1, q_2, \dots, q_n)$, kromě j-té a k-té, jsou rovny nule. Pro cenu hry platí

$$a_{1j}q_j + a_{1k}q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \qquad q_j \geq 0, \quad q_k \geq 0.$$

Nebo také

$$a_{2j}q_j + a_{2k}q_k = v, \qquad q_j + q_k = 1, \qquad q_j \geq 0, \quad q_k \geq 0.$$

Ukažme si nalezení řešení ve smíšených strategiích v následujícím příkladu.

14.4. Nalezněte optimální strategie v maticové hře s výplatní maticí **Příklad 14.4**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Již víme, že neexistuje řešení v ryzích strategiích. Hledáme-li řešení ve smíšených strategiích, znamená to, že hledáme vektory pravděpodobností $(p, 1-p)$ pro prvního hráče a (q_1, q_2, q_3) pro druhého hráče. Nejprve nalezneme předpis funkcí $h_1(p)$, $h_2(p)$ a $h_3(p)$.

$$\begin{aligned} h_1(p) &= 1 \cdot p + (-3)(1-p) = 4p - 3 \\ h_2(p) &= -5p + 4(1-p) = 4 - 9p \\ h_3(p) &= 2p + (-2)(1-p) = 4p - 2 \end{aligned}$$

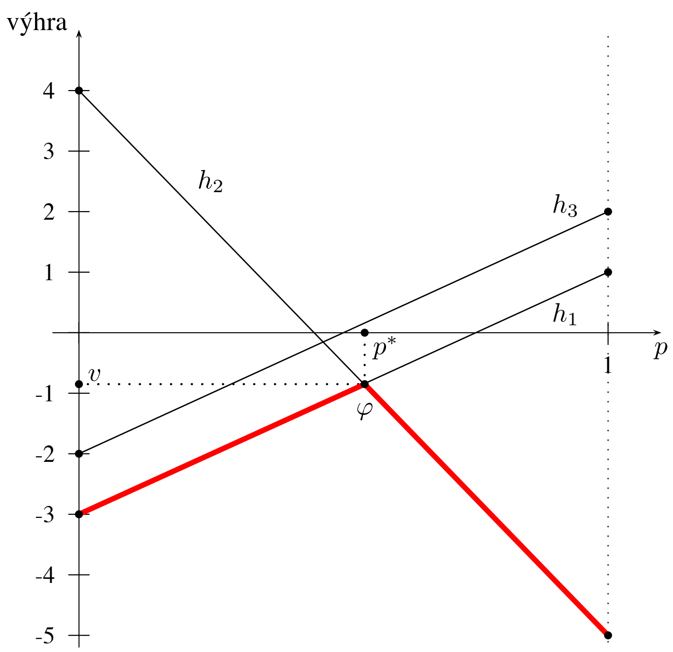
Grafy těchto lineárních funkcí jsou přímky a hledané řešení vidíme na Obrázku 14.1. Již z předpisu funkcí $h_1(p)$ a $h_3(p)$ vidíme, že jejich grafy budou rovnoběžné přímky. Hledaná hodnota p^* je průsečík funkcí $h_1(p)$ a $h_2(p)$. Tedy

$$\begin{aligned} h_1(p) &= h_2(p) \\ 4p - 3 &= 4 - 9p \\ p &= \frac{7}{13}. \end{aligned}$$

Hledaná hodnota je $p^* = \frac{7}{13}$. Cenu hry v nalezneme tak, že do nalezené funkce $\varphi(p)$ (na Obrázku 14.1 je její graf znázorněn červeně) dosadíme za p hodnotu $p^* = \frac{7}{13}$. Protože platí $v = \varphi(p^*) = h_1(p^*) = h_2(p^*)$, můžeme cenu hry vypočítat dosazením $p^* = \frac{7}{13}$ do předpisu jedné z funkcí $h_1(p)$, nebo $h_2(p)$. Dosazením do $h_1(p)$, dostaneme cenu hry $v = 4 \cdot \frac{7}{13} - 3 = -\frac{11}{13}$. V hledaném vektoru pravděpodobností (q_1, q_2, q_3) je $q_3 = 0$, protože p^* je průsečík funkcí $h_1(p)$ a $h_2(p)$. Pro nalezení q_1 a q_2 musíme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$1 \cdot q_1 - 5 \cdot q_2 = -\frac{11}{13}$$
$$q_1 + q_2 = 1$$

Odtud dostáváme $q_1 = \frac{9}{13}$ a $q_2 = \frac{4}{13}$. Hledané vektory pravděpodobností jsou $(\frac{7}{13}, \frac{6}{13})$ a $(\frac{9}{13}, \frac{4}{13}, 0)$. Neboli první hráč má svou první strategii volit s pravděpodobností $\frac{7}{13}$ a druhou s pravděpodobností $\frac{6}{13}$. Druhý hráč bude svou první strategii volit s pravděpodobností $\frac{9}{13}$, druhou s pravděpodobností $\frac{4}{13}$ a třetí nebude volit vůbec.



Obrázek 14.1: Smíšené strategie

Příklad 14.5

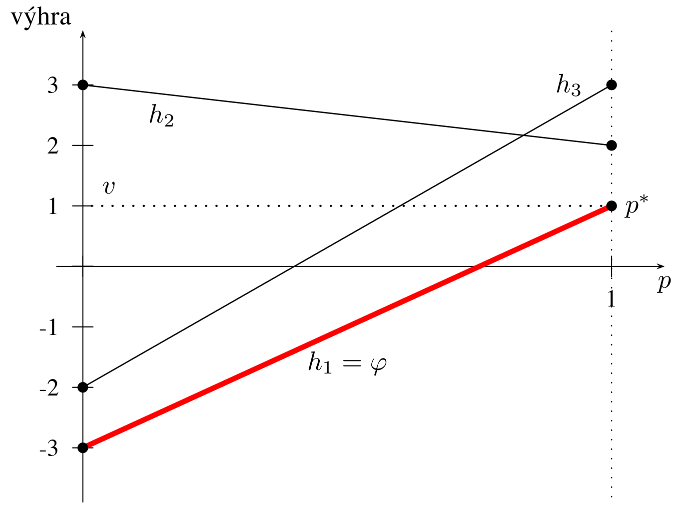
14.5. Nalezněte optimální strategie v antagonistické hře dvou hráčů s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Protože daná matice má dva řádky, nalezneme řešení stejnou metodou jako v předchozím případě. Hledáme vektory pravděpodobností $(p, 1-p)$ pro prvního hráče a (q_1, q_2, q_3) pro druhého hráče. Nejprve nalezneme předpis funkcí $h_1(p)$, $h_2(p)$ a $h_3(p)$.

$$h_1(p) = 1 \cdot p + (-3)(1-p) = 4p - 3$$
$$h_2(p) = 2p + 3(1-p) = 3 - p$$
$$h_3(p) = 3p + (-2)(1-p) = 5p - 2$$

Grafy těchto lineárních funkcí jsou přímky a hledané řešení vidíme na Obrázku 14.2. Z grafu je vidět, že jedna z přímek je pro všechna $p \in \langle 0, 1 \rangle$ minimální, tedy funkce $\varphi(p) = h_1(p)$. Její maximum nastává pro $p^* = 1$. Pak platí $1 - p^* = 0$. Cena hry je



Obrázek 14.2: Smíšené strategie

$v = 4 \cdot 1 - 3 = 1$. V hledaném vektoru pravděpodobností (q_1, q_2, q_3) je $q_2 = 0$ i $q_3 = 0$, protože p^* jsme vypočetli jen z funkce $h_1(p)$. Pro nalezení q_1 stačí dosadit do rovnice $q_1 + q_2 = 1$. Odtud $q_1 = 1$. Nalezli jsme vektory pravděpodobností $(1, 0)$ prvního hráče a $(1, 0, 0)$ pro druhého hráče. Neboli první hráč má v každém případě (ve 100 % případů) volit svou první strategii. Druhý hráč má rovněž v každém případě (ve 100 % případů) volit svou první strategii. Neboli, dostali jsme řešení v ryzích strategiích. Když budeme hledat sedlové prvky matice, dostaneme

$$\begin{pmatrix} ([1]) & 2 & [3] \\ (-3) & [3] & -2 \end{pmatrix}.$$

V tomto příkladě jsme se přesvědčili, že řešení v ryzích strategiích je speciálním případem řešení ve smíšených strategiích.

Ještě jsme neodpověděli na otázku, jak nalézt řešení ve smíšených strategiích, když výplatní matice nemá jen dva řádky. Takové úlohy budeme řešit metodami lineárního programování. Nejprve upravíme výplatní matici tak, že ke každému prvku přičteme stejnou konstantu. Tato konstanta bude tak velká, aby po jejím přičtení k prvkům matice byl každý prvek kladný. Tím se řešení ve smíšených strategiích nezmění. Dále zformulujeme naši úlohu do tvaru úloh lineárního programování. Naše úloha je dvojího typu.

- Minimalizovat $p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ za podmínek

$$\begin{array}{rcll} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m & \geq & 1 & \\ \cdots & \geq & 1 & \\ \cdots & \geq & 1 & \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m & \geq & 1 & \\ p_i & \geq & 0 & \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{array}$$

- Maximalizovat $q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ za podmínek

$$\begin{array}{rcll} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n & \leq & 1 & \\ \cdots & \leq & 1 & \\ \cdots & \leq & 1 & \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n & \leq & 1 & \\ q_j & \geq & 0 & \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Řešení takovýchto úloh pomocí simplexové metody jste se naučili v kapitole lineárního programování.

14.3 Dvoumaticové hry

Dvoumaticová hra charakterizuje neantagonistický konflikt. Zájmy jednoho nemusí být v přímém protikladu se zájmy ostatních hráčů. My se v dalším zaměříme na hry dvou hráčů. Rozlišujeme dva typy takovýchto her:

- nekooperativní hry
- kooperativní hry

Nekooperativní hra dvou hráčů

V těchto typech her dvou hráčů předpokládáme, že hráči nebudou (z různých důvodů) spolupracovat, tedy nebudou společně vybírat své strategie. Předpokládáme, že se bude jednat o hru v normálním tvaru. Hráči o sobě vědí, znají navzájem své strategie a znají své výplatní funkce. Výplatní funkci prvního hráče označme $f_1(x, y)$, výplatní funkci druhého hráče označme $f_2(x, y)$. Hodnoty těchto výplatních funkcí můžeme zapsat do výplatních matic.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Obě výplatní matice jsou stejného typu, počet řádků značí počet strategií prvního hráče, počet sloupců značí počet strategií druhého hráče.

Definice 14.3.1. *Modifikované Nashovo rovnovážné řešení*
Dvojici strategií $\widetilde{x}$ a $\widetilde{y}$ nazveme *Nashovými rovnovážnými strategiemi*, jestliže platí pro $x \in S_1, y \in S_2$

$$\begin{aligned} f_1(x, \widetilde{y}) &= f_1(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \\ f_2(\widetilde{x}, y) &= f_2(\widetilde{x}, \widetilde{y}). \end{aligned}$$

K nalezení řešení v ryzích strategiích v nekooperativní hře použijeme tzv. dvoumatici. Výplatní matice obou hráčú napíšeme do jedné matice tak, že každý prvek obsahuje dvojici čísel. První hodnota v této dvojici je výplata prvního hráče a druhá hodnota je výplata druhého hráče.

$$A, B = \begin{pmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & \cdots & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} & \cdots & a_{2n}, b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, b_{m1} & a_{m2}, b_{m2} & \cdots & a_{mn}, b_{mn} \end{pmatrix}$$

Z definice plyne, že rovnovážné řešení nalezneme tak, že ve výplatní dvoumatici hledáme maxima ve sloupcích z prvních hodnot a maxima v řádcích z druhých hodnot. Pokud existuje prvek - dvojice hodnot, ve které je první hodnota maximum ve sloupci a druhá hodnota maximim v řádku, existuje řešení v ryzích strategiích a daná dvojice hodnot jsou výplaty hráčů. Mohou nastat celkem čtyři možné případy rovnovážných řešení v ryzích strategiích.

- Řešení v ryzích strategiích existuje právě jedno.
- Řešení v ryzích strategiích existuje více, ale jedno z nich je výhodnější pro oba hráče. Jedno z nich dominuje. Pak hráči volí toto řešení.
- Řešení v ryzích strategiích existuje více, ale pro každého hráče je výhodnější jiné řešení. Žádné řešení nedominuje.
- Hra nemá řešení v ryzích strategiích.

Tyto případy budeme demonstrovat v následujícím příkladu.

14.6. Nalezněte optimální strategie v neantagonistické hře dvou hráčů.

Příklad 14.6

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Řešení: Vytvoříme dvoumatici a v ní budeme hledat sloupcová maxima z prvních čísel a řádková maxima ze druhých čísel.

$$\begin{pmatrix} 1,{\color{blue}3} & 0,2 & 3,-1 & {\color{red}1},{\color{blue}3} \\ {\color{red}3},-1 & -2,0 & 2,{\color{blue}5} & -3,4 \\ -2,{\color{blue}2} & {\color{red}1},1 & {\color{red}4},-3 & -1,0 \end{pmatrix}$$

Řešení v ryzích strategiích existuje jediné. První hráč bude volit svou první strategii a získá jednu výplatní jednotku, druhý hráč bude hrát svou čtvrtou strategii a získá tři výplatní jednotky.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Řešení: Vytvoříme dvoumatici a v ní budeme hledat sloupcová maxima z prvních čísel a řádková maxima ze druhých čísel.

$$\begin{pmatrix} 2,{\color{blue}3} & 0,1 & {\color{red}4},1 \\ 1,2 & {\color{red}4},{\color{blue}4} & 3,2 \\ {\color{red}5},{\color{blue}6} & 1,1 & 3,5 \end{pmatrix}$$

Řešení v ryzích strategiích existují dvě. První hráč může volit svou druhou strategii a získá čtyři výplatní jednotky, nebo třetí strategii a získá pět výplatních jednotek. Druhý hráč může hrát svou první strategii a získá šest výplatních jednotek, nebo může hrát svou druhou strategii a získá čtyři výplatní jednotky. Protože jedno řešení je pro oba hráče výhodnější (dominující) a předpokládáme racionální hráče, první hráč bude volit třetí strategii a získá pět výplatních jednotek a druhý hráč bude hrát první strategii a získá šest výplatních jednotek.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení: Vytvoříme dvoumatici a v ní budeme hledat sloupcová maxima z prvních čísel a řádková maxima ze druhých čísel.

$$\begin{pmatrix} 2,{\color{blue}3} & 0,1 & {\color{red}4},2 \\ 1,2 & {\color{red}4},{\color{blue}5} & 3,2 \\ {\color{red}7},{\color{blue}3} & 1,1 & 3,2 \end{pmatrix}$$

V tomto případě existují také dvě rovnovážná řešení, ale protože v tomto případě žádné z nich není dominující (každé je výhodnější jen pro jednoho hráče), nevede k jednoznačnému výsledku.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení: Znovu vytvoříme dvoumatici a v ní budeme hledat sloupcová maxima z prvních čísel a řádková maxima ze druhých čísel.

$$\begin{pmatrix} 2,{\color{blue}3} & 0,1 & {\color{red}4},2 \\ 1,2 & 2,{\color{blue}5} & 3,2 \\ {\color{red}7},0 & {\color{red}3},1 & 3,{\color{blue}2} \end{pmatrix}$$

V tomto případě neexistuje řešení v ryzích strategiích.

V dalším příkladu se vrátíme k motivační úloze II.

Příklad 14.7

14.7. Na trhu jsou dvě firmy s určitým výrobkem, které chtějí ve třech městech, označme je A,B,C, proniknout na trh, a proto chtějí provést reklamní kampaň. Ve městě A lze očekávat zisk 66 miliónů korun, ve městě B 96 miliónů korun a ve městě C 39 miliónů korun. První firma má finanční prostředky na provedení velké reklamní kampaně v jednom z měst nebo na provedení menších reklamních kampaní ve dvou městech. Druhá firma má finanční prostředky jen na malou reklamní kampaň v jednom z měst. Firmy navzájem znají své finanční možnosti. Předpokládejme, že zisk je mezi firmy rozdělen podle následujících pravidel:

- Jestliže v jednom městě povede kampaň (malou nebo velkou) jen jedna firma, získá celý zisk z tohoto města.
- Povedou-li v jednom městě obě firmy malou kampaň, zisk si rozdělí stejným dílem.
- Povede-li v jednom městě první firma velkou kampaň a druhá malou kampaň, získá první firma $\frac{2}{3}$ zisku z tohoto města a druhá firma zbytek.
- Neprovádí-li v daném městě kampaň žádná firma, pak také žádná z firem z tohoto města nezíská žádný zisk.

Nalezněte optimální strategie každé z firem.

Řešení: V tomto příkladě musíme nejprve sestavit výplatní dvoumatici této hry. Nejprve si musíme rozmyslet, kolik strategií má každá z firem. První firma má finanční prostředky na provedení velké reklamní kampaně (V) v jednom z měst (A,B,C), nebo na provedení menších reklamních kampaní (M) ve dvou městech ([A,B];[A,C];[B,C]). První firma má tedy šest možných strategií. Druhá firma může vést kampaň jen ve městech A,B,C. Má tedy tři možné strategie. Strategie prvního hráče píšeme do řádků, strategie druhého hráče píšeme do sloupců. Výplatní dvoumatice bude tedy typu 6×3.

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccc} M_A & M_B & M_C \end{array} \\
\begin{array}{r} V_A \\ V_B \\ V_C \\ M_A, M_B \\ M_A, M_C \\ M_B, M_C \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} \\
a_{61} & a_{62} & a_{63}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Dále se zamyslíme nad vyplněním hodnot výplatní matice. Prvek a_{11} jsou výplaty každého z hráčů pro případ, že oba budou chtít dělat kampaň ve městě A, kde lze očekávat zisk 66. První firma by prováděla velkou kampaň, druhá firma malou kampaň. Podle třetího pravidla, získá první firma $\frac{2}{3}$ zisku, tedy 44 miliónů korun. Druhá firma získá 22 miliónů korun. Pak $a_{11} = 44, 22$ v miliónech korun. Prvek a_{12} jsou výplaty každého z hráčů pro případ, že první firma bude chtít dělat kampaň ve městě A, kde lze očekávat zisk 66, a druhá ve městě B, kde lze očekávat zisk 96. Každá firma provádí kampaň v jiném městě a pak podle prvního pravidla každá z firem získá celý zisk z daného města. Pak $a_{12} = 66, 96$ v miliónech korun. Prvek a_{41} jsou výplaty každého z hráčů pro případ, že oba budou chtít dělat malou kampaň ve městě A, kde lze očekávat zisk 66. První firma bude navíc sama dělat malou kampaň ve městě B, kde lze očekávat zisk 96. Podle druhého výplatního pravidla si firmy zisk z města A rozdělí napůl, první firma bude mít ještě celý zisk z města B (tam dělá kampaň sama). Tedy je prvek $a_{41} = 129, 33$. A takto bychom uvažovali u každého prvku matice a doplnili bychom výplatní matici.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & M_A & M_B & M_C \\
\hline
V_A & 44,22 & 66,96 & 66,39 \\
V_B & 96,66 & 64,32 & 96,39 \\
V_C & 39,66 & 39,96 & 26,13 \\
M_A,M_B & 129,33 & 112,48 & 162,39 \\
M_A,M_C & 72,33 & 105,96 & 85{,}5,19{,}5 \\
M_B,M_C & 135,66 & 87,48 & 115{,}5,19{,}5
\end{array}$$

Dále jen v matici označíme sloupcová maxima z prvních hodnot a řádková maxima z druhých hodnot.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & M_A & M_B & M_C \\
\hline
V_A & 44,22 & 66,{\color{blue}96} & 66,39 \\
V_B & 96,{\color{blue}66} & 64,32 & 96,39 \\
V_C & 39,66 & 39,{\color{blue}96} & 26,13 \\
M_A,M_B & 129,33 & {\color{red}112},{\color{blue}48} & {\color{red}162},39 \\
M_A,M_C & 72,33 & 105,{\color{blue}96} & 85{,}5,19{,}5 \\
M_B,M_C & {\color{red}135},{\color{blue}66} & 87,48 & 115{,}5,19{,}5
\end{array}$$

Existují dvě řešení v ryzích strategiích, jedno z nich je dominující. Optimální strategie pro první firmu je provádět kampaň ve městech B a C, druhá firma bude provádět kampaň ve městě A. Zisk první firmy bude 135 miliónů korun, zisk druhé firmy bude 66 miliónů korun.

V případě, že dvoumaticová hra nemá řešení v ryzích strategiích, existuje vždy řešení ve smíšených strategiích. To však už je nad rámec této publikace.

Kooperativní hra dvou hráčů

V kooperativních hrách mohou hráči před výběrem svých strategii uzavírat dohody o spolupráci. Tyto dohody budou uzavírány pouze tehdy, pokud budou pro hráče výhodné. Tedy kooperace se oběma hráčům musí vyplatit.

Definice 14.3.2. *Zaručená výhra* je výplata v ryzích strategiích dané hry hrané jako nekooperativní.

Označme zaručenou výhru prvního hráče v_1 a zaručenou výhru druhého hráče v_2. Nejvyšší částka, které hráči mohou v kooperativní hře získat je

$$v_{12} = \max_{x\in S_1, y\in S_2} f_1(x,y) + f_2(x,y).$$

Pokud $v_{12} > v_1 + v_2$, vyplatí se oběma hráčům kooperovat. Výplatu pro kooperující hráče a jí odpovídající strategie získáme tak, že sečteme výplatní matice obou hráčů $A + B$ a ve vzniklé matici najdeme maximální prvek.

14.8. Vyplatí se kooperovat hráčům s výplatními maticemi **Příklad 14.8**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

Řešení: Nejprve zjistíme zaručenou výhru.

$$A = \begin{pmatrix} 3,1 & 1,2 & {\color{red}4},{\color{blue}3} \\ 0,{\color{blue}5} & {\color{red}3},2 & 2,4 \\ {\color{red}6},3 & {\color{red}3},3 & 1,{\color{blue}4} \end{pmatrix}$$

V nekooperativní hře by první hráč uhrál 4 výplatní jednotky a druhý hráč by uhrál 3 výplatní jednotky. Toto jsou zaručené výhry jednotlivých hráčů.

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že hráči dohromady mohou uhrát 9 výplatních jednotek. Hráčům se tedy vyplatí kooperovat.

Jak si ale hráči mají společnou výhru rozdělit? Označíme-li výhru prvního hráče v kooperativní hře vk_1 a výhru druhého hráče v kooperativní hře vk_2, pak musí platit

$$\begin{aligned} vk_1 + vk_2 &= v_{12} \\ vk_1 &\geq v_1 \\ vk_2 &\geq v_2. \end{aligned}$$

Jedna z možností je vyplatit každému jeho zaručenou výhru a zbytek rozdělit napůl. Další možnost je rozdělit částku, která zůstane po odečtení zaručených výher obou hráčů, v poměru přínosu obou hráčů.

Definice 14.3.3. Množinu $[vk_1, vk_2]$, pro kterou platí

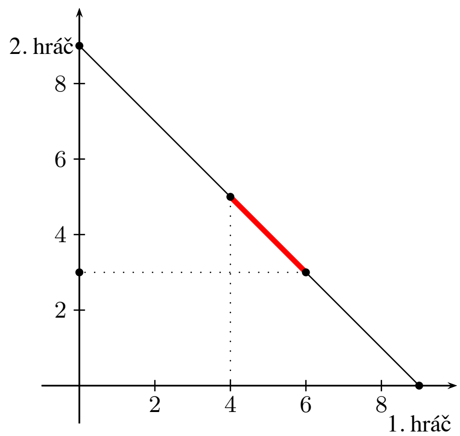
$$\begin{aligned} vk_1 + vk_2 &= v_{12} \\ vk_1 &\geq v_1 \\ vk_2 &\geq v_2 \end{aligned}$$

nazveme *jádrem hry*.

Příklad 14.9

14.9. Nalezněte jádro hry předchozího příkladu a navrhněte rozdělení výhry pro jednotlivé hráče.

Řešení: V předchozím příkladu může první hráč uhrát 4 výplatní jednotky a druhý hráč by uhrál 3 výplatní jednotky. Dohromady mohou hráči uhrát 9 výplatních jednotek. Tedy $9 - 7 = 2$ a tuto částku rozdělíme napůl a přičteme ji každému hráči k jeho zaručené výhře. Tedy první hráč uhraje 5 výplatních jednotek a druhý hráč uhraje 4 výplatní jednotky.



Obrázek 14.3: Jádro hry

Jádro hry také můžeme zobrazit graficky. Na Obrázku 14.3 je jádro hry zobrazeno červenou úsečkou. Na vodorovnou osu zobrazujeme výhry prvního hráče, na svislou osu výhry druhého hráče. Na každou osu zaneseme nejprve maximální možnou výhru v_{12} v kooperativní hře a zaručenou výhru každého hráče. Spojnice maximálních výher v_{12} je úsečka, pro jejíž body platí, že součet souřadnic bodů je v_{12}. Jádro hry je pak ta část úsečky, která leží mezi zaručenými výhrami obou hráčů.

Hodnota informace a dezinformace

V konfliktních situacích (nekooperativních hrách) se můžeme zachovat také tak, že dopředu před volbou strategií (před začátkem hry) podáme informace, že některé naše možné strategie nebudeme volit. Na zveřejnění těchto informací protihráč zareaguje (je inteligentní hráč a v každé situaci chce maximalizovat svůj zisk) a jeho reakce musí být pro nás prospěšná, neboli zveřejněním informace musíme uhrát více. Také musíme uvážit, kolik za zveřejnění informace zaplatit.

První hráč zveřejněním informace zmenší svou množinu strategií $S_1^* \subset S_1$. Druhý hráč tuto informaci vezme v úvahu. Tím se může změnit řešení v ryzích strategiích. Původní řešení v ryzích strategiích $a*, b*$ se změní na řešení $a**, b**$ v ryzích strategiích. Pokud pro toto řešení bude platit, že $a* < a**$, vyplatí se prvnímu hráči informaci zveřejnit. Pro cenu této informace v_a platí $v_a < a** - a*$. Stejně tak druhý hráč může zveřejnit informaci, že některou ze svých možných strategií nebude volit. Vydat tuto informaci se mu vyplatí pouze tehdy, pokud jejím zveřejněním zvýší svůj zisk. Jestliže původní řešení v ryzích strategiích $a*, b*$ se změní na řešení $a**, b**$ v ryzích strategiích, pak pokud pro toto řešení bude platit, že $b* < b**$ zveřejnění informace se mu vyplatí. Cena této informace v_b musí splňovat $v_b < b** - b*$.

14.10. Vyplatí se prvnímu hráči ve dvoumaticové nekooperativní hře dané dvoumaticí **Příklad 14.10**

$$\begin{pmatrix} 5,4 & 3,4 & 2,3 \\ 1,2 & 7,2 & 3,3 \\ 6,4 & 5,3 & 1,5 \end{pmatrix}$$

zveřejnit informaci, že nebude hrát svou třetí strategii?

Řešení: Nalezněme nejprve řešení v ryzích strategiích původní hry.

$$\begin{pmatrix} 5,\color{blue}{4} & 3,\color{blue}{4} & 2,3 \\ 1,2 & \color{red}{7},2 & \color{red}{3},\color{blue}{3} \\ \color{red}{6},4 & 5,3 & 1,\color{blue}{5} \end{pmatrix}$$

Řešení v ryzích strategiích existuje. Kdyby první hráč hrál svou druhou strategii a druhý hráč svou třetí strategii, pak oba získají tři výplatní jednotky. Pokud první hráč zveřejní, že nebude hrát svou třetí strategii, změní se výplatní matice i řešení v ryzích strategiích.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{5},\color{blue}{4} & 3,\color{blue}{4} & 2,3 \\ 1,2 & \color{red}{7},2 & \color{red}{3},\color{blue}{3} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že řešení v ryzích strategiích jsou nyní dvě, ale jedno je dominující. Protože předpokládáme racionální hráče, oba hráči by volili svou první strategii. První hráč by uhrál pět výplatních jednotek, druhý hráč by uhrál čtyři výplatní jednotky. V tomto případě by si oba polepšili. Cena, kterou by měl první hráč za zveřejnění informace zaplatit, by měla být menší než dvě výplatní jednotky. (O tolik by se totiž zvětšil jeho zisk.)

Další z možností je zveřejnit informaci, ale pak se zachovat tak, že popřeme přesně to, co bylo zveřejněno. Tedy zveřejnit dezinformaci. I v tomto případě se nám to musí vyplatit a musíme uvážit, kolik za zveřejnění dezinformace můžeme zaplatit. Zveřejněním deziformace (pro druhého hráče se jedná o informaci) se zmenší prostory strategií prvního hráče $S_1^* \subset S_1$. Druhý hráč na tuto informaci zareaguje, a tím se může změnit původní řešení v ryzích strategiích $a*, b*$ na řešení $a**, b**$ v ryzích strategiích. Pak první hráč zahraje přesně tu strategii, o které předtím informoval, že ji hrát nebude. Výplaty hráčů pak budou $a***, b***$. Pokud bude platit $a* < a***$, vyplatilo se prvnímu hráči dezinformaci zveřejnit. Cena dezinformace vd_a musí splňovat nerovnost $vd_a < a*** - a*$. V tomto případě ale musí hráč brát v úvahu i ztrátu dobrého jména.

14.11. Vyplatí se prvnímu hráči zveřejnit informaci, že nebude hrát svou druhou strategii ve dvoumaticové nekooperativní hře s výplatní dvoumaticí **Příklad 14.11**

$$\begin{pmatrix} 4,4 & 5,4 & 2,3 \\ 1,2 & 7,2 & 3,3 \\ 6,4 & 2,3 & 1,5 \end{pmatrix}?$$

Řešení: Nejprve najdeme řešení v ryzích strategiích v původní hře.

$$\begin{pmatrix} 4,4 & 5,4 & 2,3 \\ 1,2 & 7,2 & 3,3 \\ 6,4 & 2,3 & 1,5 \end{pmatrix}$$

Tímto řešením je druhá strategie prvního hráče a třetí strategie druhého hráče. Výplata pro oba jsou tři výplatní jednotky. Po zveřejnění informace (dezinformace) se změní řešení v ryzích strategiích.

$$\begin{pmatrix} 4,4 & 5,4 & 2,3 \\ 6,4 & 2,3 & 1,5 \end{pmatrix}$$

V tomto novém řešení v ryzích strategiích by si oba hráči zlepšili své výplaty. První hráč by hrál svou první strategii a uhrál by pět výplatních jednotek. Druhý hráč by hrál svou druhou strategii a získal by čtyři výplatní jednotky. První hráč ale nezveřejňoval informaci, ale dezinformaci. Přiměl druhého hráče hrát druhou strategii, ale sám zahraje také druhou. Výsledek je vidět ve výplatní matici.

$$\begin{pmatrix} 4,4 & 5,4 & 2,3 \\ 1,2 & 7,2 & 3,3 \\ 6,4 & 2,3 & 1,5 \end{pmatrix}$$

První hráč uhraje sedm výplatních jednotek, druhý hráč jen dvě výplatní jednotky. Prvnímu hráči by se za zveřejnění dezinformace vyplatilo zaplatit méně než čtyři výplatní jednotky.

14.4 Hry proti přírodě

V této části budeme uvažovat hry dvou hráčů v normálním tvaru, ve kterých druhý hráč bude neinteligentní hráč, tedy nějaký náhodný mechanismus, který se nebude rozhodovat tak, aby maximalizoval svůj zisk. Někdy nebudeme mluvit v této souvislosti o hře, ale o rozhodování za nejistoty. Rozhodováním při jistotě myslíme, že rozhodnutím je jednoznačně dán výsledek hry. Rozhodování při nejistotě značí, že rozhodnutí nemá jednoznačný výsledek (závisí i na daném stavu okolí). Množinu strategií druhého hráče budeme nyní nazývat stavy přírody. Podle informací o stavech přírody budeme rozlišovat dva případy

- *Rozhodování za rizika* - je nám známo rozdělení pravděpodobností stavů přírody.
- *Rozhodování za neurčitosti* - nemáme ani představu, s jakými pravděpodobnostmi vybírá příroda své stavy v rozhodovací situaci.

Rozhodování při riziku

Riziko je situace, kdy ten, kdo rozhoduje, zná všechny možné důsledky svého rozhodnutí a je schopen určit pravděpodobnost každého z nich. Tedy známe nebo jsme schopni určit pravděpodobnosti, s jakými mohou nastat různé stavy neinteligentního hráče. Důsledky rozhodnutí musí být navzájem nezávislé a součet jejich pravděpodobností musí být roven jedné. Pravděpodobnosti budeme rozlišovat dvojího druhu.

- *Objektivní pravděpodobnost* - je založena na zkušenostech o frekvenci důsledků nebo logické či technologické informaci o pravděpodobnosti důsledků.
- *Subjektivní pravděpodobnost* - subjektivní dojem, že předpokládaný výsledek nastane. Je založena na znalostech a zkušenostech.

Výplatní funkce je ve tvaru matice, kde řádky znamenají jednotlivé strategie inteligentního hráče a sloupce odpovídají možným stavům náhodného mechanismu s předem známými pravděpodobnostmi. U neinteligentního hráče se vlastně jedná o smíšené strategie.

Při rozhodování při riziku se budeme řídit dvěma pravidly.

1. Pravidlo očekávané střední hodnoty
2. Pravidlo očekávané hodnoty a rozptylu

Pravidlo očekávané střední hodnoty. Inteligentní hráč volí mezi několika variantami s různými výsledky a rozhodne se pro variantu, která mu přinese nejvyšší průměrný výsledek (nejvyšší očekávaný zisk). Maximalizujeme střední hodnoty výhry.

$$E(X|s_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij}$$
$$s* = \arg \max_{i=1,\dots,m} E(X|s_i)$$

Jedná se o nejrozšířenější kritérium. Ukažme jeho použití na příkladu z motivační úlohy IV.

Příklad 14.12

14.12. Pan T. se rozhoduje, jaké zvolit penzijní připojištění. Vybírá ze dvou penzijních fondů. Jeden z nich, označme ho fond A, je fond, ve kterém jsou zisky 2 % výše vkladu, a to za jakékoli ekonomické situace. Fond B udává výnosy 4 % v případě příznivé ekonomické situace, 1, 2 % v případě méně příznivé ekonomické situace a 0 % v případě nepříznivé ekonomické situace. Odborníci odhadují, že v dalším období se ekonomika bude příznivě vyvíjet s pravděpodobností 0, 4 a nepříznivá ekonomická situace nastane s pravděpodobností 0,3. Jak se má pan T. rozhodnout?

Řešení: Nejprve zapíšeme výplatní matici. Výplatní jednotky jsou v tomto případě procentní body výše vkladu.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1,2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pak střední hodnota procentních bodů výše vkladu v případě příznivého vývoje ekonomiky bude

$$E(X|s_1) = 0,4 \cdot 2 + 0,3 \cdot 2 + 0,3 \cdot 2 = 2$$
$$E(X|s_2) = 0,4 \cdot 4 + 0,3 \cdot 1,2 + 0,3 \cdot 0 = 1,96.$$

Střední hodnota je vyšší v případě první strategie inteligentního hráče. Proto by se pan T. měl rozhodnout pro první fond.

Dále si ukážeme, že v konfliktní situaci se neřídíme jen střední hodnotou. Roli hraje i rozptyl, který interpretujeme jako riziko.

Pravidlo očekávané střední hodnoty a rozptylu. Toto pravidlo používá k ohodnocení rizikových variant dvě charakteristiky rozdělení pravděpodobnosti, a to střední hodnotu a rozptyl. Vyšší riziko bývá vyjádřené vyšším rozptylem.

$$D(X|s_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 p_j - (E(X|s_i))2$$

Nejlepší strategie bude ta, která má nejvyšší očekávanou střední hodnotu a má navíc nejmenší rozptyl.

Příklad 14.13

14.13. Pan T. se rozhoduje, jaké zvolit penzijní připojištění. Vybírá ze dvou penzijních fondů. Jeden z nich, označme ho fond A, je fond, ve kterém jsou zisky 2 % výše vkladu, a to za jakékoli ekonomické situace. Fond B udává výnosy 3 % v případě příznivé ekonomické situace, 1, 2 % v případě méně příznivé ekonomické situace a 0 % v případě nepříznivé ekonomické situace. Odborníci odhadují, že v dalším období se ekonomika bude příznivě vyvíjet s pravděpodobností 0, 4 a nepříznivá ekonomická situace nastane s pravděpodobností 0,3. Jak se má pan T. rozhodnout?

Řešení: Nyní optimální strategii nebudeme hledat jen pomocí výše střední hodnoty, ale také podle výše rozptylu, tedy rizika.

$$D(X|s_1) = 0,4 \cdot 2^2 + 0,3 \cdot 2^2 + 0,3 \cdot 2^2 - 2^2 = 0$$
$$D(X|s_2) = 0,4 \cdot 4^2 + 0,3 \cdot 1,2^2 + 0,3 \cdot 0^2 - 1,96^2 = 2,9904.$$

I podle rozptylu vychází v tomto případě, že lepší je první strategie. I podle tohoto pravidla je možné panu T. doporučit zvolit k penzijnímu připojištění první fond.

Pravidlo očekávané střední hodnoty a rozptylu nemusí vždy dát tak jednoznačné řešení jako v předchozím příkladě. Stává se, že strategie s vyšší očekávanou hodnotu má také vyšší rozptyl (riziko). Rozhodneme se pro tu z rizikových variant, která je lepší v jedné z těchto dvou charakteristik, přičemž druhá z těchto charakteristik je u obou variant přibližně stejná. Také můžeme volit tu strategii, která má nejvyšší hodnotu variačního koeficientu.

$$V(X|s_i) = \frac{\sqrt{D(X|s_i)}}{E(X|s_i)}$$

Rozhodování při neurčitosti

Jedná se o hru inteligentního hráče a náhodného mechanismu v případě, že nemáme žádnou informaci o rozložení pravděpodobnosti stavů náhodného mechanismu. V tomto případě nelze stanovit jednoznačný postup výběru optimálního řešení, ale lze doporučit užitečná pravidla, která by optimální rozhodnutí mělo splňovat. Principy nebo také algoritmy navržené pro výběr optimální strategie by měly mít některé obecné vlastnosti. Algoritmus by měl splňovat následující podmínky.

1. Nevybere za optimální strategii dominovanou strategii.

2. Axiom nepodstatnosti přidané nerozlišující varianty (sloupce). Pokud algoritmus označí některou strategii (řádek) za optimální a do matice je následně přidán sloupec se stejnými prvky jako některý jiný sloupec výplatní matice, pak by algoritmus neměl označit jinou optimální strategii.

3. Axiom nepodstatnosti přidané neoptimální strategie. Pokud algoritmus označí některou strategii (řádek) za optimální a následně je do výplatní matice přidán řádek, pak by měl algoritmus vybrat buď nový řádek, nebo znovu označit původní řádek.

4. Axiom úplnosti množiny optimálních strategií. Pokud algoritmus označí za optimální dvě strategie a v matici se nachází řádek, který je lineární kombinací řádků odpovídajícím optimálním strategiím, pak by měl algoritmus za optimální strategii označit i tento řádek.

5. Axiom jednoznačnosti a existence. Požadujeme, aby algoritmus označil vždy alespoň jednu optimální strategii. V praxi je také důležité, aby optimálních strategií nebylo více.

Všechny zde dále uvedené algoritmy tyto vlastnosti splňují. Nevýhodou těchto algoritmů je, že jejich aplikace na jednu rozhodovací situaci často vede k označení různých strategií za optimální.

V následujícím Laplaceově algoritmu se chováme jako v pravidle očekávané hodnoty při rozhodování za rizika. Protože v tomto případě nevíme nic o rozdělení pravděpodobností stavů náhodného mechanismu, všem stavům přiřadíme stejnou pravděpodobnost. Má-li příroda n možných stavů v konfliktní situaci, pak jednotlivé pravděpodobnosti budou mít hodnotu $\frac{1}{n}$.

Věta 14.4.1 (Laplaceův algoritmus)**.** *Optimální strategie je strategie s nejvyšším řádkovým průměrem*

$$\max_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Demonstrujme tento algoritmus na příkladu pana T. a jeho problému s výběrem penzijního fondu s malou obměnou. Tentokrát nebudeme mít informace, s jakými pravděpodobnostmi mohou nastat příznivé a nepříznivé stavy ekonomiky.

Příklad 14.14

14.14. Pan T. se rozhoduje, jaké zvolit penzijní připojištění. Vybírá ze dvou penzijních fondů. Jeden z nich, označme ho fond A, je fond, ve kterém jsou zisky $2\,\%$ výše vkladu, a to za jakékoli ekonomické situace. Fond B udává výnosy $3\,\%$ v případě příznivé ekonomické situace, $1,2\,\%$ v případě méně příznivé ekonomické situace a $0\,\%$ v případě nepříznivé ekonomické situace. Jak se má pan T. rozhodnout?

Řešení: Každému stavu ekonomiky přiřadíme stejnou pravděpodobnost (rovnoměrné rozdělení). Protože rozlišujeme tři možné stavy ekonomiky, pravděpodobnost každého stavu bude $\frac{1}{3}$. Střední hodnoty budou

$$\begin{aligned} E(X|s_1) &= \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 2 = 2 \\ E(X|s_2) &= \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1,2 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 1,7\overline{3}. \end{aligned}$$

Podle Laplaceova algoritmu by měl pan T. zvolit první fond.

Věta 14.4.2 (Waldův algoritmus maximinu)**.** *Optimální strategie je ta nejlepší z těch nejhorších. V každém řádku pro každou strategii inteligentního hráče vybereme tu nejhorší možnou výhru (minimum v řádku) a z těchto řádkových minim vybereme maximální hodnotu*

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

Tento algoritmus je pesimistický. Proto ho volíme k výběru optimální strategie v konfliktních situacích, které vyžadují větší opatrnost. Naproti tomu další algoritmus je velmi optimistický a volíme ho v případech, kdy je optimismus na místě.

Věta 14.4.3 (Algoritmus maximaxu)**.** *Optimální strategie je ta nejlepší z těch nejlepších. Z řádkových maxim vybereme maximální hodnotu*

$$\max_i \max_j a_{ij}.$$

Ukažme si, jak by podle těchto algoritmů pan T. vybíral svou optimální strategii.

Příklad 14.15

14.15. Pan T. se rozhoduje, jaké zvolit penzijní připojištění. Vybírá ze dvou penzijních fondů. Jeden z nich, označme ho fond A, je fond, ve kterém jsou zisky $2\,\%$ výše vkladu, a to za jakékoli ekonomické situace. Fond B udává výnosy $3\,\%$ v případě příznivé ekonomické situace, $1,2\,\%$ v případě méně příznivé ekonomické situace a $0\,\%$ v případě nepříznivé ekonomické situace. Jak se má pan T. rozhodnout?

Řešení:

- *Podle Waldova algoritmu*

$$\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1,2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ 0 \end{array}$$

  Podle tohoto algoritmu by měl pan T. volit svou první strategii, volit první penzijní fond.

- *Podle algoritmu maximaxu*

$$\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1,2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} 2 \\ \mathbf{4} \end{array}$$

  Optimistický maximaxový algoritmus určil pro pana T. optimální strategii volbu druhého fondu.

Další algoritmus nejprve v prvním kroku vytvoří matici ztrát a pak na tuto matici uplatní Waldův algoritmus.

Věta 14.4.4 (Savagův algoritmus maximinu ztráty)**.** *Pro optimální strategii platí*

1. $b_{ij} = a_{ij} - \max_i a_{ij}$,
2. $\max_i \min_j b_{ij}$.

Matici ztrát vypočteme tak, že najdeme v každém sloupci maximální hodnotu. Následně od každého prvku výplatní matice A v j-tém sloupci odečteme maximální prvek v tomto sloupci. Na takto sestavenou matici ztrát aplikujeme Waldův maximinový algoritmus. Ukažme si aplikaci tohoto algoritmu opět na příkladu problému pana T.

Příklad 14.16

14.16. Pan T. se rozhoduje, jaké zvolit penzijní připojištění. Vybírá ze dvou penzijních fondů. Jeden z nich, označme ho fond A, je fond, ve kterém jsou zisky 2 % výše vkladu, a to za jakékoli ekonomické situace. Fond B udává výnosy 3 % v případě příznivé ekonomické stituace, $1,2$ % v případě méně příznivé ekonomické situace a 0 % v případě nepříznivé ekonomické situace. Jak se má pan T. rozhodnout?

Řešení:

$$\begin{array}{cccc} s_1 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \\ \max \end{array} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1,2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 2 \end{array} \end{array} \end{array}$$

Matice ztrát B pak bude

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & -2 \end{pmatrix}.$$

V této matici nalezneme minimum v řádcích a z nich maximální hodnotu

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} -2 \\ -2. \end{array}$$

V tomto případě mají obě řádková minima stejnou hodnotu, neexistuje tedy maximální prvek. Savagův algoritmus nedává jednoznačnou odpověď'.

Poslední ze zde uvedených algoritmů bude definován pomocí *koeficientu optimismu* $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, který vyjadřuje míru optimismu inteligentního hráče. Koeficient $1-\alpha$ se nazývá *koeficient pesimismu*. Algoritmus počítá v každém řádku průměrnou hodnotu mezi nejnižší možnou výplatou a nejvyšší možnou výplatou inteligentního hráče. Jedná se o vážené průměry, v případě volby $\alpha = 0,5$ se jedná o prostý průměr.

Věta 14.4.5 (Hurwiczův algoritmus vyváženého optimismu-pesimismu)**.** *Pro optimální strategii platí*

$$\max_i [\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij}].$$

Hurwiczův algoritmus vyváženého optimismu-pesimismu je kompromis mezi pesimistickým maximinovým algoritmem a optimistickým maximaxovým algoritmem. Pokud $\alpha = 0$ jedná se o optimistický maximaxový algoritmus, pokud $\alpha = 1$ jedná se o pesimistický Waldův algoritmus.

Platí, čím menší α, tím optimističtější je Hurwiczův algoritmus vyváženého optimismu - pesimismu. Demonstrujme si použití tohoto algoritmu na případu rozhodování pana T.

14.17. Pan T. se rozhoduje, jaké zvolit penzijní připojištění. Vybírá ze dvou penzijních fondů. Jeden z nich, označme ho fond A, je fond, ve kterém jsou zisky $2\,\%$ výše vkladu, a to za jakékoli ekonomické situace. Fond B udává výnosy $3\,\%$ v případě příznivé ekonomické situace, $1,2\,\%$ v případě méně příznivé ekonomické situace a $0\,\%$ v případě nepříznivé ekonomické situace. Pro nalezení optimální strategie pana T. použijte Hurwiczův algoritmus vyváženého optimismu-pesimismu s $\alpha = 0,2$, $\alpha = 0,5$ a $\alpha = 0,8$.

Příklad 14.17

Řešení:

$$\begin{array}{cccc} & \alpha = 0,2 & \alpha = 0,5 & \alpha = 0,8 \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1,2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3,2 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 0,8 \end{matrix} \end{array}$$

Vidíme, že v případě $\alpha = 0,2$ je maximum z vážených průměrů v případě druhé strategie. Pro $\alpha = 0,5$ se jedná o prosté průměry a při této hodnotě koeficientu α nedostáváme jednoznačnou odpověď. Při pesimističtější hodnotě koeficientu α dostáváme odpověď, že pan T. by měl zvolit první penzijní fond.

14.5 Modely oligopolu

V této části se budeme zabývat různými modely oligopolu, přičemž se zaměříme konkrétně na duopol. Každá firma si uvědomuje, že její zisk nezávisí jen na jejím chování, ale i na chování ostatních firem na trhu. Pokud by na trhu byl velký počet prodávajících, kteří nemohou ovlivňovat ceny, dokonalé informace pro kupující i prodávající, nulové náklady na změnu dodavatele a homogenní produkt, jednalo by se o dokonalý trh. V reálném případě však tyto předpoklady nejsou splněny a pak mluvíme o nedokonalém trhu.

Oligopol je struktura trhu, ve které chování jedné z firem ovlivňuje chování ostatních firem. A naopak jejich reakce zase ovlivní chování dané firmy. Jde tady o konfliktní situaci, ve které se každý účastník konfliktu snaží chovat tak, aby maximalizoval svůj zisk. Pak tento problém patří do teorie her. Již jsme zmínili, že se omezíme na modely duopolu, tedy na hru dvou hráčů. Za předpokladu, že se jedná o nekooperativní hru dvou hráčů, uvedeme dva modely: *Cournotův model* a *Stackelbergův model*. Budeme se věnovat i případu kooperativní hry, která popisuje situaci trhu odpovídající kartelu.

Cournotův model duopolu

V tomto modelu předpokládáme, že daný produkt na trhu vyrábějí dva výrobci. K celkovému množství výrobku na trhu přispívají oba podstatnou částí. Duopolisté se o vyráběném množství rozhodují zároveň a nezávisle na sobě. Cena výrobku je ovlivněna celkovým množstvím výrobků na trhu. Označme q_1 množství výrobku vyráběného prvním duopolistou a q_2 množství vyráběné druhým duopolistou. Předpokládejme, že $q_1 \in \langle 0, Q\rangle$ a také $q_2 \in \langle 0, Q\rangle$. Uzavřený interval $\langle 0, Q\rangle$ je tedy prostorem strategií každého z duopolistů. Cena výrobku je určována celkovým množstvím výrobku na trhu, tedy

$$p = c(q_1 + q_2).$$

Tato funkce je klesající funkce dvou proměnných. Příjmové funkce každého z duopolistů jsou funkce závislé na q_1 a q_2. Tyto funkce dvou proměnných definujeme následovně

$$R_i(q_1, q_2) = p\, q_i = c(q_1 + q_2)q_i.$$

Pro porovnání ceny výrobku a mezního příjmu, vyjádříme mezní příjem a porovnáme ho s cenou výrobku. Derivujeme podle pravidel součinu.

$$\frac{\partial R_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} = \frac{\partial c(q_1 + q_2)q_i}{\partial q_i} = \frac{\partial c(q_1 + q_2)}{\partial q_i} q_i + c(q_1 + q_2) = \frac{\partial p}{\partial q_i} q_i + p$$

Protože derivace klesající funkce je záporná, plyne odtud $\frac{\partial p}{\partial q_i} q_i + p < p$. V případě duopolu je mezní příjem firmy menší než cena výrobku. Dále označme $C_i(q_i)$ nákladové funkce každého z duopolistů. Pak ziskové funkce

$$z_i(q_1, q_2) = R_i(q_1 + q_2)q_i - C_i(q_i)$$

jsou také funkce dvou proměnných q_1, q_2.Tyto ziskové funkce jsou výplatní funkce ve hře v normálním tvaru. Každý z obou účastníků tohoto konfliktu se snaží maximalizovat svůj zisk. Tedy vyrábět takové množství q_i^0, ve kterém jeho zisková funkce nabývá svého maxima. První duopolista pro každou strategii q_2 protihráče hledá takové množství $q_1 = f_1(q_2)$, ve kterém jeho zisková funkce nabývá svého maxima. To je hodnota q_1, ve které první derivace podle q_1 je nulová.

$$\frac{\partial z_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0$$

Druhý duopolista reaguje stejně. Pro každou pevně danou strategii prvního hráče q_1, hledá takové množství $q_2 = f_2(q_1)$, ve kterém se maximalizuje jeho zisková funkce, neboli takové q_2, pro které platí

$$\frac{\partial z_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0.$$

Funkce $f_2(q_1)$,$f_1(q_2)$ se nazývají reakční křivky. Rovnovážný stav je určen množstvími q_1,q_2, pro která splňují následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} &= 0 \\ \frac{\partial z_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= 0. \end{aligned}$$

V rovnovážném stavu pro každého z duopolistů se mezní příjem rovná mezním nákladům, protože

$$\frac{\partial z_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} = \frac{\partial R_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} - C_i'(q_i) = 0,$$

a odtud plyne

$$\frac{\partial R_i(q_1, q_2)}{\partial q_i} = C_i'(q_i).$$

Příklad 14.18

14.18. Na trhu jsou dvě firmy, které vyrábějí ve stejném odvětví. Cena výrobku je závislá na celkovém objemu produkce tohoto výrobku na trhu. Tato závislost je popsána funkcí $p = 120 - q_1 - q_2$. Nákladové funkce firem jsou

$$\begin{aligned} C_1(q_1) &= q_1^2 \\ C_2(q_2) &= 140 + 41q_2. \end{aligned}$$

Stanovte množství produkce každého z výrobců, které maximalizuje zisky, a předpokládejte, že obě firmy mají na trhu rovnocenné postavení. Dále vypočtěte cenu a hodnoty zisků každé z firem.

Řešení: Nejdříve vyjádříme ziskové funkce.

$$\begin{aligned} z_1(q_1, q_2) &= (120 - q_1 - q_2)\, q_1 - q_1^2 = 120q_1 - 2q_1^2 - q_1 q_2 \\ z_2(q_1, q_2) &= (120 - q_1 - q_2)\, q_2 - 140 - 41q_2 = -140 + 79q_2 - q_2^2 - q_1 q_2 \end{aligned}$$

Parciální derivace prvního řádu budou

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= 120 - 4q_1 - q_2 \\ \frac{\partial z_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} &= 79 - q_1 - 2q_2. \end{aligned}$$

Pro nalezení extrému obě tyto derivace položíme rovny nule a dostaneme následující soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 120 - 4q_1 - q_2 &= 0 \\ 79 - q_1 - 2q_2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic je $q_1 = 23$ a $q_2 = 28$. Navíc z těchto vztahů dostaneme funkce reakce každého z duopolistů

$$\begin{aligned} q_1 = f_1(q_2) &= 30 - 0,25q_2 \\ q_2 = f_2(q_1) &= 39,5 - 0,5q_1. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme do ziskových funkcí každého z duopolistů a funkce ceny vypočtená množství $q_1 = 23$ a $q_2 = 28$. Odtud plyne, že při celkové produkci $q_1 + q_2 = 51$ by cena výrobku byla $p = 69$. Zisk první firmy by byl $z_1(23, 28) = 1058$ a zisk druhé firmy by byl $z_2(23, 28) = 644$ předem nespecifikovaných peněžních jednotek.

Stackelbergův model duopolu

Tento model popisuje situaci na trhu, kdy duopolisté nejsou ve stejném postavení, ale jeden hraje dominantnější roli a jedná jako monopolista. Tohoto duopolistu budeme nazývat vůdce. Druhého duopolistu, který se bude řídit rozhodnutími svého konkurenta, budeme nazývat následník. Předpokládejme nejprve, že první firma je v pozici vůdce a druhá firma je v pozici následníka. Druhá firma určí své vyráběné množství q_2 až podle objemu výroby vůdce. Objem své výroby určí následník z funkce reakce $q_2 = f_2(q_1)$. Zisková funkce první firmy se pak stane funkcí jedné proměnné.

$$z_1(q_1, q_2) = z_1(q_1, f_2(q_1))$$

Tato funkce jedné proměnné může mít extrém pouze v bodě q_1, ve kterém platí rovnost $z_1'(q_1, f_2(q_1) = 0$. Dostaneme podezřelé body z extrému. Maximum potvrdíme tím, že druhá derivace této funkce v podezřelém bodě bude záporná. Nakonec bod maxima dosadíme do funkce reakce druhé firmy $q_2 = f_2(q_1)$ a vypočítáme objem výroby následníka q_2. Dosazením těchto hodnot q_2, q_1 do funkce ceny dostaneme cenu výrobku a funkční hodnoty ziskových funkcí jsou hodnoty zisků jednotlivých firem. Vše si ukažme znovu na příkladu.

14.19. Na trhu jsou dvě firmy které vyrábějí ve stejném odvětví. Cena výrobku je závislá na celkovém objemu produkce tohoto výrobku na trhu. Tato závislost je popsána funkcí $p = 120 - q_1 - q_2$. Nákladové funkce firem jsou **Příklad 14.19**

$$\begin{aligned} C_1(q_1) &= q_1^2 \\ C_2(q_2) &= 140 + 41q_2. \end{aligned}$$

Stanovte množství produkce každého z výrobců, které maximalizuje jejich zisky za předpokladu, že první firma je v pozici vůdce a druhá firma v pozici následníka. Dále vypočtěte cenu a hodnoty zisků každé z firem.

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladě určíme ziskové funkce

$$\begin{aligned} z_1(q_1, q_2) &= (120 - q_1 - q_2)q_1 - q_1^2 = 120q_1 - 2q_1^2 - q_1q_2 \\ z_2(q_1, q_2) &= (120 - q_1 - q_2)q_2 - 140 - 41q_2 = -140 + 79q_2 - q_2^2 - q_1q_2 \end{aligned}$$

a pro odvození funkce reakce druhé firmy zderivujeme její ziskovou funkce a položíme ji rovnu nule.

$$\frac{\partial z_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 79 - q_1 - 2q_2 = 0$$

Funkce reakce druhé firmy je $q_2 = f_2(q_1) = 39,5 - 0,5q_1$. Tento vztah dosadíme za q_2 do ziskové funkce první firmy.

$$z_1(q_1, 39,5 - 0,5q_1) = \qquad 120q_1 - 2q_1^2 - q_1(39,5 - 0,5q_1)$$
$$= 80,5q_1 - 1,5q_1^2$$

Toto je funkce pouze jedné proměnné q_1. Pro nalezení extrému tuto funkci zderivujeme.

$$z_1'(q_1, 39,5 - 1,5q_1) = (80,5q_1 - 1,5q_1^2)' = 80,5 - 3q_1$$

Řešením rovnice

$$80,5 - 3q_1 = 0$$

je $q_1 \doteq 26,83$. Protože druhá derivace je záporná pro $q_1 = 26,83$, totiž

$$z_1''(q_1, 39,5 - 1,5q_1) = (80,5 - 3q_1)' = -3,$$

jedná se o lokální maximum. Dosazením hodnoty $q_1 = 26,83$ do funkce reakce

$$q_2 = f_2(26,83) = 39,5 - 0,5 \cdot 26,83 = 26,085.$$

Hodnotu zisku každé z firem získáme dosazením vypočtených objemů výroby každého z výrobců do ziskových funkcí.

$$z_1(26,83, 26,085) = 120 \cdot 26,83 - 2 \cdot 26,83^2 - 26,83 \cdot 26,085 = 1080,9022$$
$$z_2(26,83, 26,085) = 79 \cdot 26,085 - 140 - 26,085^2 - 26,83 \cdot 26,085 \doteq 540,43$$

Příklad 14.20

14.20. Na trhu jsou dvě firmy, které vyrábějí ve stejném odvětví. Cena výrobku je závislá na celkovém objemu produkce tohoto výrobku na trhu. Tato závislost je popsána funkcí $p = 120 - q_1 - q_2$. Nákladové funkce firem jsou

$$C_1(q_1) = q_1^2$$
$$C_2(q_2) = 140 + 41q_2.$$

Stanovte množství produkce každého z výrobců, které maximalizuje jejich zisky za předpokladu, že druhá firma je v pozici vůdce a první firma v pozici následníka. Dále vypočítejte cenu a hodnoty zisků každé z firem.

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladě určíme ziskové funkce

$$z_1(q_1, q_2) = (120 - q_1 - q_2)q_1 - q_1^2 = 120q_1 - 2q_1^2 - q_1q_2$$
$$z_2(q_1, q_2) = (120 - q_1 - q_2)q_2 - 140 - 41q_2 = -140 + 79q_2 - q_2^2 - q_1q_2$$

a pro odvození funkce reakce první firmy zderivujeme její ziskovou funkci a položíme ji rovnu nule.

$$\frac{\partial z_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 120 - 4q_1 - q_2 = 0$$

Funkce reakce první firmy je $q_1 = f_1(q_2) = 30 - 0,25q_2$. Tuto funkci dosadíme za q_1 do ziskové funkce druhé firmy.

$$z_2(30 - 0,25q_2, q_2) = -140 + 79q_2 - q_2^2 - (30 - 0,25q_2)q_2$$
$$== -140 + 49q_2 - 0,75q_2^2$$

Tato funkce je funkce jedné proměnné q_2. Zderivováním nalezneme bod podezřelý z extrému této funkce.

$$z_2'(30 - 0,25q_2, q_2) = (-140 + 49q_2 - 0,75q_2^2)' = 49 - 1,5q_1$$

Vyřešíme rovnici

$$49 - 1,5q_2 = 0$$

a dostaneme $q_2 = 32,\overline{6}$. Pro ověření, zda se jedná o lokální maximum, vypočteme druhou derivaci

$$z_2''(30 - 0,25q_2, q_2) = (49 - 1,5q_1)' = -1,5.$$

Tato druhá derivace je záporná pro každé q_2, jedná se o lokální maximum. Vypočítaný objem výroby druhé firmy dosadíme do funkce reakce a vypočítáme objem výroby první firmy

$$q_1 = f_1(q_2) = 30 - 0,25 \cdot 32,\overline{6} = 21,8\overline{3}.$$

Ze ziskových funkcí dostaneme hodnotu zisku každé z firem.

$$z_1(21,83, 32,67) = 120 \cdot 21,83 - 2 \cdot 21,83^2 - 21,83 \cdot 32,67 = 953,3161$$
$$z_2(21,83, 32,67) = 79 \cdot 32,67 - 140 - 32,67^2 - 21,83 \cdot 32,67 = 660,415$$

Z uvedených příkladů vidíme, že pozice vůdce na trhu vede (zcela podle předpokladu) ke zvýšení zisku firmy v této pozici.

Kartel

Kartel popisuje situaci na trhu, kdy výrobci uzavřou dohodu o spolupráci. Z hlediska teorie her se jedná o kooperativní hru. Připomeňme, že hráči přistoupí na kooperaci v případě, že je to pro ně výhodné a získají více, než jsou jejich zaručené zisky. Za zaručené zisky budeme v tomto případě považovat zisky firem v situaci popsané Cournotovým modelem. Uzavřením dohody se firmy chovají jako jeden výrobce na trhu, vzniká tedy monopol. Firmy získají společný zisk a tento společný zisk si pak přerozdělí. Pro zjednodušení budeme opět předpokládat, že na trhu jsou jen dvě firmy, které vyrábějí určitý výrobek.

Předpokládejme tedy, že firmy se chtějí předem dohodnout na objemech výroby každé z firem. Označme je q_1 a q_2. Cena výrobku je funkcí celkového objemu výrobku na trhu, $p = c(q_1 + q_2)$. Nákladové funkce první firmy označme $C_1(q_1)$ a druhé $C_2(q_2)$. Kartel bude mít ziskovou funkci ve tvaru příjem mínus náklady následující

$$z(q_1, q_2) = p \cdot (q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2).$$

Extrém této funkce nalezneme klasicky jako extrém funkce dvou proměnných. Stacionární body podezřelé z extrému nalezneme ze soustavy rovnic

$$\frac{\partial z(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0$$
$$\frac{\partial z(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0.$$

Potvrdit extrém nám musí determinant příslušné Hessovy matice ve stacionárních bodech. Přerozdělení celkového zisku kartelu z na zisky jednotlivých firem z_1 a z_2 musí splňovat podmínky

$$z = z_1 + z_2$$
$$z_1 \geq z_1^c$$
$$z_2 \geq z_2^c,$$

kde z_1^c a z_2^c jsou zisky jednotlivých firem v případě nekooperativní hry, tedy situace trhu zachycené například Cournotovým modelem. Množina popsaná uvedenou soustavou rovnic a nerovnic je jádro hry. Jedna z možností přerozdělení zisku kartelu je dát každému jeho zaručenou výhru a částku, která je navíc, rozdělit stejným dílem, neboli

$$z_1 = z_1^c + \frac{z - (z_1^c + z_{2^c})}{2}$$
$$z_2 = z_2^c + \frac{z - (z_1^c + z_2^c)}{2}.$$

Vše si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 14.21

14.21. Na trhu jsou dvě firmy, které vyrábějí ve stejném odvětví. Cena výrobku je závislá na celkovém objemu produkce tohoto výrobku na trhu. Tato závislost je popsána funkcí $p = 120 - q_1 - q_2$. Nákladové funkce firem jsou

$$\begin{aligned} C_1(q_1) &= q_1^2 \\ C_2(q_2) &= 140 + 41q_2. \end{aligned}$$

Stanovte množství produkce každého z výrobců, které maximalizuje jejich zisky za předpokladu, že firmy uzavřely kartelovou dohodu. Dále vypočtěte cenu a hodnoty zisků každé z firem.

Řešení: Zapišme si nejprve ziskovou funkci kartelu.

$$\begin{aligned} z(q_1, q_2) &= p \cdot (q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2) \\ &= (120 - q_1 - q_2) \cdot (q_1 + q_2) - q_1^2 - (140 + 41q_2) \\ &= 120q_1 + 79q_2 - 2q_1^2 - q_2^2 - 2q_1q_2 - 140 \end{aligned}$$

Dále spočteme parciální derivace této funkce podle obou proměnných.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= 120 - 4q_1 - 2q_2 \\ \frac{\partial z(q_1, q_2)}{\partial q_2} &= 79 - 2q_1 - 2q_2 \end{aligned}$$

Pro zjištění stacionárních bodů podezřelých z extrému vyřešíme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 120 - 4q_1 - 2q_2 &= 0 \\ 79 - 2q_1 - 2q_2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic je $q_2 = 19$ a $q_1 = 20{,}5$. Pro ověření, zda se jedná o lokální maximum, spočteme nejprve druhé parciální derivace podle všech proměnných.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} &= -4 & \qquad \frac{\partial^2 z(q_1, q_2)}{\partial q_2^2} &= -2 \\ \frac{\partial^2 z(q_1, q_2)}{\partial q_1 \partial q_2} &= -2 & \qquad \frac{\partial^2 z(q_1, q_2)}{\partial q_2 \partial q_1} &= -2 \end{aligned}$$

Determinant Hessovy matice pak bude mít následující hodnotu

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-2) - (-2)(-2) = 4.$$

Hodnota determinantu je kladná a druhá derivace podle první proměnné záporná. Vypočtený stacionární bod je bod lokálního maxima. Cena výrobku pak bude $p = 80,5$ měnových jednotek. Zisk kartelu spočteme dosazením vypočtených objemů výroby do ziskové funkce a dostaneme $1840,5$. Tuto částku rozdělíme podle nastíněného hlediska. Zaručená výhra první firmy je 1058 (zisk v případě Cournotova modelu), zaručená výhra druhé firmy je 644. Jednotlivé firmy si tedy maximální zisk kartelu rozdělí následujícím způsobem

$$\begin{aligned} z_1 &= 1058 + \frac{1840,5 - (1058 + 644)}{2} = 1127,25 \\ z_2 &= 644 + \frac{1840,5 - (1058 + 644)}{2} = 713,25. \end{aligned}$$

Vidíme, že kartel přináší firmám větší zisky při menším objemu výroby a vyšší ceně ve srovnání s Cournotovým modelem. Uzavírání kartelových dohod společnost však brání, protože takové chování firem společnost poškozuje.

14.6 Cvičení

14.6.1. Ve hře dvou hráčů dané dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 3,4 & 4,5 & 0,1 \\ 5,3 & 6,2 & 3,4 \\ 2,3 & 1,3 & 4,5 \end{pmatrix}$$

nalezněte řešení v ryzích strategiích (pokud existuje).

14.6.2. Ve hře dvou hráčů dané dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 3,4 & 4,3 & 0,1 \\ 1,3 & 6,1 & 3,2 \\ 2,3 & 1,3 & 4,5 \end{pmatrix}$$

nalezněte řešení v ryzích strategiích (pokud existuje).

14.6.3. Ve hře dvou hráčů dané dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 2,4 & 4,5 & 2,0 \\ 5,1 & 3,2 & 3,4 \\ 2,3 & 3,3 & 4,5 \end{pmatrix}$$

nalezněte řešení v ryzích strategiích (pokud existuje).

14.6.4. Ve hře dvou hráčů dané dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 2,4 & 3,6 & 3,6 \\ 5,1 & 1,2 & 2,4 \\ 2,3 & 3,6 & 3,6 \end{pmatrix}$$

nalezněte řešení v ryzích strategiích (pokud existuje).

14.6.5. Vyplatí se ve hře dvou hráčů s výplatními maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

hrát hru jako kooperativní hru? Pokud ano, navrhněte rozdělení výhry.

14.6.6. Vyplatí se ve hře dvou hráčů dané dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 2,4 & 1,5 & 3,6 \\ 5,1 & 1,2 & 2,6 \\ 4,7 & 3,2 & 3,2 \end{pmatrix}$$

prvnímu hráči zveřejnit informaci, že nebude hrát svou druhou strategii? Pokud ano, jaká může být cena informace?

14.6.7. Vyplatí se ve hře dvou hráčů dané dvoumaticí

$$\begin{pmatrix} 2,4 & 1,8 & 5,6 \\ 3,1 & 1,7 & 2,6 \\ 4,5 & 3,2 & 3,2 \end{pmatrix}$$

druhému hráči zveřejnit dezinformaci, že nebude hrát svou první strategii? Pokud ano, jaká může být cena dezinformace?

14.6.8. V antagonistické hře dvou hráčů s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

vyškrtněte dominované strategie každého z hráčů (pokud existují).

14.6.9. V antagonistické hře dvou hráčů s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

nalezněte optimální strategie obou hráčů a určete cenu hry.

14.6.10. Určitá firma chce otevřít dvě restaurace, jednu větší (V) a jednu menší (M). Otevřít je může v některém z měst A, B a C. Předpokládané zisky jsou vyjádřeny výplatní maticí

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & M & \\ A & B & C \end{array} \\ V \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 4,5 & 4,3 & 3,2 \\ 6,4 & 5,3 & 3,5 \\ 5,4 & 4,4 & 3,3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Rozhodněte, v jakých městech mají být restaurace otevřeny.

14.6.11. Na trhu jsou pouze dva výrobci jednoho výrobku. Cena výrobku je závislá na objemech výroby q_1 a q_2 obou výrobců následovně $p = 120 - (2q_1 + q_2)$. Nákladová funkce prvního výrobce je $C_1 = 200 + 15q_1$, druhého výrobce je $C_2 = 20 + q_2^2$. Stanovte objemy výroby obou firem, při kterých dosahují firmy maximálního zisku, za předpokladu, že jejich postavení na trhu je rovnocenné. Stanovte cenu a zisky jednotlivých firem.

14.6.12. Na trhu jsou pouze dva výrobci jednoho výrobku. Cena výrobku je závislá na objemech výroby q_1 a q_2 obou výrobců následovně $p = 120 - (2q_1 + q_2)$. Nákladová funkce prvního výrobce je $C_1 = 200 + 15q_1$, druhého výrobce je $C_2 = 20 + q_2^2$. Stanovte objemy výroby obou firem, při kterých dosahují firmy maximálního zisku, za předpokladu, že první firma je v pozici vůdce. Stanovte cenu a zisky jednotlivých firem.

14.6.13. Na trhu jsou pouze dva výrobci jednoho výrobku. Cena výrobku je závislá na objemech výroby q_1 a q_2 obou výrobců následovně $p = 120 - (2q_1 + q_2)$. Nákladová funkce prvního výrobce je $C_1 = 200 + 15q_1$, druhého výrobce je $C_2 = 20 + q_2^2$. Stanovte objemy výroby obou firem, při kterých dosahují firmy maximálního zisku, za předpokladu, že druhá firma je v pozici vůdce. Stanovte cenu a zisky jednotlivých firem.

14.6.14. Na trhu jsou pouze dva výrobci jednoho výrobku. Cena výrobku je závislá na objemech výroby q_1 a q_2 obou výrobců následovně $p = 230 - (q_1 + 2q_2)$. Nákladová funkce prvního výrobce je $C_1 = 200 + 12q_1$, druhého výrobce je $C_2 = 10 + \frac{q_2^2}{2}$. Stanovte objemy výroby obou firem, při kterých dosahují firmy maximálního zisku, za předpokladu, že jejich postavení na trhu je rovnocenné. Stanovte cenu a zisky jednotlivých firem.

Výsledky cvičení

14.6.1 Řešení v ryzích strategiích existuje. Optimální strategie prvního hráče je třetí, optimální strategie druhého hráče je také ta třetí. V tomto případě první hráč získává 4 a druhý získává 5 výplatních jednotek.
14.6.2 Řešení v ryzích strategiích existují dvě. Jsou to prvky $3, 4$ a $4, 5$. Protože první řešení je dominované, každý hráč zvolí své třetí strategie. V tomto případě první hráč získává 4 a druhý získává 5 výplatních jednotek.
14.6.3 Řešení v ryzích strategiích existují dvě. Jsou to prvky a_{12} a $a_{3,3}$ se stejnou hodnotou $4, 5$. Zdálo by se, že první hráč může hrát první nebo třetí strategii a druhý hráč může hrát druhou nebo třetí strategii. Žádné řešení v ryzích strategiích není dominující. Problém je ale v tom, že se může stát, že první hráč zahraje první strategii a druhý třetí. V tom případě by první hráč získal dvě výplatní jednotky a druhý hráč žádnou výplatní jednotku. Nebo v případě, že první hráč hraje třetí strategii a druhý druhou strategii, uhrají oba tři výplatní jednotky. Tedy méně, než v řešení v ryzích strategiích. Je to situace, kdy existují řešení v ryzích strategiích, jednoznačná odpověd' na optimální strategie neexistuje. V této situaci by hráčům pomohlo hrát hru jako kooperativní hru.
14.6.4 V tomto případě existují čtyři řešení v ryzích strategiích. První hráč může hrát první nebo třetí strategii a druhý hráč může hrát druhou nebo třetí strategii. Ať hráči zahrají jakoukoli ze svých ryzích strategií, první hráč uhraje tři výplatní jednotky a druhý hráč uhraje šest výplatních jednotek.
14.6.5 Řešení nekooperativní hry v ryzích strategiích je pro prvního hráče čtvrtá strategie, pro druhého první strategie a získají $7, 3$. Pokud budou hru hrát jako kooperaticní hru, v matici $A+B$ nejvyšší hodnotu má prvek $a_{33} = 14$. Protože $14 > 7+3$ vyplatí se hru hrát jako kooperativní hru. Každý hráč dostane svou zaručenou výhru a navíc může dostat každý $\frac{14-10}{2} = 2$. Výhra prvního hráče pak bude 9, výhra druhého hráče 5.
14.6.6 Vyplatí. Řešení nekooperativní hry v ryzích strategiích je pro prvního hráče první strategie, pro druhého třetí strategie a získají $3, 6$. Pokud nebude první hráč hrát svou druhou strategii, změní se řešení v ryzích strategiích na $a_{31} = 4, 7$. Cena informace by měla být menší než jedna výplatní jednotka.
14.6.7 Vyplatí. Řešení nekooperativní hry v ryzích strategiích je pro prvního hráče třetí strategie, pro druhého první strategie a získají $4, 5$. Pokud nebude druhý hráč hrát svou druhou strategii, přibude dominující řešení v ryzích strategiích na $a_{13} = 5, 6$. První hráč tedy bude hrát první strategii. Druhý hráč zahraje ale druhou strategii. Výplata bude $a_{12} = 1, 8$. Cena dezinformace by měla být menší než tři výplatní jednotky.
14.6.8 Pro prvního hráče je dominovaná první strategie třetí strategií. Druhý hráč má dominovanou třetí strategii. Dominující nad touto strategií je jak jeho první, tak čtvrtá strategie.
14.6.9 Řešení v ryzích strategiích neexistuje. Řešení ve smíšených strategiích je $(\frac{7}{11}, \frac{4}{11})$ pro prvního hráče a $(\frac{8}{11}, \frac{3}{11}, 0)$ pro druhého hráče. Cena hry je $-\frac{1}{11}$.
14.6.10 Existuje řešení v ryzích strategích $a_{23} = 3, 5$. Tedy postavit velkou restauraci ve městě B a malou ve městě C. Pokud si ale uvědomíme, že obě restaurace patří jedné firmě, jedná se o kooperativní hru a pak je největší zisk pro firmu v případě, že velká restaurace bude postavena v městě B a malá ve městě A. Zisk pro firmu bude 10 výplatních jednotek.
14.6.11 Cournotův model duopolu, $q_1 = 21, 4$, $q_2 = 19, 3$, $p = 57, 9$, $z_1 = 718$, $z_2 = 724, 98$.
14.6.12 Stackebergův model duopolu, $q_1 = 25$, $q_2 = 17, 5$, $p = 52, 5$, $z_1 = 737, 5$, $z_2 = 592, 5$.
14.6.13 Stackebergův model duopolu, $q_1 = 20, 625$, $q_2 = 22, 5$, $p = 56, 25$, $z_1 = 650, 78$, $z_2 = 739, 375$.
14.6.14 Cournotův model duopolu, $q_1 = 78, 75$, $q_2 = 30, 25$, $p = 90, 75$, $z_1 = 6001, 56$, $z_2 = 1820, 125$.

Literatura

[1] Allen, R. G. D.: *Matematická ekonomie*. Academia, Praha 1971.

[2] Anthony, M., Biggs, N.: *Mathematics for economics and finance*. Cambridge University Press, 2007.

[3] Barnett, R. A., Ziegler, M. R.: *Applied mathematics for business, economics, life sciences, and social sciences*. Dellen Publishing Company, San Francisco 1989.

[4] Budinský, B., Charvát, J.: *Matematika I*. SNTL, Praha 1987.

[5] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. JČMF, Prometheus 2008.

[6] Děmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment, Praha 2003.

[7] Frank, R. H.: *Mikroekonomie a chování*. Nakladatelství Svoboda, Praha 1995.

[8] Jablonský, J.: *Operační výzkum - kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. Professional Publishing, Praha 2007.

[9] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*. Academia, Praha 1984.

[10] Jirásek, F., Benda, J.: *Matematika pro bakalářské studium*. Ekopress, Praha 2006.

[11] Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky*. SNTL, Praha 1979.

[12] Klůfa, j., Coufal, J.: *Matematika pro ekonomy*. Ekopress, 1997.

[13] Krämer, W.: *Statistika do vesty*. Nakladatelsví Baronet, Praha 2005.

[14] Lagová, M., Jablonský, J.: *Lineární modely*. Oeconomica, Praha 2004.

[15] Matejdes, M.: *Aplikovaná matematika*. MATCENTRUM, Zvolen 2005.

[16] Minorskij, V.P.: *Sbírka úloh z vyšší matematiky*. SNTL, Praha 1964.

[17] Moc, O.: *Sbírka úloh z matematiky Diferenciální počet jedné proměnné*. UJEP, Ústí nad Labem 2007.

[18] Moc, O.: *Sbírka úloh z matematiky Integrální počet jedné proměnné*. UJEP, Ústí nad Labem 2008.

[19] Ronald, L. R., Goldberg, J. B.: *Operations research: applications and algorithms*. Thomson Brooks/Cole, 2004.

[20] Slavík, V.: *Matematika I*. Naroma, Praha 2000.

[21] Souček, E.: *Statistika pro ekonomy*. VŠEM 2006.

[22] Šimsová, J.: *Sbírka úloh z matematiky Lineární algebra*. UJEP, Ústí nad Labem 2008.

[23] Waner, S., Costenoble, S. R.: *Finite Mathematics and Applied Calculus*. Thomson Brooks/Cole, 2007.

Rejstřík